

УДК 521.172

ОРБИТАЛЬНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ВНЕСОЛНЕЧНЫХ ПЛАНЕТНЫХ СИСТЕМ HD 39194, HD 141399 И HD 160691

© 2019 г. А. С. Перминов^{1*}, Э. Д. Кузнецов^{1**}

¹Уральский федеральный университет им. Первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

Поступила в редакцию 05.03.2019 г.; после доработки 17.04.2019 г.; принята к публикации 29.04.2019 г.

Авторами построена осредненная численно-аналитическая теория движения второго порядка по массам планет для четырехпланетной задачи. Гамильтониан и уравнения движения даны в координатах Якоби и записаны в элементах второй системы Пуанкаре. Эксцентрисические и облические элементы Пуанкаре сохранены в уравнениях движения вплоть третьей степени. В работе рассматривается орбитальная эволюция трехпланетной системы HD 39194 и четырехпланетных систем HD 141399, HD 160691 (μ Aга). Численное интегрирование уравнений движения проводится для набора начальных условий, в которых неизвестные и известные из наблюдений с ошибками элементы орбит варьируются в допустимых пределах. Определены диапазоны изменения элементов орбит в зависимости от начальных условий. Предположение о стабильности наблюдаемых планетных систем позволяет исключить начальные условия, ведущие к экстремальному росту эксцентриситетов и наклонов орбит. Выявлены начальные условия, при которых элементы орбит сохраняются малыми на всем интервале моделирования. Показан способ, позволяющий сузить диапазон возможных значений неизвестных элементов орбит и определить их наиболее вероятные, с точки зрения стабильности, значения.

DOI: 10.1134/S000462991909007X

1. ВВЕДЕНИЕ

Построенная авторами осредненная численно-аналитическая теория движения второго порядка по массам планет применяется для исследования орбитальной эволюции внесолнечных планетных систем. При построении теории движения оскулирующий гамильтониан четырехпланетной задачи записывается в системе координат Якоби [1], которая наиболее удобна для использования в рамках планетной задачи. Далее строится разложение гамильтониана в ряд Пуассона по степеням малого параметра и по каноническим элементам второй системы Пуанкаре [2]. В данной системе имеется только один угловой элемент — средняя долгота, что позволяет существенно упростить угловую часть разложения [3]. В качестве малого параметра задачи выбрано отношение суммы масс планет системы к массе звезды. Алгоритм и свойства разложения гамильтониана в оскулирующих элементах подробно описаны авторами в работе [4].

Далее проводится осреднение гамильтониана задачи с помощью метода Хори-Депри [5, 6]. Суть

метода заключается в исключении из гамильтониана короткопериодических возмущений, определяемых слагаемыми, содержащими средние долготы, что позволяет в дальнейшем существенно увеличить шаг интегрирования уравнений движения. Алгоритм построения осредненного гамильтониана и уравнений движения в средних элементах рассмотрен авторами в работе [7]. В настоящей работе используется осредненный гамильтониан, построенный с точностью до 2 степени по малому параметру и до 4 степени по эксцентрисическим и облическим элементам Пуанкаре (которые пропорциональны соответственно эксцентриситету и наклону орбиты). Уравнения движения в средних элементах построены с точностью до 3 степени по указанным элементам орбит. Преобразование между оскулирующими и средними элементами задается функциями замены переменных. Применение построенной теории движения для моделирования орбитальной эволюции апробировано авторами на примере планет-гигантов Солнечной системы в работе [8].

В работе рассматривается характер орбитальной эволюции двух внесолнечных четырехпланетных систем HD 141399, HD 160691 (μ Aга) и одной трехпланетной системы HD 39194. Элементы орбит внесолнечных планетных систем, получаемые

*E-mail: perminov12@yandex.ru

**E-mail: Eduard.Kuznetsov@urfu.ru

из наблюдений, известны с ошибками, некоторые же элементы, в силу специфики используемых методов наблюдений, не определяются. В настоящей работе на основе моделирования динамической эволюции систем HD 39194, HD 141399 и HD 160691 определяются допустимые значения орбитальных параметров. Все неизвестные и известные с ошибками элементы орбит в планетных системах варьируются в допустимых пределах, что определяет набор всех возможных начальных условий для численного интегрирования уравнений движения.

По результатам моделирования определяются диапазоны изменения элементов орбит в зависимости от начальных условий. Предположение, что наблюдаемые планетные системы эволюционируют достаточно долгое время и являются устойчивыми, позволяет исключить начальные условия, приводящие к экстремальному росту эксцентриситетов и наклонов орбит, и выявить те, при которых указанные элементы сохраняются малыми на всем интервале моделирования. Это позволяет сузить диапазон возможных значений неизвестных элементов орбит и определить их наиболее вероятные значения, при которых система остается стабильной на длительных интервалах времени.

Уравнения движения численно интегрируются методом Эверхарта 7 порядка [9] на интервале времени 1 млн. лет с шагом 1000 лет. Начальные условия для численного интегрирования определяются следующим образом: барицентрические кеплеровские элементы орбит планет преобразуются в элементы Пуанкаре в координатах Якоби, затем с помощью функций замены переменных выполняется переход к средним элементам. Дальнейшая эволюция системы рассматривается уже в средних элементах. Контроль точности интегрирования проводится сравнением текущего значения энергии системы с ее начальным значением.

Следует отметить, что применяемая нами теория движения позволяет исследовать орбитальную эволюцию систем с умеренными значениями наклонов и эксцентриситетов орбит. Поэтому, если в процессе моделирования орбитальной эволюции системы происходит существенный рост эксцентриситетов и наклонов, то точные значения элементов орбит не могут быть определены в рамках рассматриваемой теории движения. Можно говорить лишь о том, что качественное поведение эксцентриситетов и наклонов соответствует росту вплоть до экстремальных значений. Но поведение системы после начала подобного роста элементов орбит невозможно исследовать количественно в рамках построенной теории движения.

В соответствии с работой [10] для рядов, представляющих уравнения движения, были вычислены значения Д'Аламберовских радиусов для

эксцентриситетов и наклонов орбит — в этих пределах функции сохраняют свои Д'Аламберовские свойства. В работе [11] показано, что оценки Д'Аламберовских радиусов близки к оценкам радиусов сходимости рядов по эксцентриситетам и наклонам орбит, внутри которых разложения функций в ряды еще сохраняют свои аналитические свойства.

2. ПАРАМЕТРЫ СИСТЕМ. ВАРЬИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТ

Все приведенные в данном разделе физические характеристики звезд и их планетных систем, включая массы, элементы орбит и их погрешности, взяты в соответствии с каталогом внесолнечных планетных систем exoplanet.eu [12].

Планетная система звезды HD 39194 открыта по измерениям лучевой скорости (методом доплеровской спектроскопии) в обсерватории Ла Силья в 2011 г., имеет в составе три супер-Земли [13] и находится на расстоянии 25.9 пк в созвездии Столовой Горы. Спектральный класс звезды K0V, а видимая звездная величина $m_V = 8.08^m$. Данная звезда отсутствует в каталоге, поэтому, принимая во внимание ее спектральный класс, значение массы было выбрано равным $M_* = 0.72M_\odot$, где M_\odot — масса Солнца. Кроме того, дополнительно было проведено моделирование для массы $M_* = 0.85M_\odot$.

Звезда главной последовательности HD 141399 находится в созвездии Волопаса на расстоянии 36.17 пк, имеет спектральный класс K0V и видимую звездную величину $m_V = 7.2^m$. Масса звезды $M_* = (1.07 \pm 0.08)M_\odot$. В 2014 г. по результатам обработки данных 10-летних наблюдений лучевой скорости (обсерватория Кека и Ликская обсерватория) вокруг звезды HD 141399 была обнаружена система из четырех планет с минимальными массами порядка массы Юпитера [14].

Звезда HD 160691 находится на расстоянии 15.3 пк в созвездии Жертвенника (μ Aга). Спектральный класс звезды G3 IV-V, видимая звездная величина $m_V = 5.15^m$, масса звезды $M_* = (1.08 \pm 0.05)M_\odot$. На данный момент в системе HD 160691 известно четыре планеты, обнаруженные методом доплеровской спектроскопии. Первая из них (μ Aга b) открыта в 2000 г. на Англо-австралийском телескопе [15]. Наличие второй планеты (сейчас она известна как μ Aга e) было подтверждено в 2004 г. [16]. В том же году была обнаружена третья планета (μ Aга c) по наблюдениям в обсерватории Ла Силья [17]. Далее в 2006 г. двумя независимыми группами [18, 19] была предложена модель изменения лучевой скорости звезды, включающая еще одну планету (μ Aга d).

Таблица 1. Известные из наблюдений параметры планетной системы HD 39194

Планета	b	c	d
$M \sin I, M_J$	0.0117 ± 0.001	0.0187 ± 0.00148	0.0162 ± 0.0026
$a, \text{а.е.}$	0.0519 ± 0.0008	0.0954 ± 0.0016	0.172 ± 0.0029
e	0.2 ± 0.1	0.11 ± 0.006	0.2 ± 0.16
$P, \text{сутки}$	5.6363 ± 0.0008	14.025 ± 0.0051	33.941 ± 0.0353

Таблица 2. Известные из наблюдений параметры планетной системы HD 141399

Планета	b	c	d	e
$M \sin I, M_J$	0.451 ± 0.03	1.33 ± 0.08	1.18 ± 0.08	0.66 ± 0.1
$a, \text{а.е.}$	0.415 ± 0.011	0.689 ± 0.02	2.09 ± 0.06	5 ± 1.5
e	0.04 ± 0.02	0.048 ± 0.009	0.074 ± 0.025	0.26 ± 0.22
$\omega, ^\circ$	270 ± 80	220 ± 40	220 ± 30	350 ± 20
$P, \text{сутки}$	94.44 ± 0.05	201.99 ± 0.08	1069.8 ± 6.7	5000^{+560}_{-2000}

Таблица 3. Известные из наблюдений параметры планетной системы HD 160691

Планета	c	d	b	e
$M \sin I, M_J$	0.03321	0.5219	1.676	1.814
$a, \text{а.е.}$	0.09094	0.921	1.5 ± 0.02	5.235
e	0.172 ± 0.04	0.0666 ± 0.0122	0.128 ± 0.017	0.0985 ± 0.0627
$\omega, ^\circ$	212.7 ± 13.3	189.6 ± 9.4	22 ± 7	57.6 ± 43.7
$P, \text{сутки}$	9.6386 ± 0.0015	310.55 ± 0.83	643.25 ± 0.9	4205.8 ± 758.9

Введение новой планеты позволило уменьшить значительные на тот момент эксцентриситеты ранее известных планет.

Известные из наблюдений параметры планетных систем HD 39194, HD 141399 и HD 160691 и приведены соответственно в табл. 1, 2 и 3 вместе с их погрешностями. Поскольку планеты во всех системах открыты методом доплеровской спектроскопии, то для них известны только минимальные значения масс $M \sin I$, приведенные в массах Юпитера M_J , где I — угол наклона плоскости орбиты к картинной плоскости. Кроме того, известны большие полуоси орбит a , их эксцентриситеты e и периоды обращения планет P . Для обеих четырехпланетных систем дополнительно известны аргументы перигелиев орбит.

Все планетные системы обладают умеренными значениями эксцентриситетов орбит. Следует отметить, что трехпланетная система HD 39194 является компактной: расстояние всех планет в

апоастре с учетом максимально возможных значений эксцентриситетов не превышает 0.24 а.е.

Определим систему координат, в которой будет рассматриваться движение планет. В силу произвольности выбора основной плоскости планетной системы определим ее совпадающей в начальный момент времени с плоскостью орбиты внутренней планеты для систем HD 39194 и HD 141399. Таким образом, в начальный момент наклон орбит внутренних планет (HD 39194 b и HD 141399 b) по определению будет равен 0° . Если плоскость орбиты совпадает с основной плоскостью, то долгота восходящего узла не определена. Поэтому для определенности полагаем долготу восходящего узла равной 0° .

В системе HD 160691 самая внешняя планета является самой массивной. Очевидно, что в процессе орбитальной эволюции положение плоскости данной орбиты будет изменяться наименьшим образом. Поэтому определим основную плоскость планетной системы HD 160691 совпадающей в

Таблица 4. Оценки радиусов сходимости рядов, представляющих уравнения движения, по эксцентриситетам и наклонам орбит планет

Система	HD 39194			HD 141399				HD 160691			
Планета	B	c	d	b	c	d	e	c	d	b	e
R_e	0.42	0.19	0.34	0.22	0.26	0.15	0.52	0.66	0.15	0.29	0.52
$R_i, ^\circ$	49	22	40	26	31	17	63	80	18	34	63

начальный момент времени с плоскостью планеты HD 160691 e. Положим долготу восходящего узла орбиты этой планеты равной 0° . Наклоны орбит всех оставшихся планет в системах принимаются равными друг другу и варьируются в диапазоне от 0° до 45° с шагом 5° .

Различные пространственные конфигурации планет на орбитах достигаются варьированием как долгот восходящих узлов Ω , так и аргументов перигелиев ω . Для обеих четырехпланетных систем долготы восходящих узлов орбит варьируются с шагом 90° . В системе HD 141399 аргументы перигелия первой и второй планет варьируются с шагом 40° в пределах допустимых значений, аргумент перигелия третьей планеты — с шагом 30° , для четвертой — не варьируется. В системе HD 160691 варьируется только аргумент перигелия последней планеты, принимая три значения — минимальное, среднее и максимальное (так как он известен с большой ошибкой). В системе HD 39194 как аргументы перигелиев, так и долготы восходящих узлов варьируются с шагом 45° .

Все эксцентриситеты орбит планет принимаются поочередно равными минимальным, средним и максимально допустимым значениям в соответствии с табл. 1–3.

Массы планет выбираются равными своим минимальным значениям, без учета погрешности. Варьирование масс планет проводится только для системы HD 160691, путем изменения наклона основной плоскости системы к картинной плоскости. Большие полуоси орбит не варьируются.

В соответствии с [10, 11] вычислены оценки теоретических радиусов сходимости по эксцентриситетам R_e и по наклонам орбит R_i для рядов, представляющих уравнения движения планетных систем HD 39194, HD 141399 и HD 160691. Данные оценки приведены в табл. 4. Если значения эксцентриситетов и наклонов орбит планет лежат в пределах, указанных в табл. 4, то гарантируется сходимость рядов уравнений движения и, как следствие, применимость построенной теории движения в данных условиях. Оценки радиусов сходимости получены для номинальных значений больших полуосей и эксцентриситетов орбит, приведенных в табл. 1, 2 и 3 при условии, что возмущения

больших полуосей орбит близки к нулю (подтверждено оценками функций замены переменных для больших полуосей).

3. ОРБИТАЛЬНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМЫ HD 39194

Для системы HD 39194 построены карты экстремальных значений элементов орбит в зависимости от начальных орбитальных конфигураций планет для различных начальных значений наклонов и эксцентриситетов. Рассмотрим вначале эволюцию системы для значения массы звезды $M_* = 0.72M_\odot$.

На рис. 1, 2 и 3 в качестве примера представлены карты максимальных эксцентриситетов и наклонов орбит планет HD 39194 b, c и d соответственно. Рис. 1 соответствует случаю, когда начальные значения наклонов орбит двух внешних планет системы c и d равны $i_0 = 5^\circ$. Для случаев, представленных на рис. 2 и 3, начальные значения наклонов равны $i_0 = 10^\circ$ и $i_0 = 15^\circ$ соответственно. Начальные значения эксцентриситетов орбит $e_b = 0.2$, $e_c = 0.11$, $e_d = 0.2$.

На всех рисунках комбинации долгот восходящих узлов расположены по горизонтали, аргументы перигелиев — по вертикали. Внутри каждого участка с фиксированными значениями долготы узла Ω_c и аргумента перигелия ω_b указанные элементы орбит остальных планет варьируются во всем диапазоне с шагом 45° , что в итоге дает 32 768 комбинаций начальных условий.

Для начальных значений наклонов $i_0 = 0^\circ, 5^\circ$ характер распределения максимально достижимых значений эксцентриситетов орбит всех планет аналогичен показанному на рис. 1 для всех начальных значений эксцентриситетов. Как видно из рис. 1, области начальных значений, для которых рост эксцентриситетов наименьший (или наибольший), линейно смещаются вдоль значения аргумента перигелия второй планеты (HD 39194 c) с ростом долгот узлов второй и третьей планет (c и d). Для начальных значений наклонов $i_0 = 10^\circ$ распределение максимальных значений эксцентриситетов принимает характер “решетки”, в “ячейках” которой рост эксцентриситетов минимален, а в “узлах”

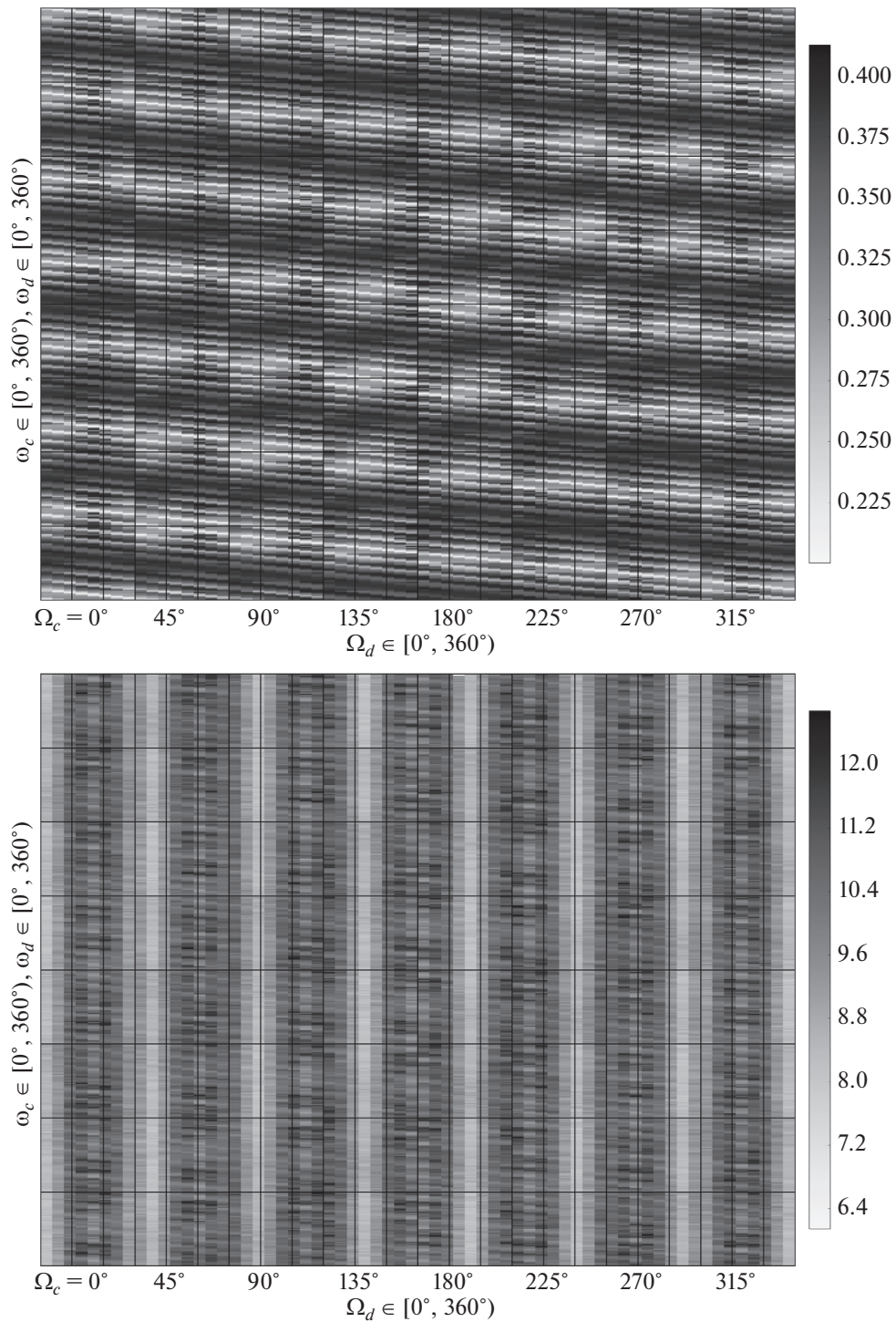


Рис. 1. Карты максимальных значений эксцентриситета (вверху) и наклона (внизу) орбиты планеты HD 39194 b для начальных значений наклонов двух внешних планет $i_0 = 5^\circ$ и начальных значений эксцентриситетов $e_b = 0.2$, $e_c = 0.11$, $e_d = 0.2$.

и на “границах” — максимален (см. рис. 2). Для значений $i_0 \geq 15^\circ$ минимальный и максимальный рост эксцентриситетов чередуются в зависимости от значений долгот восходящих узлов (см. рис. 3). Области минимального роста эксцентриситетов орбит

лежат около близких (равных) между собой начальных значений долгот восходящих узлов второй и третьей планет ($\Omega_c \approx \Omega_d$) — при выполнении этого условия взаимные начальные значения наклонов плоскостей орбит малы (равны). С ростом значения

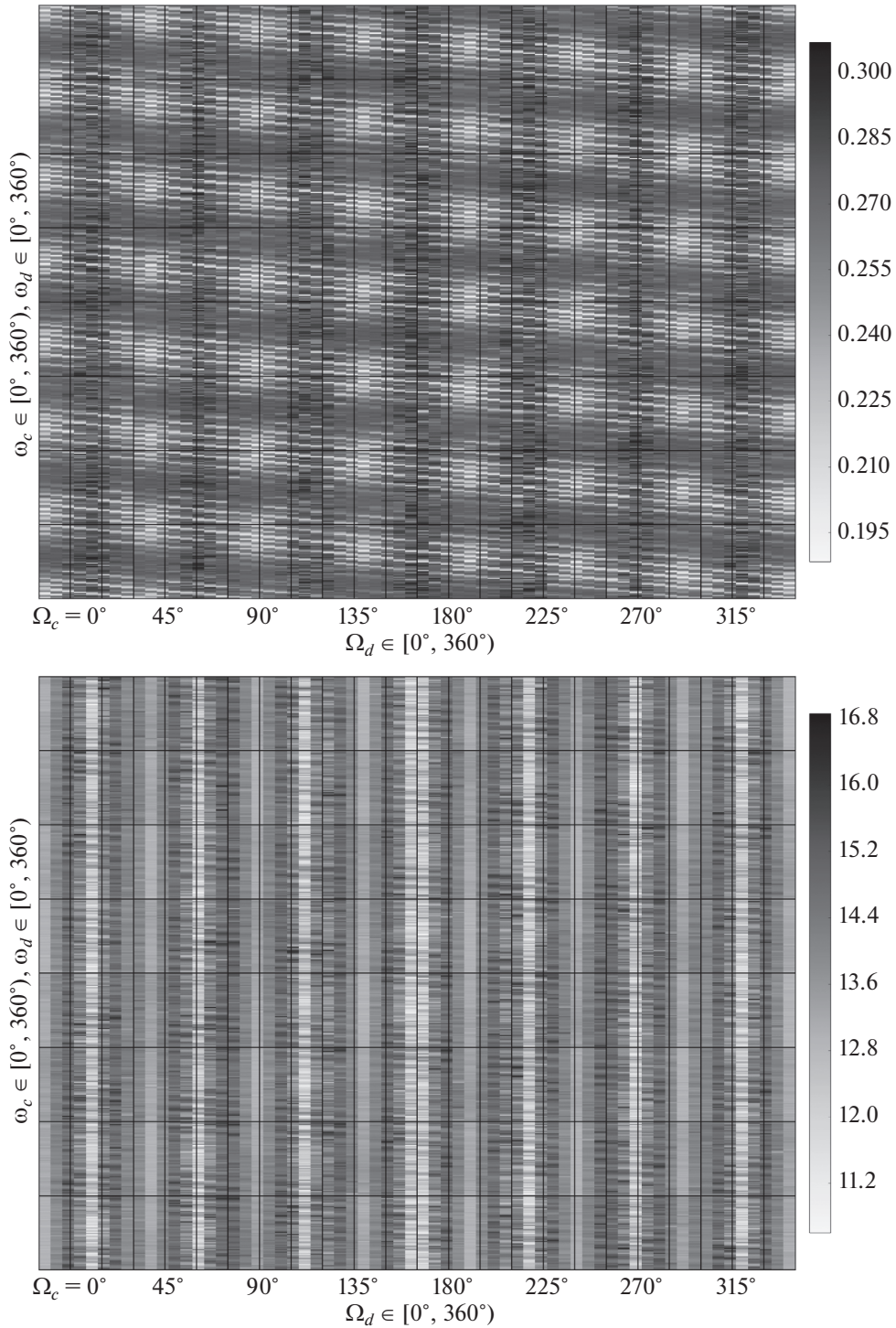


Рис. 2. Карты максимальных значений эксцентриситета (вверху) и наклона (внизу) орбиты планеты HD 39194 c для начальных значений наклонов двух внешних планет $i_0 = 10^\circ$ и начальных значений эксцентриситетов $e_b = 0.2$, $e_c = 0.11$, $e_d = 0.2$.

i_0 эти области сужаются и при $i_0 \geq 30^\circ$ полностью исчезают.

Характер распределения максимально достижимых значений наклона орбиты первой планеты (HD 39194 b) аналогичен представленному на

рис. 1 для всех допустимых значений i_0 . Области минимального роста наклона орбиты лежат вблизи равных между собой начальных значений долгот восходящих узлов второй и третьей планет ($\Omega_c \approx \Omega_d$). При $i_0 \geq 30^\circ$ эти области полностью

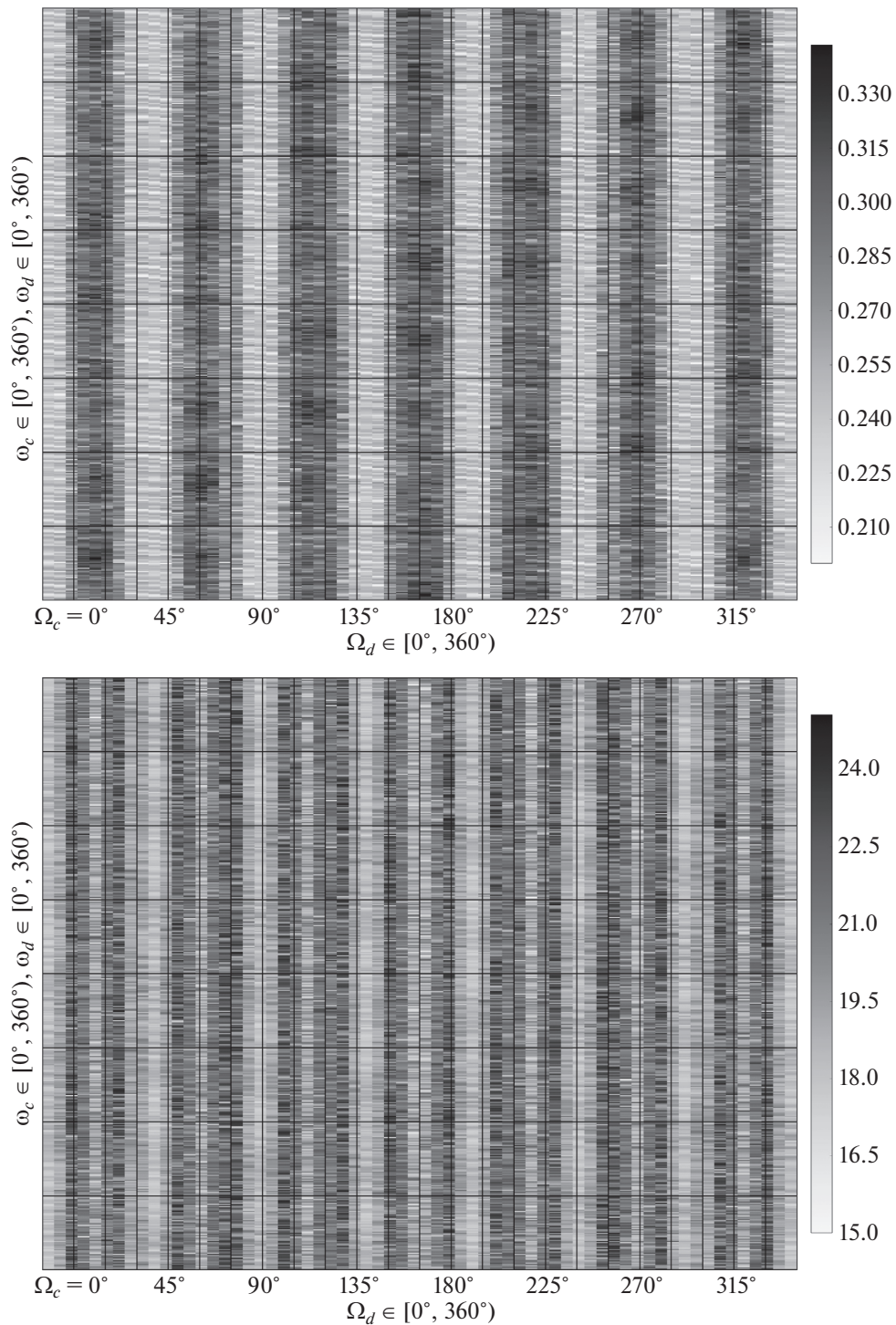


Рис. 3. Карты максимальных значений эксцентриситета (вверху) и наклона (внизу) орбиты планеты HD 39194 d для начальных значений наклонов двух внешних планет $i_0 = 15^\circ$ и начальных значений эксцентриситетов $e_b = 0.2$, $e_c = 0.11$, $e_d = 0.2$.

исчезают. Для второй и третьей планет области минимального роста наклонов орбит соответствует двум условиям $\Omega_c \approx \Omega_d$ и $\Omega_d \approx \Omega_c + 180^\circ$.

В табл. 5 в зависимости от начальных условий приведены максимально достижимые на интервале

моделирования значения эксцентриситетов e_{\max} и наклонов i_{\max} орбит планетной системы HD 39194.

Данные, приведенные в таблице, соответствуют начальным значениям долгот узлов и аргументов перигелиев, при которых, для одних и тех же

Таблица 5. Максимально достижимые значения средних эксцентриситетов и наклонов орбит планет системы HD 39194 для значения массы звезды $M_* = 0.72M_\odot$

$i_0, ^\circ$	b			c			d		
	e_0	e_{\max}	$i_{\max}, ^\circ$	e_0	e_{\max}	$i_{\max}, ^\circ$	e_0	e_{\max}	$i_{\max}, ^\circ$
0	0.1	0.115–0.178	0	0.104	0.104–0.107	0	0.04	0.040–0.122	0
	0.2	0.20–0.39	0	0.110	0.184–0.27	0	0.20	0.20–0.22	0
	0.3	0.39–0.62	0	0.116	0.28–0.44	0	0.36	0.36–0.41	0
5	0.1	0.114–0.198	11	0.104	0.104–0.135	7	0.04	0.040–0.123	7
	0.2	0.20–0.41	13	0.110	0.184–0.28	8	0.20	0.20–0.26	7
	0.3	0.39–0.64	17	0.116	0.28–0.45	9	0.36	0.36–0.42	7
10	0.1	0.114–0.26	22	0.104	0.104–0.167	15	0.04	0.040–0.147	13
	0.2	0.21–0.47	27	0.110	0.188–0.31	17	0.20	0.20–0.28	16
	0.3	0.39–0.68	43	0.116	0.28–0.47	23	0.36	0.36–0.43	23
15	0.1	0.128–0.49	34	0.104	0.104–0.29	23	0.04	0.048–0.26	21
	0.2	0.20–0.59	40	0.110	0.188–0.38	27	0.20	0.20–0.34	25
	0.3	0.40–0.79	53	0.116	0.29–0.50	35	0.36	0.36–0.47	32
20	0.1	0.147–0.66	45	0.104	0.104–0.41	30	0.04	0.056–0.36	28
	0.2	0.20–0.75	51	0.110	0.191–0.47	34	0.20	0.20–0.41	31
	0.3	0.40–0.95	69	0.116	0.31–0.58	40	0.36	0.36–0.53	36
25	0.1	0.194–0.87	61	0.104	0.105–0.54	38	0.04	0.082–0.49	34
	0.2	0.30–0.96	71	0.110	0.21–0.60	40	0.20	0.20–0.51	37
	0.3	0.50–1	>90	0.116	0.30–0.83	51	0.36	0.36–0.80	44
30	0.1	0.42–1	>90	0.104	0.23–0.80	47	0.04	0.157–0.78	42
	0.2	0.38–1	>90	0.110	0.25–0.83	55	0.20	0.20–0.77	50
	0.3	0.52–1	>90	0.116	0.34–0.84	61	0.36	0.36–0.83	53
35	0.1	0.47–1	>90	0.104	0.23–0.83	60	0.04	0.145–0.81	54
	0.2	0.45–1	>90	0.110	0.26–0.85	59	0.20	0.20–0.84	55
	0.3	0.53–1	>90	0.116	0.39–0.87	68	0.36	0.36–0.85	58
40	0.1	0.40–1	>90	0.104	0.20–0.89	64	0.04	0.147–0.88	59
	0.2	0.49–1	>90	0.110	0.29–0.91	67	0.20	0.20–0.88	61
	0.3	0.59–1	>90	0.116	0.39–0.95	73	0.36	0.36–0.93	65
45	0.1	0.20–1	>90	0.104	0.13–0.95	73	0.04	0.105–0.93	69
	0.2	0.51–1	>90	0.110	0.29–0.97	78	0.20	0.20–0.95	71
	0.3	0.63–1	>90	0.116	0.40–0.99	83	0.36	0.36–0.98	75

начальных значений наклонов и эксцентриситетов, реализуются наименьшие и наибольшие значения e_{\max} и наибольшие значения i_{\max} . Анализ диапазонов значений e_{\max} при $i_0 \geq 25^\circ$ в табл. 5 позволяет

сделать вывод, что существуют комбинации начальных значений долгот восходящих узлов и аргументов перигелиев, при которых эксцентриситеты орбит сохраняют малые и умеренные значения,

Таблица 6. Сравнение максимально достижимых значений средних эксцентриситетов и наклонов орбит планет системы HD 39194 для различных масс звезды

$i_0, ^\circ$	M_*, M_\odot	b		c		d	
		e_{\max}	$i_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$i_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$i_{\max}, ^\circ$
0	0.72	0.20–0.39	0	0.18–0.27	0	0.20–0.22	0
	0.85	0.20–0.39	0	0.18–0.27	0	0.20–0.25	0
5	0.72	0.20–0.41	13	0.18–0.28	8	0.20–0.26	7
	0.85	0.20–0.41	12	0.18–0.28	8	0.20–0.25	7
10	0.72	0.21–0.47	27	0.19–0.31	17	0.20–0.28	16
	0.85	0.21–0.47	25	0.19–0.31	16	0.20–0.28	15
15	0.72	0.20–0.59	40	0.19–0.38	27	0.20–0.34	25
	0.85	0.20–0.59	40	0.19–0.38	26	0.20–0.34	25
20	0.72	0.20–0.75	51	0.19–0.47	34	0.20–0.41	31
	0.85	0.20–0.72	49	0.19–0.46	33	0.21–0.41	30
25	0.72	0.30–0.96	71	0.21–0.60	40	0.20–0.51	37
	0.85	0.36–0.91	64	0.21–0.57	40	0.20–0.51	36
30	0.72	0.38–1	>90	0.25–0.83	55	0.20–0.77	50
	0.85	0.43–1	87	0.28–0.67	47	0.26–0.65	44
35	0.72	0.45–1	>90	0.26–0.85	59	0.20–0.84	55
	0.85	0.46–1	>90	0.26–0.78	54	0.20–0.76	50
40	0.72	0.49–1	>90	0.29–0.91	67	0.20–0.88	61
	0.85	0.52–1	>90	0.33–0.87	62	0.21–0.85	56
45	0.72	0.51–1	>90	0.29–0.97	78	0.20–0.95	71
	0.85	0.58–1	>90	0.31–0.94	75	0.20–0.91	66

обеспечивая устойчивую динамическую эволюцию системы. Эти области соответствуют условию $\Omega_c \approx \Omega_d$.

В то же время существуют комбинации начальных условий, приводящие к значительному росту эксцентриситетов и, возможно, к флипам орбит (переходу от прямого движения к обратному). Следует помнить, что флипы здесь проявляются как артефакт аналитической теории, поскольку в данных условиях значения наклонов орбит превышают значения радиусов сходимости рядов уравнений движения (табл. 4), внутри которых функции сохраняют свои аналитические свойства. Реальная эволюция системы в этом случае, в том числе и действительное наличие флипов, может быть изучена только численными методами.

Дополнительно проведено моделирование орбитальной эволюции системы HD 39194 для значения массы звезды $M_* = 0.85M_\odot$. При этом значения долгот восходящих узлов и аргументов пе-

рицентров орбит варьировались с шагом 90° для одного набора начальных значений эксцентриситетов — $e_b = 0.2$, $e_c = 0.11$, $e_d = 0.2$. В табл. 6 дано сравнение значений e_{\max} и i_{\max} для двух значений масс звезды — 0.72 и $0.85M_\odot$. Из табл. 6 видно, что для значений $i_0 \leq 25^\circ$ максимально достижимые значения элементов орбит совпадают для разных значений масс центральной звезды.

4. ОРБИТАЛЬНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМЫ HD 141399

На рис. 4–7 представлены карты максимальных эксцентриситетов орбит планет HD 141399 b (рис. 4), HD 141399 c (рис. 5), HD 141399 d (рис. 6) и HD 141399 e (рис. 7). Данные на рис. 4–7 соответствуют случаю, когда начальные значения наклонов орбит трех внешних планет системы c, d и e равны $i_0 = 15^\circ$. Начальные значения эксцентриситетов орбит — $e_b = 0.04$, $e_c = 0.048$, $e_d = 0.074$,

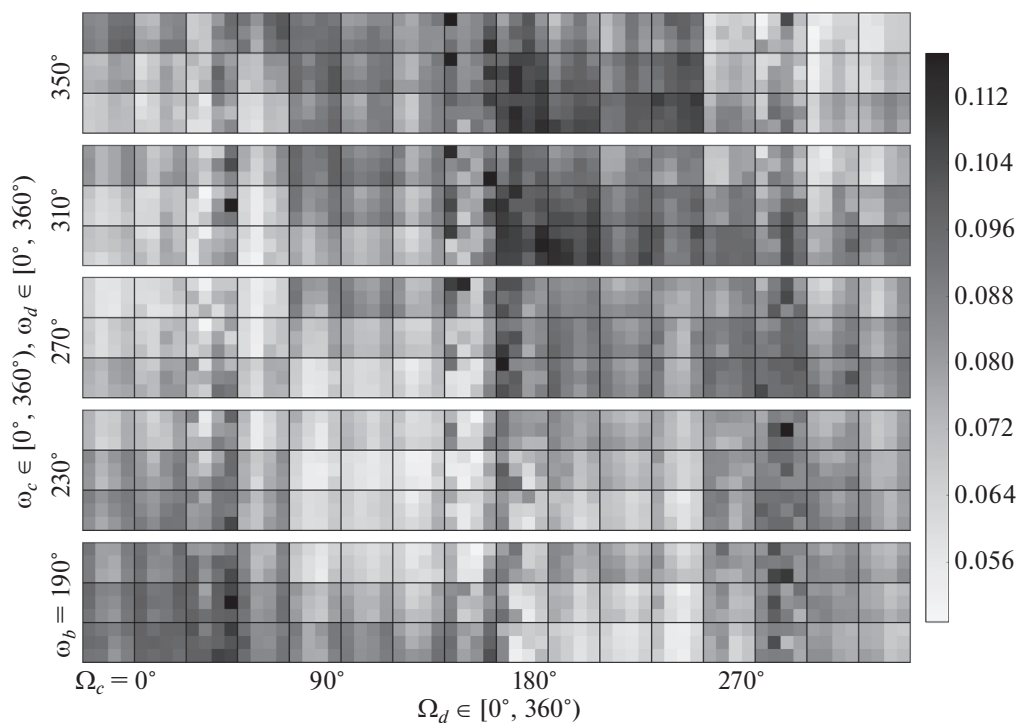


Рис. 4. Карта максимальных значений эксцентриситетов орбиты планеты HD 141399 b для начальных значений наклонов трех внешних планет $i_0 = 15^\circ$ и начальных значений эксцентриситетов $e_b = 0.04$, $e_c = 0.048$, $e_d = 0.074$, $e_e = 0.26$.

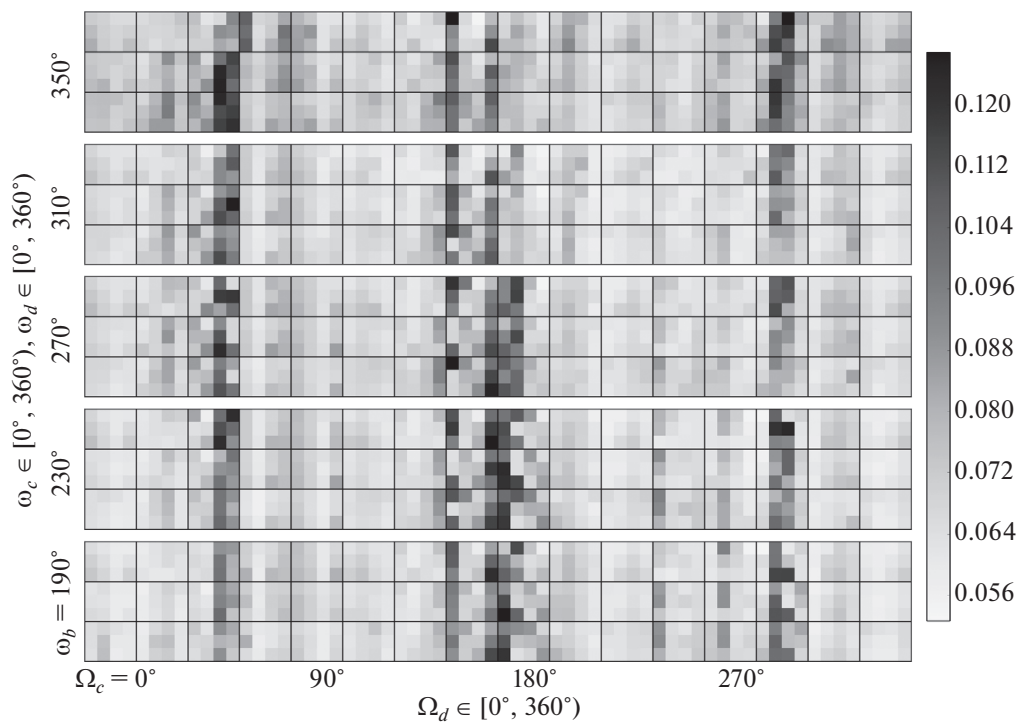


Рис. 5. Карта максимальных значений эксцентриситетов орбиты планеты HD 141399 c для начальных значений наклонов трех внешних планет $i_0 = 15^\circ$ и начальных значений эксцентриситетов $e_b = 0.04$, $e_c = 0.048$, $e_d = 0.074$, $e_e = 0.26$.

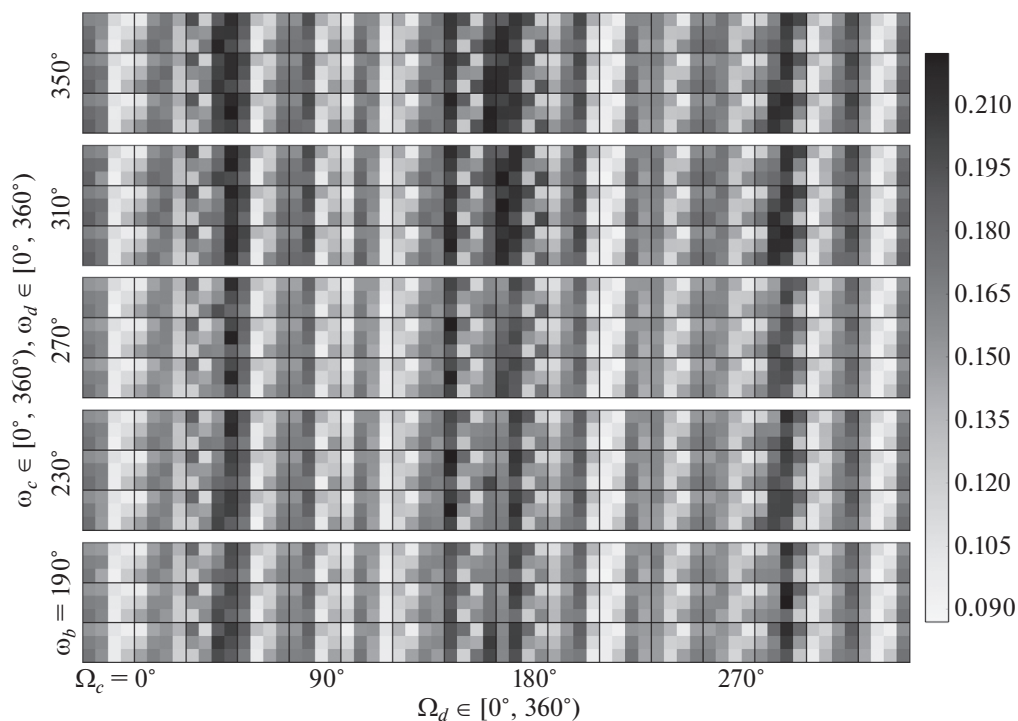


Рис. 6. Карта максимальных значений эксцентриситетов орбиты планеты HD 141399 d для начальных значений наклонов трех внешних планет $i_0 = 15^\circ$ и начальных значений эксцентриситетов $e_b = 0.04$, $e_c = 0.048$, $e_d = 0.074$, $e_e = 0.26$.

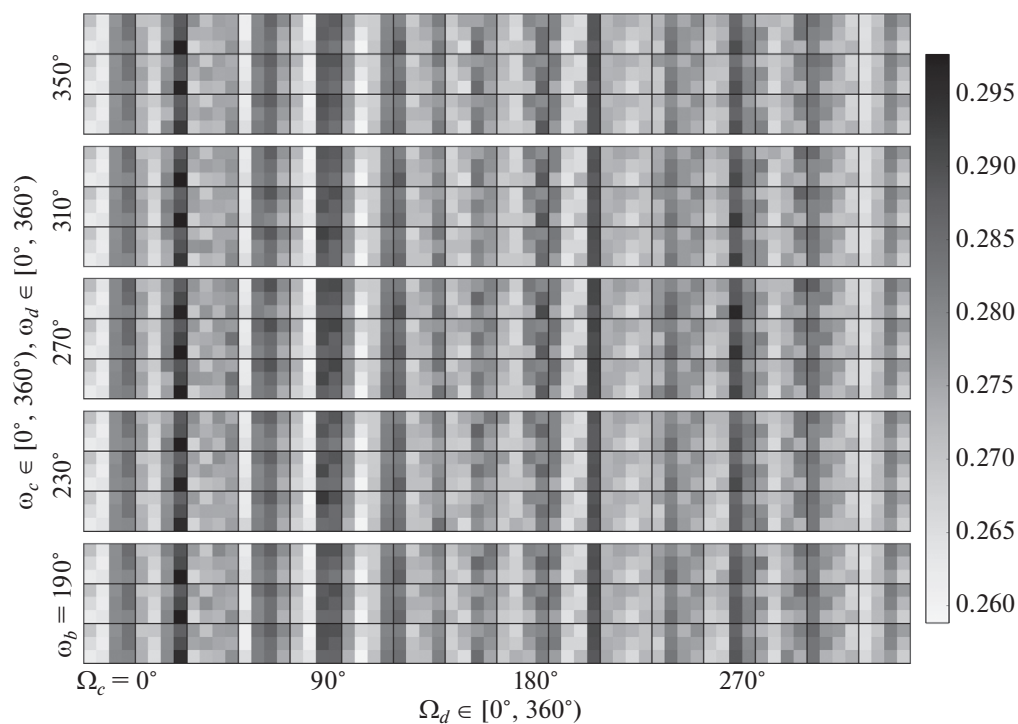


Рис. 7. Карта максимальных значений эксцентриситетов орбиты планеты HD 141399 e для начальных значений наклонов трех внешних планет $i_0 = 15^\circ$ и начальных значений эксцентриситетов $e_b = 0.04$, $e_c = 0.048$, $e_d = 0.074$, $e_e = 0.26$.

$e_e = 0.26$. Как и ранее, комбинации долгот восходящих узлов орбит расположены по горизонтали, аргументы перицентров — по вертикали.

Для начальных значений наклонов $i_0 \leq 15^\circ$ распределение максимально достижимых значений эксцентриситетов орбит относительно начальных значений долгот узлов и перицентров орбит аналогично показанному на рис. 4–7 для всех начальных значений эксцентриситетов. Для значений $i_0 \leq 20^\circ$ области минимального роста наклона орбиты лежат вблизи равных между собой начальных значений долгот восходящих узлов второй и третьей планет ($\Omega_c \approx \Omega_d$). При $i_0 \geq 25^\circ$ эти области полностью исчезают.

В табл. 7 в зависимости от начальных условий приведены максимально достижимые на интервале моделирования значения эксцентриситетов e_{\max} и наклонов i_{\max} орбит планетной системы HD 141399. При $i_0 \leq 15^\circ$ эксцентриситеты орбит всех планет сохраняются малыми (или умеренными для планеты HD 141399 e в случае высокой начальной эксцентриситетности ее орбиты) на всем интервале времени 1 млн. лет для всех начальных условий, что обеспечивает динамическую устойчивость планетной системы. При $i_0 = 20^\circ$ эксцентриситеты орбит могут как сохранять свои малые значения, так и достигать экстремально больших значений, в зависимости от соответствующих комбинаций начальных значений долгот восходящих узлов и аргументов перицентров. В случае $i_0 = 20^\circ$ подавляющее большинство начальных условий приводят к значительному росту эксцентриситета и, возможно, к флипам орбиты ближайшей к звезде планеты.

5. ОРБИТАЛЬНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМЫ HD 160691

В табл. 8 в зависимости от начальных условий приведены максимально достижимые значения эксцентриситетов и наклонов орбит планетной системы HD 160691.

Начальное значение наклона орбиты внешней планеты системы (HD 160691 e) не варьируется и равно нулю для всех комбинаций начальных условий. Эксцентриситет внутренней планеты системы (HD 160691 c) сохраняет умеренные значения при $i_0 \leq 10^\circ$ для всех начальных значений эксцентриситетов орбит. При $i_0 \geq 15^\circ$ для трех внешних планет системы существуют комбинации начальных значений долгот восходящих узлов и аргументов перицентров, при которых эксцентриситеты орбит сохраняют свои малые и умеренные значения на всем интервале численного интегрирования. Также в случае $i_0 \geq 15^\circ$ существуют начальные условия, приводящие к значительному росту эксцентриситета и наклона орбиты ближайшей к звезде планеты

(в том числе к возможным флипам орбит). Отметим, что для случая $i_0 = 45^\circ$, как следует из табл. 8, существуют начальные условия, при которых эксцентриситет орбиты ближайшей к звезде планеты (HD 160691 c) сохраняет малые значения на всем интервале моделирования.

В табл. 9 приведены максимальные значения средних эксцентриситетов e_{\max} и наклонов орбит i_{\max} для различных масс планет. Варьирование масс планет происходит через изменение значения угла наклона I основной плоскости системы к картинной плоскости, входящей в комбинацию $M \sin I$, значение которой известно. Данные приведены для начальных значений эксцентриситетов орбит $e_c = 0.172$, $e_d = 0.0666$, $e_b = 0.128$, $e_e = 0.0985$. Различные значения угла I соответствуют следующим массам планет (в массах Юпитера):

— $M_c = 0.038$, $M_d = 0.603$, $M_b = 1.935$, $M_e = 2.095$ при $I = 60^\circ$;

— $M_c = 0.066$, $M_d = 1.044$, $M_b = 3.352$, $M_e = 3.628$ при $I = 30^\circ$;

— $M_c = 0.128$, $M_d = 2.016$, $M_b = 6.476$, $M_e = 7.009$ при $I = 15^\circ$.

Из анализа данных в табл. 9 видно, что орбиты двух внешних наиболее массивных планет системы (b и e) динамически устойчивы в широком диапазоне масс. Увеличение их масс приводит к тому, что орбиты первой и второй планет в системе (c и d) становятся менее устойчивыми при значениях $i_0 \leq 10^\circ$ — происходит рост эксцентриситетов орбит до более высоких значений.

6. ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ

Осредненный гамильтониан планетной задачи во втором приближении можно представить в координатах Якоби в виде суммы $h = h_0 + \mu h_1 + \mu^2 h_2$, где h_0 — невозмущенный (кеплеровский) гамильтониан задачи, μh_1 — слагаемые первого приближения возмущающей функции, $\mu^2 h_2$ — слагаемые второго приближения возмущающей функции, μ — малый параметр задачи. В слагаемых второго приближения естественным образом возникают знаменатели [7], представляющие собой линейные комбинации средних частот движения планет вида $(n_i \nu_i - n_j \nu_j)^m$, где $n_i, n_j \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $\nu_k = \sqrt{\kappa_k^2 / a_k^3}$ — средняя частота движения k -той планеты, κ_k^2 — ее гравитационный параметр, a_k — большая полуось орбиты. В случае линейной соизмеримости средних частот движения планет значения некоторых знаменателей становятся равными нулю (или достаточно близкими к нулю), что приводит к росту значений слагаемых гамильтониана, содержащих данные знаменатели.

Таблица 7. Максимально достижимые значения средних эксцентриситетов и наклонов орбит планет системы HD 141399

$i_0, ^\circ$	B		c		d		e	
	e_{\max}	$i_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$i_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$i_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$i_{\max}, ^\circ$
Начальные значения эксцентриситетов: $e_b = 0.02, e_c = 0.039, e_d = 0.049, e_e = 0.04$								
0	0.024–0.088	0	0.040–0.058	0	0.053–0.067	0	0.038–0.067	0
5	0.023–0.088	13	0.042–0.058	10	0.053–0.068	8	0.038–0.067	8
10	0.021–0.085	26	0.040–0.059	19	0.054–0.068	15	0.038–0.067	16
15	0.020–0.085	38	0.040–0.079	29	0.052–0.081	23	0.038–0.073	24
20	0.020–0.90	73	0.045–0.58	39	0.055–0.46	31	0.038–0.47	33
25	0.53–1	>90	0.33–0.71	49	0.22–0.59	38	0.082–0.61	41
30	0.52–1	>90	0.34–0.82	63	0.153–0.70	46	0.065–0.73	49
35	0.58–1	>90	0.36–0.91	71	0.185–0.81	54	0.127–0.84	57
40	0.73–1	>90	0.62–0.97	81	0.56–0.89	62	0.39–0.90	67
45	0.90–1	>90	0.63–1	>90	0.61–0.93	73	0.36–0.96	77
Начальные значения эксцентриситетов: $e_b = 0.04, e_c = 0.048, e_d = 0.074, e_e = 0.26$								
0	0.035–0.112	0	0.055–0.085	0	0.081–0.183	0	0.26–0.28	0
5	0.034–0.111	13	0.055–0.085	10	0.082–0.184	8	0.26–0.28	8
10	0.033–0.109	25	0.055–0.085	19	0.081–0.190	15	0.26–0.28	16
15	0.030–0.117	38	0.053–0.149	29	0.087–0.24	23	0.26–0.30	25
20	0.038–0.94	82	0.060–0.63	41	0.093–0.51	33	0.26–0.53	36
25	0.56–1	>90	0.34–0.74	51	0.22–0.62	41	0.26–0.65	44
30	0.60–1	>90	0.41–0.84	61	0.33–0.72	49	0.26–0.75	51
35	0.71–1	>90	0.44–0.92	71	0.28–0.82	56	0.28–0.86	61
40	0.61–1	>90	0.39–0.98	83	0.38–0.89	65	0.27–0.92	71
45	0.73–1	>90	0.37–1	>90	0.29–0.96	>90	0.26–0.98	81
Начальные значения эксцентриситетов: $e_b = 0.06, e_c = 0.057, e_d = 0.099, e_e = 0.48$								
0	0.051–0.145	0	0.073–0.123	0	0.187–0.35	0	0.48–0.50	0
5	0.050–0.144	13	0.075–0.125	9	0.186–0.35	8	0.48–0.50	9
10	0.051–0.143	25	0.075–0.128	19	0.184–0.39	16	0.48–0.50	17
15	0.053–0.182	39	0.076–0.23	29	0.166–0.43	24	0.48–0.51	28
20	0.074–1	>90	0.094–0.74	50	0.206–0.63	39	0.48–0.63	42
25	0.55–1	>90	0.35–0.85	60	0.30–0.69	44	0.48–0.70	50
30	0.60–1	>90	0.31–0.91	76	0.24–0.80	53	0.48–0.84	56
35	0.61–1	>90	0.50–0.98	79	0.35–0.85	61	0.48–0.86	64
40	0.85–1	>90	0.68–1	>90	0.55–0.93	67	0.48–0.97	73
45	0.61–1	>90	0.31–1	>90	0.40–0.96	75	0.48–0.98	82

Таблица 8. Максимально достижимые значения средних эксцентриситетов и наклонов орбит планет системы HD 160691

$i_0, ^\circ$	c		d		b		e	
	e_{\max}	$i_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$i_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$i_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$i_{\max}, ^\circ$
Начальные значения эксцентриситетов: $e_c = 0.132$, $e_d = 0.0544$, $e_b = 0.111$, $e_e = 0.0358$								
0	0.018–0.28	0	0.107–0.25	0	0.108–0.134	0	0.038–0.049	0
5	0.018–0.28	15	0.105–0.25	11	0.108–0.134	6	0.038–0.050	4
10	0.020–0.31	28	0.079–0.25	23	0.109–0.136	11	0.038–0.055	8
15	0.028–0.78	82	0.057–0.46	37	0.110–0.23	17	0.039–0.109	11
20	0.092–1	>90	0.128–0.66	47	0.111–0.31	23	0.039–0.21	15
25	0.141–1	>90	0.129–0.81	59	0.112–0.41	28	0.039–0.25	19
30	0.78–1	>90	0.131–0.82	71	0.117–0.48	34	0.039–0.32	23
35	0.70–1	>90	0.135–0.96	85	0.124–0.56	39	0.038–0.35	26
40	0.48–1	>90	0.142–1	>90	0.110–0.65	44	0.038–0.39	30
45	0.064–1	>90	0.153–1	>90	0.110–0.68	50	0.038–0.31	34
Начальные значения эксцентриситетов: $e_c = 0.172$, $e_d = 0.0666$, $e_b = 0.128$, $e_e = 0.0985$								
0	0.050–0.33	0	0.133–0.29	0	0.129–0.156	0	0.101–0.114	0
5	0.051–0.33	15	0.131–0.29	11	0.129–0.156	6	0.101–0.114	4
10	0.057–0.34	30	0.093–0.29	23	0.130–0.165	11	0.101–0.119	8
15	0.061–0.83	85	0.057–0.51	39	0.129–0.24	19	0.102–0.150	11
20	0.088–1	>90	0.156–0.68	49	0.130–0.34	24	0.102–0.21	15
25	0.181–1	>90	0.156–0.84	61	0.130–0.44	29	0.102–0.24	19
30	0.30–1	>90	0.158–0.86	72	0.132–0.48	34	0.102–0.32	23
35	0.74–1	>90	0.163–0.95	86	0.135–0.56	39	0.101–0.39	27
40	0.54–1	>90	0.173–1	>90	0.128–0.65	44	0.102–0.43	30
45	0.116–1	>90	0.189–1	>90	0.125–0.73	51	0.102–0.46	34
Начальные значения эксцентриситетов: $e_c = 0.212$, $e_d = 0.0788$, $e_b = 0.145$, $e_e = 0.1612$								
0	0.081–0.37	0	0.153–0.33	0	0.145–0.183	0	0.164–0.178	0
5	0.082–0.37	15	0.144–0.33	11	0.145–0.184	6	0.164–0.179	4
10	0.092–0.39	30	0.105–0.33	23	0.145–0.20	11	0.164–0.184	8
15	0.095–0.84	87	0.099–0.60	43	0.147–0.31	21	0.164–0.20	12
20	0.131–1	>90	0.182–0.73	54	0.148–0.37	26	0.164–0.26	16
25	0.41–1	>90	0.182–0.86	64	0.147–0.46	31	0.164–0.29	19
30	0.82–1	>90	0.183–0.88	72	0.149–0.54	36	0.165–0.37	23
35	0.75–1	>90	0.188–0.98	87	0.147–0.60	41	0.165–0.41	27
40	0.60–1	>90	0.20–1	>90	0.147–0.67	45	0.164–0.44	31
45	0.197–1	>90	0.22–1	>90	0.142–0.74	51	0.164–0.44	34

Таблица 9. Сравнение максимально достижимых значений средних эксцентриситетов орбит планет системы HD 160691 для различных масс планет

$i_0, ^\circ$	$i, ^\circ$	c		d		b		e	
		e_{\max}	$i_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$i_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$i_{\max}, ^\circ$	e_{\max}	$i_{\max}, ^\circ$
0–10	15	0.17–0.79	43	0.20–0.52	25	0.15–0.23	12	0.11–0.13	8
	30	0.05–0.50	22	0.12–0.37	23	0.13–0.18	11	0.10–0.12	8
	60	0.04–0.37	28	0.10–0.30	23	0.13–0.17	11	0.10–0.12	8
15	15	0.18–0.95	>90	0.23–0.52	39	0.15–0.27	19	0.11–0.17	11
	30	0.06–1	>90	0.12–0.53	40	0.13–0.25	19	0.10–0.17	11
	60	0.06–0.80	81	0.07–0.52	39	0.13–0.27	18	0.10–0.16	11
20	15	0.19–1	>90	0.23–0.64	52	0.15–0.29	26	0.11–0.17	16
	30	0.08–1	>90	0.12–0.69	50	0.13–0.34	24	0.10–0.20	15
	60	0.06–1	>90	0.15–0.66	49	0.13–0.27	24	0.10–0.23	15
25	15	0.26–1	>90	0.23–0.79	61	0.15–0.42	30	0.11–0.25	19
	30	0.21–1	>90	0.12–0.82	60	0.13–0.43	29	0.10–0.27	19
	60	0.31–1	>90	0.15–0.83	60	0.13–0.42	29	0.10–0.27	19
30	15	0.47–1	>90	0.23–0.91	74	0.15–0.49	35	0.11–0.33	23
	30	0.31–1	>90	0.12–0.82	74	0.13–0.51	34	0.10–0.34	23
	60	0.52–1	>90	0.15–0.93	72	0.13–0.50	34	0.10–0.32	23

Таблица 10. Знаменатели, входящие в слагаемые осредненного гамильтониана задачи

$m = 1$	$m = 1$	$m = 1, 2$	$m = 1, 2$	$m = 1, 2$	$m = 1, 2$
$(\nu_i - 3\nu_j)^m$	$(3\nu_i - \nu_j)^m$	$(\nu_k)^m$	$(\nu_i - \nu_j)^m$	$(5\nu_i - 6\nu_j)^m$	$(6\nu_i - 5\nu_j)^m$
$(3\nu_i - 5\nu_j)^m$	$(5\nu_i - 3\nu_j)^m$	$(\nu_i - 2\nu_j)^m$	$(2\nu_i - \nu_j)^m$	$(6\nu_i - 7\nu_j)^m$	$(7\nu_i - 6\nu_j)^m$
$(5\nu_i - 7\nu_j)^m$	$(7\nu_i - 5\nu_j)^m$	$(2\nu_i - 3\nu_j)^m$	$(3\nu_i - 2\nu_j)^m$	$(7\nu_i - 8\nu_j)^m$	$(8\nu_i - 7\nu_j)^m$
$(7\nu_i - 9\nu_j)^m$	$(9\nu_i - 7\nu_j)^m$	$(3\nu_i - 4\nu_j)^m$	$(4\nu_i - 3\nu_j)^m$	$(8\nu_i - 9\nu_j)^m$	$(9\nu_i - 8\nu_j)^m$
$(9\nu_i - 11\nu_j)^m$	$(11\nu_i - 9\nu_j)^m$	$(4\nu_i - 5\nu_j)^m$	$(5\nu_i - 4\nu_j)^m$	$(9\nu_i - 10\nu_j)^m$	$(10\nu_i - 9\nu_j)^m$

Построенная теория движения предполагает, что вклад возмущающей функции в значение гамильтониана в каждом последующем приближении теории (первом, втором и т.д.) пропорционален малому параметру задачи μ в соответствующей степени (первой, второй и т.д.). Если разность между значениями возмущающей функции в первом приближении теории μh_1 и во втором приближении теории $\mu^2 h_2$ превышает величину заведомо большую малого параметра, например, $\sqrt{\mu}$, то это

может свидетельствовать о наличии резонанса, тем более сильного, чем больше значение данной разности. Таким образом, используемая нами теория движения может оказаться неприменимой вблизи резонанса средних движений ввиду экстремального роста значений некоторых слагаемых гамильтониана. Отметим, что значение малого параметра для всех рассматриваемых планетных систем выбрано равным $\mu = 0.001$.

Ввиду усечения рядов, представляющих разложение гамильтониана задачи, до заданных степеней по эксцентрическим и облическим элементам второй системы Пуанкаре, для исследования орбитальной эволюции нами используется конкретная реализация теории движения для заданного набора знаменателей. Список знаменателей, входящих в слагаемые гамильтониана задачи в рамках настоящей теории движения, приведен в табл. 10. Индексы средних частот пробегают значения $1 \leq i < j \leq 4, 1 \leq k \leq 4$.

Для рассматриваемых планетных систем был выполнен поиск резонансных областей и определены их границы по значениям масс планет и больших полуосей орбит. Для каждого знаменателя в слагаемых гамильтониана задачи проводится варьирование масс и больших полуосей орбит планет, средние движения которых входят в линейную комбинацию знаменателя. Большие полуоси орбит планет варьируются в пределах наблюдательных погрешностей (если таковые имеются), приведенных в табл. 1, 2 и 3, и принимаются равными своим минимальным, средним и максимально возможным значениям. Массы планет варьируются в диапазоне от минимально возможных (см. табл. 1, 2 и 3) до максимально допустимых значений (не более 13 масс Юпитера — теоретический предел массы планеты). Большие полуоси орбит и массы планет, частоты которых не входят в знаменатели, не варьируются. При оценке значений возмущающей функции эксцентрические и облические элементы орбит принимаются равными своим максимально допустимым значениям — в определении данных элементов [2] тригонометрическая часть принимается равной единице, а массы — максимально возможными. Это позволяет дать оценку возмущающей функции сверху.

Рассмотрим далее критерии поиска резонансов, связанные со знаменателями.

1. Уравнение $(n_i \nu_i - n_j \nu_j) = 0$, где $n_i, n_j = \text{const}$, задает пересечение плоскости $z = n_i \nu_i - n_j \nu_j$ с плоскостью $z = 0$, что соответствует условию резонанса. Если при варьировании масс и больших полуосей орбит и, как следствие, средних частот ν_i, ν_j происходит смена знака величины $n_i \nu_i - n_j \nu_j$, то это означает переход через точный резонанс.

2. Уравнение $(n_i \nu_i - n_j \nu_j)^2 = 0$, где $n_i, n_j = \text{const}$, задает прямую пересечения параболы $z = (n_i \nu_i - n_j \nu_j)^2$ и касательной к нему плоскости $z = 0$, что соответствует условию резонанса. Если при варьировании средних частот ν_i и ν_j происходит сначала убывание, а затем возрастание (или наоборот) величины $n_i \nu_i - n_j \nu_j$, то это говорит о переходе через точный

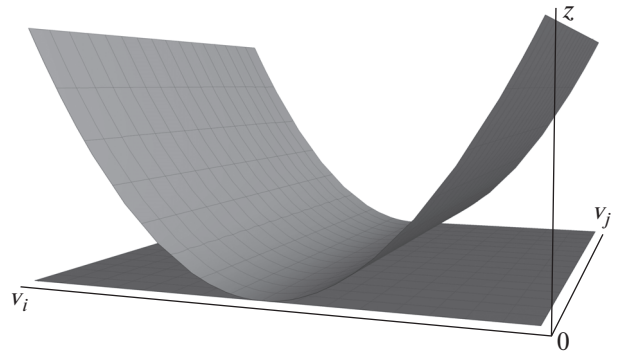


Рис. 8. Геометрическая трактовка критерия № 2.

резонанс. Настоящий критерий введен по следующим соображениям. Разность частот $n_i \nu_i - n_j \nu_j$ в знаменателе может быть недостаточно мала и соответствующее слагаемое не будет резонансным. Квадрат разности $(n_i \nu_i - n_j \nu_j)^2$ может стать уже достаточно малым для этого. На рис. 8 показана геометрическая трактовка данного критерия (критерий № 1 геометрически очевиден). Плоскость $\nu_i \nu_j$ является касательной к параболическому цилиндру. Пересечение обеих поверхностей происходит вдоль прямой $\nu_i = k \nu_j$, где $k = n_j / n_i$. Если значения частот средних движений лежат на данной прямой, то это соответствует условию точного резонанса.

3. Если критерии 1 и 2 не выполняются, то область точного резонанса лежит вне области определения (варьирования) больших полуосей орбит и масс планет. Далее для всех значений варьируемых параметров вычисляется величина $\Delta = |\mu h_1 / \mu^2 h_2|$. Случаи, в которых $\Delta > \sqrt{\mu}$, объясняются влиянием резонанса в средних движениях планет.

Следуя приведенным выше критериям (критерии 1 и 2 не выполнялись нигде в области варьируемых параметров), найдены следующие резонансные соотношения частот в системах HD 141399 и HD 160691, приведенные соответственно в табл. 11 и 12. В первых двух столбцах табл. 11 и 12 указаны значения больших полуосей орбит планет, в третьем столбце даны диапазоны масс планет, приведенные в массах Юпитера M_J , в последнем столбце приведены соотношения частот, линейные комбинации которых близки к нулю для указанных в предыдущих столбцах параметров.

Для системы HD 141399 в табл. 11 приводится только одно значение большой полуоси внешней планеты (минимально возможное с учетом наблюдательной ошибки), так как для остальных варьируемых значений большой полуоси малые знаменатели не появляются. Как видно из табл. 11, для минимальных значений масс планет и средних

Таблица 11. Положение резонансных областей в планетной системе HD 141399

a_i , а.е.	a_j , а.е.	Диапазоны масс, M_J	$n_i : n_j$
$i = 1, j = 2$ (внутренняя пара планет)			
0.404	0.669	$m_1 = 0.451, m_2 \geq 7$	1 : 2
	0.689	$m_1 = 0.451, m_2 \geq 7$	1 : 1, 1 : 2, 2 : 3
	0.709	$m_1 = 0.451, m_2 \approx 13$	1 : 1, 1 : 2, 2 : 3
0.415	0.669	$m_1 \leq 7, m_2 \leq 13$ или $m_1, m_2 \approx 13$	1 : 2
		$m_1 \geq 7, m_2 = 1.33$ или $m_1, m_2 \approx 13$	1 : 1, 2 : 3
		$m_1 \approx 13, m_2 = 1.33$	3 : 4
0.426	0.689	$m_1 = 0.451, m_2 \geq 7$	1 : 1, 1 : 2
	0.709	$m_1 = 0.451, m_2 \geq 7$	1 : 1, 1 : 2, 2 : 3, 3 : 4
	0.669	$m_1 = 0.451, m_2 \geq 7$ или $m_1 \geq 7, m_2 = 1.33$	1 : 1, 2 : 3
$m_1 \leq 7, m_2 \leq 13$ или $m_1 \approx 13, m_2 \geq 7$		1 : 2	
$m_1 \geq 7, m_2 = 1.33$		3 : 4	
$m_1 \geq 7, m_2 \leq 13$		1 : 1, 2 : 3	
	0.709	$m_1 = 0.451, m_2 \geq 7$	1 : 2, 3 : 4
$i = 3, j = 4$ (внешняя пара планет)			
2.03	3.5	$m_3 = 1.18, m_4 \approx 7$	1 : 1, 2 : 3, 3 : 4, 3 : 5
		$m_3 = 1.18, m_4 \geq 7$	1 : 2, 1 : 3, 2 : 3
2.09		$m_3 = 1.18, m_4 \approx 7$ или $m_3 \geq 7, m_4 \leq 13$	2 : 3, 3 : 4, 3 : 5, 4 : 5
		$m_3 \leq 7, m_4 \geq 7$ или $m_3 \approx 13, m_4 \leq 13$	1 : 1, 1 : 2, 1 : 3, 2 : 3
		$m_3 \geq 7, m_4 \geq 7$	3 : 4, 5 : 6, 5 : 7
2.15		$m_3 = 1.18, m_4 \approx 13$ или $m_3 \geq 7, m_4 \leq 13$	1 : 2
		$m_3 \geq 7, m_4 = 0.66$	4 : 5
		$m_3 \geq 7, m_4 \geq 7$	1 : 3
		$m_3 \geq 7, m_4 \leq 13$	2 : 3, 3 : 4, 3 : 5
		$m_3 \approx 13, m_4 = 0.66$	1 : 1

значений больших полуосей орбит, для которых проводится интегрирование уравнений движения, малые знаменатели в слагаемых гамильтониана не возникают.

В системе HD 160691 для больших полуосей $a_2 = 0.921$ а.е., $a_3 = 1.5$ а.е. и для масс планет $m_2 = 0.5219M_J$, $m_3 = 1.676M_J$ (вторая и третья планеты) возникает резонанс средних движений 1 : 2. Данные значения больших полуосей и масс являются номинальными, для которых проводит-

ся численное интегрирование уравнений движения. Оценка значения возмущающей функции в первом приближении $\mu h_1 = -4.484 \times 10^{-7}$, во втором приближении $\mu^2 h_2 = -3.218 \times 10^{-8}$. Вклад слагаемых со знаменателями $(\nu_2 - 2\nu_3)$ и $(\nu_2 - 2\nu_3)^2$ в значение величины $\mu^2 h_2$ составляет -3.205×10^{-8} .

В условиях данного резонанса для нескольких вариантов начальных условий, различающихся значениями долгот восходящих узлов планет,

Таблица 12. Положение резонансных областей в планетной системе HD 160691

a_2 , а.е.	a_3 , а.е.	Диапазоны масс, M_J	$n_2 : n_3$
0.921	1.48	$m_2 \geq 7, m_3 = 1.676$	2 : 3, 3 : 5
		$m_2 \leq 13, m_3 \leq 13$	1 : 2
		$m_2 \approx 13, m_3 = 1.676$	1 : 1, 3 : 4
	1.50	$m_2 = 0.5219, m_3 \leq 13$ или $m_2 \approx 7, m_3 \leq 7$	1 : 2
		или $m_2 \approx 13, m_3 \leq 13$	1 : 2
		$m_2 \geq 7, m_3 = 1.676$	2 : 3, 3 : 4, 3 : 5
		$m_2 \geq 7, m_3 \leq 13$	1 : 1
	1.52	$m_2 \approx 13, m_3 = 1.676$	4 : 5
		$m_2 = 0.5219, m_3 \leq 13$ или $m_2 \approx 7, m_3 = 1.676$	1 : 2
		$m_2 \geq 7, m_3 = 1.676$	1 : 1, 2 : 3, 3 : 4, 3 : 5, 4 : 5
$m_2 \approx 13, m_3 \approx 7$		3 : 5	
$m_2 \approx 13, m_3 \leq 13$		1 : 1, 1 : 2	

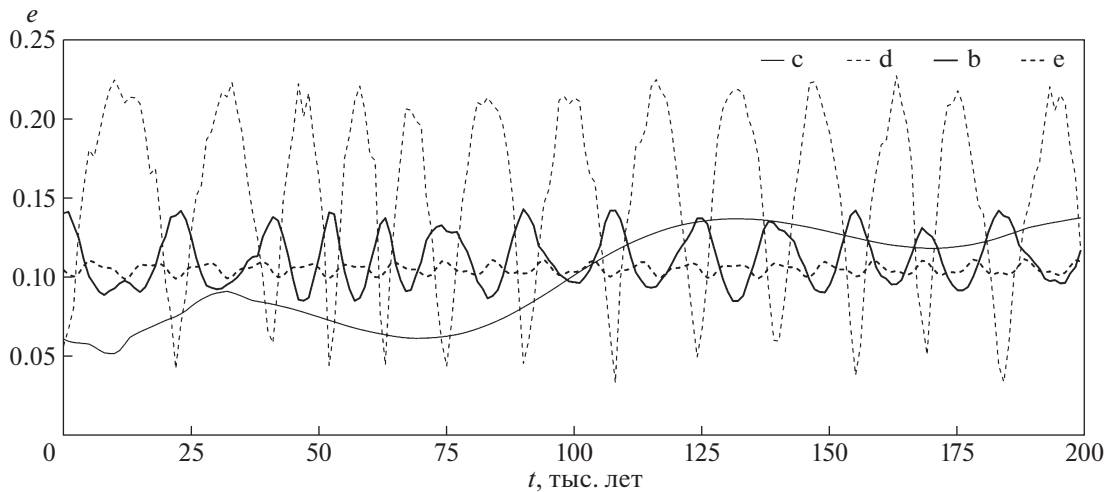


Рис. 9. Эволюция оскулирующих эксцентриситетов орбит планет системы HD 160691 для начальных значений наклонов внутренних планет $i_0 = 5^\circ$ и начальных значений эксцентриситетов $e_c = 0.172$, $e_d = 0.0666$, $e_b = 0.128$, $e_e = 0.0985$. Данные численного моделирования.

проведено моделирование орбитальной эволюции с использованием численного симплектического интегратора 4 порядка из набора программ NBI — N-body integration [20]. Интегрирование проводилось с шагом 1 сутки на интервале времени 1 млн. лет. На рис. 9 в качестве примера представлены результаты эволюции оскулирующих эксцентриситетов орбит планет системы HD 160691 на интервале

времени 200 тыс. лет для одного выбранного набора начальных условий.

На рис. 10 показана эволюция средних эксцентриситетов орбит в рамках численно-аналитической теории для тех же начальных условий. Сравнение между собой характера эволюции элементов орбит в обоих рассмотренных случаях позволяет сделать вывод о возможности применения численно-аналитической теории для исследования

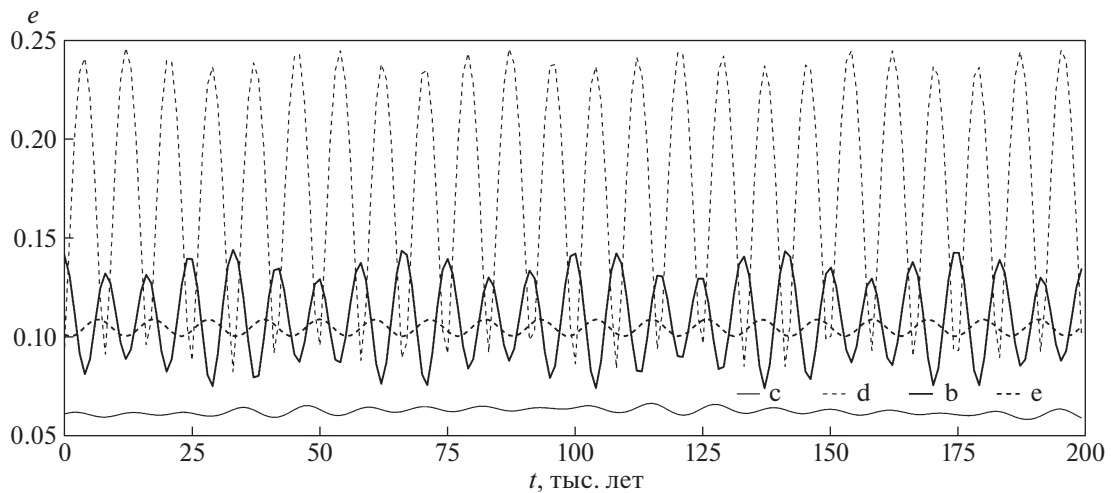


Рис. 10. Эволюция средних эксцентриситетов орбит планет системы HD 160691 для начальных значений наклонов внутренних планет $i_0 = 5^\circ$ и начальных значений эксцентриситетов $e_c = 0.172$, $e_d = 0.0666$, $e_b = 0.128$, $e_e = 0.0985$. Данные численно-аналитической теории.

орбитальной эволюции в условиях данного резонанса. В обоих случаях эволюция эксцентриситетов орбит сохраняет свой характер на интервале времени 1 млн. лет.

Планетная система HD 39194 является нерезонансной для всех значений варьируемых параметров.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе качественно исследована орбитальная эволюция трех внесолнечных планетных систем HD 39194, HD 141399 и HD 160691 с помощью осредненной теории движения на интервале времени 1 млн лет. Численное интегрирование уравнений движения проводилось для различных начальных значений эксцентриситетов, наклонов, долгот восходящих узлов и аргументов перицентров орбит планет.

По итогам моделирования орбитальной эволюции выявлены начальные условия, приводящие к экстремальному росту эксцентриситетов и наклонов, который может привести планетную систему к потере стабильности и разрушению. В противном случае, если элементы орбит сохраняются малыми, то систему можно считать динамически устойчивой.

Показанный в статье способ позволяет определить наиболее вероятные значения неизвестных из наблюдений долгот узлов и аргументов перицентров, а также сузить диапазон возможных значений наклонов и эксцентриситетов орбит.

Для рассмотренных планетных систем выполнен поиск резонансных областей, определены их границы по значениям масс планет и больших

полуосей орбит. Для этого варьированием указанных параметров была проведена оценка знаменателей в слагаемых разложения гамильтониана, и, в соответствии с выбранными критериями, сделаны выводы о наличии и границах резонансов средних движений.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 18-32-00283 мол_а, постановления № 211 Правительства Российской Федерации (контракт № 02.A03.21.0006) и Министерства образования и науки Российской Федерации (базовая часть государственного задания, РК № АААА-А17-117030310283-7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К. Мюррей, С. Дермотт *Динамика Солнечной системы* (М.: ФизМатЛит, 2010).
2. М. Ф. Субботин *Введение в теоретическую астрономию* (М.: Наука, 1968).
3. К. Шарлье *Небесная механика* (М.: Наука, 1966).
4. А. С. Перминов и Э. Д. Кузнецов, *Астрон. вестник* **49**, 469 (2015).
5. К. В. Холшевников *Асимптотические методы небесной механики* (Л.: Изд-во Лен. ун-та, 1985).
6. S. Ferraz-Mello, *SM&DA* **43**, 69 (1988).
7. А. С. Перминов и Э. Д. Кузнецов, *Астрон. вестник* **50**, 450 (2016).
8. А. С. Перминов и Э. Д. Кузнецов, *Астрон. вестник* **52**, 239 (2018).
9. E. Everhart, *Cel. Mech.* **10**, 35 (1974).
10. К. В. Холшевников, *Астрон. журнал* **78**, 669 (2001).

11. К. В. Холшевников, А. В. Греб и Э. Д. Кузнецов, *Астрон. вестник*. **36**, 75 (2002).
12. J. Schneider, C. Dedieu, P. Le Sidaner, et al., *Astron. Astrophys.* **532**, A79 (2011).
13. M. Mayor, M. Marmier, C. Lovis, et al., препринт arXiv:1109.2497 (2011).
14. S. S. Vogt, R. P. Butler, E. J. Rivera, et al., *Astrophys. J.* **787**, 97 (2014).
15. R. P. Butler, C. G. Tinney, G. W. Marcy, et al., *Astrophys. J.* **555**, 410 (2001).
16. C. McCarthy, R. P. Butler, C. G. Tinney, et al., *Astrophys. J.* **617**, 575 (2004).
17. N. C. Santos, F. Bouchy, M. Mayor, et al., *Astron. Astrophys.* **426**, L19 (2004).
18. K. Gozdziewski, A. J. Maciejewski, and C. Migaszewski, *Astrophys. J.* **657**, 546 (2007).
19. F. Pepe, A. C. M. Correia, M. Mayor, et al., *Astron. Astrophys.* **462**, 769 (2007).
20. F. Varadi, NBI. A set of numerical integrators for the gravitational N-body problem // <http://www.atmos.ucla.edu> (1999).