АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2019, том 96, № 11, с. 961–968

УДК 521.1

УВОД АСТЕРОИДА С ПОМОЩЬЮ ДВИГАТЕЛЯ МАЛОЙ ТЯГИ, НАПРАВЛЕННОЙ ПО ТРАНСВЕРСАЛИ

© 2019 г. Н. Батмунх[1,2*], К. И. Оськина[1**], Т. Н. Санникова[1***], В. Б. Титов[1****], К. В. Холшевников[1,3*****]

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

[2]Институт астрономии и геофизики Монгольской академии наук, Улан-Батор, Монголия

[3]Институт прикладной астрономии РАН, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 10.03.2019 г.; после доработки 29.04.2019 г.; принята к публикации 29.04.2019 г.

Рассмотрена задача увода опасного астероида с орбиты столкновения с Землей с помощью двигателя малой тяги, направленной по трансверсали. Двигатель может быть смонтирован на астероиде, или на "гравитационном тягаче". Целью является установление принципиальной возможности (или невозможности) увода астероида на безопасное расстояние за время порядка месяца и года. Это приемлемо, поскольку падение астероида диаметром порядка 100 м сразу после его открытия маловероятно. Мы ограничились модельной постановкой задачи: двигатель обеспечивает постоянное ускорение астероида по трансверсали к орбите. Соответствующие уравнения типа Эйлера были нами преобразованы методом осреднения ранее. Здесь мы решили их методом рядов по степеням "медленного времени" и показали адекватность решения на временах в десятки лет. Оказалось, что астероиды до 55 м в диаметре можно увести за год при тяге двигателя в 1 Н. При тяге в 20 Н астероиды до 50 м в диаметре можно увести за месяц, а с диаметром до 150 м — за год. Увод более крупных астероидов требует больше времени или более мощных двигателей.

DOI: 10.1134/S0004629919100013

1. ВВЕДЕНИЕ

В статьях [1, 2] сформулирована задача о движении точки $\mathcal{A}$ нулевой массы под действием притяжения к центральному телу $\mathcal{S}$ и возмущающего ускорения $\mathbf{P}$. Последнее постоянно в системе отсчета $\mathcal{O}_1$ с началом в $\mathcal{S}$ и ортами $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$. Орты направлены по радиусу-вектору, трансверсали (перпендикуляру к радиусу-вектору в плоскости оскулирующей орбиты в сторону движения) и бинормали (направленной по вектору площадей). Там рассмотрены и другие системы отсчета, но мы их касаться не будем. Отношение модулей возмущающего ускорения P и вызванного притяжением к центральному телу основного ускорения считается малым, и квадратом этой величины пренебрегаем. К уравнениям движения применено осредняющее преобразование. Найдены уравнения движения в средних элементах и формулы перехода от оскулирующих элементов к средним.

В статье [3] осредненные уравнения проинтегрированы в квадратурах, если хотя бы один из трех компонентов $\mathbf{Pi}_1, \mathbf{Pj}_1, \mathbf{Pk}_1$ вектора возмущающего ускорения $\mathbf{P}$ равен нулю.

Здесь мы применим эти результаты к задаче об уводе опасного астероида с орбиты столкновения с Землей с помощью двигателя малой тяги. Последний может быть установлен на астероиде или на "гравитационном тягаче" [4]. Малая тяга позволяет сдвинуть астероид на приемлемое расстояние лишь за длительное время (годы, в лучшем случае месяцы). Это приемлемо, поскольку падение астероида диаметром порядка 100 м сразу после его открытия маловероятно. Заметим, что, к счастью, маловероятно само столкновение с Землей. Частота оценивается в одно событие за 200 лет [5–7]. Вероятность же столкновения сразу после открытия опасного объекта еще на 2–3 порядка ниже[1]. В общем случае он несколько раз пролетает мимо Земли на близком расстоянии

*E-mail: monastro@yandex.ru
**E-mail: zegzithsa@gmail.com
***E-mail: TNSannikova@gmail.com
****E-mail: tit@astro.spbu.ru
*****E-mail: kvk@astro.spbu.ru

[1] Это не так для тел метрового и декаметрового размера, открываемых только в непосредственной близости от Земли. Но столь малые тела отклонять не нужно. Достаточно оповещения населения.

(и тогда открывается), прежде чем столкнуться с ней [8].

Выбор возмущающего ускорения по вектору скорости локально оптимален для разгона или торможения космического аппарата [9, 10]. При малом эксцентриситете орбиты вектор скорости почти совпадает с трансверсалью. В этой статье мы рассмотрим задачу с возмущающим ускорением, направленным вдоль трансверсали. В следующей статье мы рассмотрим более сложную задачу с возмущающим ускорением, направленным вдоль вектора скорости.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через ω, e, i, Ω, g, M, a среднее движение, эксцентриситет, наклон к основной неподвижной плоскости с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, долготу восходящего узла, аргумент перицентра, среднюю аномалию и большую полуось орбиты $\mathcal{A}$. Независимы первые 6 элементов, $a = \varkappa^{2/3}\omega^{-2/3}$ считается функцией от ω. Здесь $\varkappa^2$ — произведение постоянной тяготения на массу $\mathcal{S}$. Выбор среднего движения вместо большой полуоси в качестве независимой переменной сильно упрощает операции осреднения, поскольку скорость изменения M в невозмущенном движении линейно зависит от ω, но существенно нелинейно от a.

Пусть компоненты возмущающего ускорения $\mathbf{P}$ в системе $\mathcal{O}_1$ равны $(0, T, 0)$, $T = \text{const}$. В статье [2] выполнено осредняющее преобразование [11–13] уравнений Эйлера [12, 14] для изменения оскулирующих элементов с точностью до первого порядка относительно отношения $|\mathbf{P}|$ к основному ускорению $\varkappa^2/r^2$. Здесь r — модуль радиус-вектора $\mathbf{r} = \mathcal{S}\mathcal{A}$. Переход от оскулирующих элементов к средним выполняется по формулам

$$\epsilon_n = \bar{\epsilon}_n + u_n.$$

Здесь ϵ_n — семь оскулирующих элементов, взятых в указанном выше порядке; $\bar{\epsilon}_n$ — семь средних элементов. Величины u_n считаются функциями средних элементов $\bar{\epsilon}_k$. Впрочем, в первом приближении безразлично, считать ли аргументы u_n средними или оскулирующими.

Приведем явные выражения для u_n:

$$u_1 = -\frac{3e\eta}{\omega a}\sin ET, \qquad (1)$$

$$u_2 = \frac{\eta}{4\omega^2 a}\Big[2(4-3e^2)\sin E - e\sin 2E\Big]T,$$

$$u_3 = u_4 = 0,$$

$$u_5 = -\frac{1}{4\omega^2 ae}\Big[2e(2-e^2) + {} + 4(2-e^2)\cos E - e\cos 2E\Big]T,$$

$$u_6 = \frac{\eta}{4\omega^2 ae}\Big[4e(1+e^2) + {} + 8(1+e^2)\cos E - e(1+3e^2)\cos 2E\Big]T,$$

$$u_7 = \frac{2e\eta}{\omega^2}\sin ET.$$

Здесь $\eta = \sqrt{1-e^2}$, E — эксцентрическая аномалия.

Дифференциальные уравнения для средних элементов просты:

$$\dot{\omega} = -\frac{3\eta}{a}T, \qquad (2)$$

$$\dot{e} = -\frac{3e\eta}{2\omega a}T,$$

$$\dot{M} = \omega,$$

$$\dot{i} = \dot{\Omega} = \dot{g} = 0,$$

где точка над параметром (жирная точка для i) отмечает дифференцирование по времени t. Мы опустили черту над средними элементами, поскольку это не приводит к недоразумениям.

Найдем решение уравнений (2) и оценим вклад периодических возмущений (1).

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В СРЕДНИХ ЭЛЕМЕНТАХ

Описывающие ориентацию эллипса элементы i, Ω, g постоянны. Уравнения (2) автономны, поэтому за начальную эпоху удобно принять $t = 0$. Начальные значения переменных будем обозначать индексом "0". Далее следует рассмотреть два случая в зависимости от начального значения эксцентриситета.

3.1. Круговая начальная орбита

Пусть $e_0 = 0$. Очевидно, $e = 0$ тождественно. В первом из уравнений (2) переменные разделяются

$$\omega^{-2/3}d\omega = -3\varkappa^{-2/3}Tdt,$$

так что решение (2) имеет вид

$$\omega = \omega_0(1-\tau)^3, \qquad (3)$$

$$M = M_0 + \frac{\omega_0 t^*}{4}\left[1-(1-\tau)^4\right] = {} = M_0 + \omega_0 t\left(1 - \frac{3}{2}\tau + \tau^2 - \frac{1}{4}\tau^3\right).$$

Здесь

$$t^* = \frac{a_0\omega_0}{T}, \quad \tau = \frac{t}{t^*}. \qquad (4)$$

Величина t^* имеет размерность времени, τ — безразмерное "медленное время".

Для большой полуоси получаем дробно-рациональную функцию времени

$$a = \frac{a_0}{(1-\tau)^2}. \qquad (5)$$

Пусть $T > 0 \Rightarrow t^* > 0$. Решение уравнений (3), (5) существует при $-\infty < \tau < 1$, $-\infty < t < t^*$. Поведение решения на концах интервала тривиально: $a \to 0$, $\omega \to +\infty$ при $\tau \to -\infty$, $t \to -\infty$; $a \to \infty$, $\omega \to 0$ при $\tau \to 1$, $t \to t^*$. Что касается средней аномалии, то $M \to -\infty$ при $\tau \to -\infty$, $t \to -\infty$; $M \to M_0 + \omega_0 t^*/4$ при $\tau \to 1$, $t \to t^*$. При нулевом эксцентриситете истинная аномалия совпадает со средней. Поэтому орбита $\mathcal{A}$ представляет собой спираль, делающую бесконечное число витков в прошлом (наматывается на притягивающий центр) и конечное число витков в будущем (уходя на бесконечность за конечное время).

Пусть $T < 0 \Rightarrow t^* < 0$. Критическое значение $\tau = 1, t = t^*$ теперь в прошлом, с ростом τ время уменьшается. Решение существует при $-\infty < \tau < 1$, $t^* < t < +\infty$, и его поведение аналогично вышеописанному при перестановке прошлого и будущего.

Замечание 1. Уход на бесконечность за конечное время не имеет физического смысла. Такое поведение решения говорит лишь о том, что метод осреднения примени́м только при τ, не слишком близком к единице: например, при $\tau < 1/2$, т.е. $t < t^*/2$. Действительно, метод предполагает малость величин u_n. Между тем при $e_0 = 0$ согласно (1)

$$u_2 = \frac{2T}{\omega^2 a}\sin M = \frac{2T}{\omega_0^2 a_0 (1-\tau)^4}\sin M, \qquad (6)$$

что не ограничено при $\tau \to 1$.

Замечание 2. Согласно (6) на половине каждого оборота $\pi(2k-1) < M < 2\pi k$ оскулирующий эксцентриситет отрицателен. Это нормально: просто отрицательность эксцентриситета меняет местами перицентр и апоцентр.

3.2. Некруговая начальная орбита

Уравнения (2) при $0 < e_0 < 1$ проинтегрированы в [3] в квадратурах, приводящих к неполным эллиптическим интегралам. Здесь мы рассматриваем случай малого T (оценки см. ниже), так что гораздо проще использовать ряды по степеням медленного времени. Получим решение методом рядов Ли [15—18].

Первые два уравнения (2) позволяют выразить ω, e через $x = e^{2/3}$ [3]:

$$e = x^{3/2}, \quad \omega = \frac{\omega_0}{x_0^3}x^3.$$

Дифференциальное уравнение для x можно представить в форме

$$\frac{dx}{d\tilde{t}} = -\sqrt{1-x^3}, \qquad (7)$$

где

$$\tilde{t} = \frac{x_0}{t^*}t = x_0\tau.$$

Решение (7) запишем в виде ряда Ли

$$x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{t}^n}{n!}D^n X. \qquad (8)$$

Здесь $X = x_0$ — начальное значение x, D — оператор дифференцирования вдоль траекторий системы (7):

$$D = -\sqrt{1-X^3}\frac{d}{dX}.$$

По индукции легко показать, что

$$D^{2n}X = P_n(X),$$
$$D^{2n+1}X = -\sqrt{1-X^3}P_n'(X),$$

где P_n — многочлен степени $n+1$ от X, удовлетворяющий рекуррентному соотношению

$$P_0 = X,$$
$$P_{n+1} = (1-X^3)P_n'' - \frac{3}{2}X^2 P_n'.$$

В частности,

$$P_0 = X, \quad P_1 = -\frac{3}{2}X^2,$$
$$P_2 = -3 + \frac{15}{2}X^3.$$

Запишем (8) в других обозначениях

$$x = X\Phi(X,\tau),$$
$$\Phi = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^{n-1}\tau^n}{n!}D^n X.$$

С точностью до τ^2

$$\Phi = 1 - \sqrt{1-X^3}\tau - \frac{3}{4}X^3\tau^2 + \ldots$$

Легко вывести соотношения

$$e = e_0\Phi^{3/2}, \quad \omega = \omega_0\Phi^3, \quad a = a_0\Phi^{-2}. \qquad (9)$$

Пользуясь биномиальным рядом

$$\Phi^\nu = 1 - \nu\sqrt{1-X^3}\tau +$$
$$+ \frac{\nu}{4}[2(\nu-1) - (1+2\nu)X^3]\tau^2 + \ldots,$$

найдем

$$e = e_0\left[1 - \frac{3}{2}\eta_0\tau + \frac{3}{8}(1-4e_0^2)\tau^2 + \ldots\right], \qquad (10)$$

$$\omega = \omega_0 \left[1 - 3\eta_0\tau + \frac{3}{4}(4 - 7e_0^2)\tau^2 + \ldots\right],$$
$$a = a_0 \left[1 + 2\eta_0\tau + \frac{3}{2}(2 - e_0^2)\tau^2 + \ldots\right].$$

Обозначим $\delta M = M - M_0 - \omega_0 t$. Интегрируя третье соотношение (2) с учетом (4) и (10), получим

$$\delta M = -\frac{3\varkappa^2\eta_0}{2a_0^2 T}\tau^2\left(1 - \frac{4 - 7e_0^2}{6\eta_0}\tau + \ldots\right). \quad (11)$$

Как и должно быть, вековые возмущения позиционных элементов пропорциональны времени. Вековые возмущения средней аномалии пропорциональны квадрату времени, ибо в третьем уравнении (2) отсутствует слагаемое, пропорциональное T.

Важно, что соотношения (1), (10), (11) не содержат малых знаменателей, поскольку имеется лишь одна быстрая переменная M и резонанс невозможен.

Заметим, что при $e_0 = 0$ решения (10), (11) совпадают с решениями (3), (5).

3.3. Сходимость рядов

1. Вариант $e_0 = 0$.

Элементы ω, M являются согласно (3) многочленами по времени, и вопрос о сходимости не стоит.

Для большой полуоси имеется замкнутое выражение (5). Его можно разложить в ряд

$$a = a_0 \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\tau^n,$$

радиус сходимости которого равен единице.

2. Вариант $0 < e_0 < 1 \Rightarrow 0 < x_0 < 1$.

В уравнении (7) переменные разделяются. Его решение представляет собой функцию $x(\tau)$, обратную к

$$\tau(x) = -\frac{1}{x_0}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^3}}. \quad (12)$$

Найдем особые точки функции $x(\tau)$. Для этого [18, 19] определим особые точки функции (12) на комплексной плоскости x. Их три: $z_k = \exp(2\pi\mathrm{i}k/3)$, $k = -1, 0, 1$. Соответствующие значения τ_k^* равны

$$\tau_k^* = -\frac{1}{x_0}\int\limits_{x_0}^{z_k}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^3}}.$$

При $k = 0$

$$-x_0\tau_0^* = \int\limits_{x_0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^3}}.$$

При $k = 1$

$$x_0\tau_1^* = \gamma_1 - \gamma_2,$$
$$\gamma_1 = \int\limits_{0}^{x_0}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^3}},$$
$$\gamma_2 = \int\limits_{0}^{z_1}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^3}} = z_1\int\limits_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^3}},$$

где в интеграле для γ_2 сделана подстановка: $y = z_1 y$. Отделяя вещественную и мнимую части, получим

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \int\limits_{0}^{x_0}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^3}} - \exp\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}\int\limits_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^3}},$$

или

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \int\limits_{0}^{x_0}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^3}} + $$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\int\limits_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^3}}.$$

Отбрасывая первое слагаемое справа, мы увеличим модуль $|\gamma_1 - \gamma_2|$. Поэтому

$$x_0|\tau_1^*| > \quad (13)$$
$$> \left|\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\int\limits_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^3}}\right| =$$
$$= \int\limits_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^3}} > x_0|\tau_0^*|.$$

Неравенство (13) выполнено и для τ_{-1}^*.

Согласно (9) эксцентриситет и большая полуось содержат дробные и отрицательные степени x. Для них особенность возникает и при $x = 0$. Сингулярность на плоскости τ определяется значением

$$x_0\tau_2^* = \int\limits_{0}^{x_0}\frac{dy}{\sqrt{1 - y^3}}.$$

Окончательно радиус сходимости ряда (10) для ω и ряда (11) для δM равен $|\tau_0^*|$. Радиус сходимости рядов (10) для e, a равен τ_3^*, где

$$\tau_3^* = \min\left\{|\tau_0^*|, \tau_2^*\right\}.$$

Таблица 1. Значения $|\tau_0^*|$, τ_2^* в зависимости от $e = x^{3/2}$

e	$\lvert\tau_0^*\rvert$	τ_2^*
0.0	∞	1
0.1	5.5071	1.0013
0.2	3.0949	1.0051
0.3	2.1172	1.0117
0.4	1.5613	1.0215
0.5	1.1906	1.0352
0.550406	1.04388	1.04388
0.6	0.9172	1.0539
0.7	0.6989	1.0797
0.8	0.5100	1.1170
0.9	0.3263	1.1779
0.95	0.2203	1.2306
0.99	0.0951	1.3165
1	0.0	1.4022

При $x_0 \to 0$ имеем $|\tau_0^*| \to \infty$, $\tau_2^* = \tau_3^* \to 1$ в согласии с результатами п. 1 этого раздела. При $x_0 \to 1$ имеем $|\tau_0^*| \to 0$, $\tau_3^* \to 0$.

Значения $|\tau_0^*|, \tau_2^*$ в зависимости от $e = x^{3/2}$ приведены в табл. 1. Использовалось представление [20, 3.139]:

$$\int\limits_{\xi}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^3}} = 3^{-1/4} F(\beta, \kappa),$$

$$\beta = \frac{\sqrt{3} - 1 + \xi}{\sqrt{3} + 1 - \xi},$$

$$\kappa^2 = \cos^2 15^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Здесь F — неполный эллиптический интеграл первого рода

$$F(\beta, \kappa) = \int\limits_0^{\beta} \frac{dy}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 y}}.$$

Таблица 1 показывает, что τ_3^* с ростом e от 0 до 0.550406 возрастает от 1 до 1.04388, а затем убывает до 0 при $e = 1$. Однако даже при $e = 0.99$ значение $\tau_3^* \approx 0.1$ еще не так мало́.

4. НОРМА СМЕЩЕНИЯ

Пусть ϵ_n, $n = 1, \ldots, 5$ — первые пять оскулирующих элементов, постоянных в невозмущенном движении (медленные переменные); $\epsilon_6 = M$ — средняя аномалия (быстрая переменная). Восстановим черту над средними элементами. Нас интересует смещение $\Delta\mathbf{r}$ положения $\mathcal{A}$ за время t, вызванное возмущающим ускорением T. По определению

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(\epsilon_n(t), M(t)) - \mathbf{r}(\epsilon_n(0), M_0 + \omega_0 t),$$

что можно представить в виде

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta\mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}_2,$$

где

$$\Delta\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(\bar\epsilon_n(t) + u_n, M_0 + \omega_0 t + \delta M(t) + u_6) - \mathbf{r}(\bar\epsilon_n(t), M_0 + \omega_0 t + \delta M(t)), \tag{14}$$

$$\Delta\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(\bar\epsilon_n(t), M_0 + \omega_0 t + \delta M(t)) - \mathbf{r}(\bar\epsilon_n(0), M_0 + \omega_0 t). \tag{15}$$

Смещение $\Delta\mathbf{r}_1$ вызвано отличием оскулирующих элементов от средних. Смещение $\Delta\mathbf{r}_2$ вызвано дрейфом средних элементов.

4.1. Влияние отличия оскулирующих элементов от средних

Оценим смещение (14). Поскольку u_n, u_6 малы и периодически зависят от M, разность (14) также мала и периодична, так что вековой тренд отсутствует. Для оценки достаточно вычислить среднеквадратическую норму

$$\varrho_1 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\Delta\mathbf{r}_1)^2\, dM}.$$

Она приведена в [21]:

$$\varrho_1 = \frac{4|T|}{\omega^2} \sqrt{1 - \frac{99}{512} e^2 - \frac{385}{512} e^4 - \frac{1}{512} e^6}. \tag{16}$$

Замечательно, что ϱ_1 зависит только от двух элементов орбиты ω и e (или, что то же самое, от a и e).

4.2. Влияние дрейфа средних элементов

В этом разделе все элементы считаются средними. При $T = 0$ пять из них $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_5$ постоянны, а шестой $\epsilon_6 = M$ линейно зависит от времени. Поскольку $\delta i = \delta\Omega = \delta g = 0$ с точностью до второго порядка малости смещение (15) согласно формуле (4) из [21] равно

$$(\Delta\mathbf{r}_2)^2 = \delta r^2 + r^2 \delta u^2,$$

где u — аргумент широты. Вычислим среднеквадратичную норму:

$$\varrho_2^2 = ||\Delta\mathbf{r}_2||^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\Delta\mathbf{r}_2)^2 dM. \tag{17}$$

Приращения δr и δu — линейные функции от δa, δe, δM. Последние согласно (9), (10) зависят лишь от начальных данных a_0, e_0 и времени, но не зависят от положения на орбите M. Условимся в интеграле (17) считать t не зависящим от M. Тогда при интегрировании приращения δa, δe, δM ведут себя как постоянные, и мы можем воспользоваться формулой (11) статьи [21]:

$$\frac{2}{a^2}\varrho_2^2 = \frac{2+3e^2}{a^2}\delta a^2 + + \frac{5-4e^2}{\eta^2}\delta e^2 + 2\delta M^2 + 6\frac{e}{a}\delta a\delta e. \tag{18}$$

Значения коэффициентов при приращениях вычисляются на начальную эпоху $t = 0$. Подставляя (10), (11) в (18), получим

$$\frac{2}{a^2}\varrho_2^2(\tau) = Q_1(\tau) + Q_2(\tau) \tag{19}$$

при

$$\begin{gathered} Q_1(\tau) = \frac{2+3e^2}{a^2}\delta a^2 + \\ + \frac{5-4e^2}{\eta^2}\delta e^2 + 6\frac{e}{a}\delta a\delta e = \\ = \left(8 - \frac{11}{4}e^2 - 3e^4\right)\tau^2 + \\ + \frac{1}{\eta}\left(24 - \frac{225}{8}e^2 + 3e^4 + \frac{9}{2}e^6\right)\tau^3 + \ldots, \\ Q_2(\tau) = 2\delta M^2 = \\ = \frac{9\varkappa^4\eta^2}{2a^4T^2}\tau^4\left(1 - \frac{4-7e^2}{3\eta}\tau + \ldots\right). \end{gathered}$$

Здесь Q_1 отвечает смещению поперек орбиты, а Q_2 — вдоль орбиты.

Обратим внимание, что $Q_2 \ll Q_1$, если t отвечает дуге в несколько градусов; Q_2 и Q_1 сопоставимы по величине на дуге порядка четверти оборота; $Q_2 \gg Q_1$ на дуге в один и более оборотов. Действительно,

$$\frac{Q_2(\tau)}{Q_1(\tau)} \sim \frac{18(1-e^2)}{32 - 11e^2 - 12e^4}\omega^2 t^2$$

в согласии со сказанным в начале параграфа: одному обороту отвечает $\omega t = 2\pi$.

Замечание 1. Зависимость от эксцентриситета получена нами в замкнутой форме, разложения по степеням e нигде не используются.

Замечание 2. Правая часть выражения (16) инвариантна относительно замены $T \longmapsto -T$, $\tau \longmapsto \to -\tau$. Это не так для правой части выражения (19). Однако она становится инвариантной, если пренебречь нечетными (поправочными) степенями τ.

Замечание 3. Формулы (16), (19) оценивают периодическое и вековое смещения $\mathcal{A}$ в системе отсчета $\mathcal{O}_1$. По инвариантности расстояний относительно сдвигов и вращений оба соотношения остаются справедливыми в любой декартовой системе отсчета.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

A. Выберем подсемейство $\mathcal{F}$ семейства потенциально опасных астероидов с известными элементами и диаметром d [22], удовлетворяющих условиям

$$\varrho_{st} < 0.05 \text{ а.е.}, \quad 25 \text{ м} \leqslant d \leqslant 200 \text{ м}, \qquad \sigma a < 0.05 \text{ а.е.}, \quad \sigma e < 0.05, \tag{20}$$

добавив к нему ставший классическим примером астероид $\mathcal{A}_0$ Апофис. Через ϱ_{st} обозначено теоретико-множественное расстояние между орбитами Земли и астероида (часто именуемое MOID); $\sigma\epsilon$ — среднеквадратическое уклонение элемента ϵ от его номинального значения. Считаем, что на каждый из этих 66 астероидов (см. [22]) действует возмущающая сила в 1 Н, вызывающая возмущающее ускорение $T = 1/m$ м/с^2.

Далее все параметры приведены в системе СИ, если не указано иначе.

Масса астероида m вычислена по приведенному в [22] значению его диаметра d по формуле

$$m = \frac{\pi}{6}\gamma d^3,$$

где γ — плотность. Мы приняли для нее значение $\gamma = 2500$. Выбор нижней границы d объясняется тем, что меньшие астероиды нет смысла отклонять. Верхняя граница d отсекает астероиды, увод которых за приемлемое время требует более мощных двигателей.

В табл. 2 представлены следующие сведения: номер (предварительное обозначение) астероида, его диаметр d, масса m, элементы a, e, ω^2, ускорение T, критическое время t^*, безразмерные времена $\tau_1 = t_1/t^*$ и $\tau_2 = t_2/t^*$, отвечающие $t_1 = 30$ сут., $t_2 = 1$ тропический год, нормы периодического смещения ϱ_1 и вековых смещений $\varrho_2(\tau_1)$ и $\varrho_2(\tau_2)$. Данные упорядочены по возрастанию d. Приведены значения для первых 14 и последних 4 астероидов. Точность массы m на несколько порядков ниже в сравнении с точностью остальных исходных величин. Но наша задача на данном этапе — оценить возможности метода, а для этого имеющейся точности вполне хватает.

Вычисленные характеристики 66 астероидов из семейства $\mathcal{F} \cup \mathcal{A}_0$ показали следующее.

1. Для всех астероидов

$$\tau_1 < \tau_2 < 6.6 \cdot 10^{-5}.$$

Таблица 2. Параметры 14 астероидов в верхней части списка и 4 — в нижней

Объект	d $\times 1$	m $\times 10^{-7}$	a $\times 1$	e $\times 1$	ω^2 $\times 10^{13}$	T $\times 10^{8}$	t^* $\times 10^{-12}$	τ_1 $\times 10^{6}$	τ_2 $\times 10^{5}$	ϱ_1 $\times 10^{-6}$	$\varrho_2(\tau_1)$ $\times 10^{-6}$	$\varrho_2(\tau_2)$ $\times 10^{-6}$
2010 YD	26	2.30	2.04	0.538	0.0466	4.35	0.480	5.40	6.58	35.0	3.100	66.3
2002 JR100	28	2.87	0.924	0.299	0.503	3.48	0.891	2.91	3.54	2.74	0.859	50.5
1998 KY26	30	3.53	1.23	0.202	0.212	2.83	0.948	2.73	3.33	5.33	1.040	43.2
2010 FX9	30	3.53	1.13	0.367	0.274	2.83	0.990	2.62	3.19	4.05	0.903	40.7
2010 HA	32	4.29	0.96	0.196	0.448	2.33	1.304	1.99	2.42	2.07	0.612	34.8
2010 JJ3	32	4.29	2.23	0.578	0.0356	2.33	0.855	3.03	3.69	24.2	1.870	36.3
2010 CO44	34	5.14	1.07	0.231	0.323	1.94	1.481	1.75	2.13	2.39	0.587	29.0
2010 JO71	37	6.63	1.17	0.387	0.246	1.51	1.824	1.42	1.73	2.39	0.503	21.6
2010 QG2	38	7.18	1.67	0.517	0.0846	1.39	1.654	1.57	1.91	6.23	0.746	19.9
2010 JH3	39	7.76	1.76	0.470	0.0731	1.29	1.745	1.49	1.81	6.76	0.752	19.2
2010 JW39	39	7.76	1.64	0.390	0.0903	1.29	1.808	1.43	1.75	5.57	0.691	19.6
2010 EX11	40	8.38	0.956	0.110	0.454	1.19	2.552	1.02	1.24	1.05	0.314	18.1
2010 MY1	43	10.4	1.21	0.211	0.221	0.961	2.813	0.921	1.12	1.73	0.345	14.6
2010 UC7	43	10.4	1.88	0.567	0.0593	0.961	2.259	1.15	1.40	6.01	0.602	13.9
	$\times 1$	$\times 10^{-9}$	$\times 1$	$\times 1$	$\times 10^{13}$	$\times 10^{10}$	$\times 10^{-14}$	$\times 10^{8}$	$\times 10^{7}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$
468468 2004 KH17	197	10.0	0.712	0.499	1.100	0.999	3.533	0.734	0.893	0.346	0.171	13.1
2010 CB55	198	10.2	1.13	0.148	0.272	0.984	2.843	0.912	1.11	1.440	0.323	15.0
510055 2010 FH81	200	10.5	1.23	0.210	0.215	0.955	2.817	0.920	1.12	1.770	0.348	14.5
99942 Apophis	325	44.9	0.922	0.191	0.505	0.223	13.90	0.186	0.226	0.175	0.0555	3.32

Примечание. Приведены диаметр d и масса m астероида, параметры его орбиты a, e, ω^2, ускорение T, критическое время t^*, безразмерные времена $\tau_1 = t_1/t^*$ и $\tau_2 = t_2/t^*$, отвечающие $t_1 = 30^d$, $t_2 = 1$ тропическому году, нормы периодического смещения ϱ_1 и вековых смещений $\varrho_2(\tau_1)$, $\varrho_2(\tau_2)$. Размер орбиты a приведен в а.е., остальные параметры — в единицах системы СИ.

Наибольший эксцентриситет $e_0 = 0.807$ имеет астероид 2010 LK34. Для него

$$|\tau_0^*| = 0.50, \quad \tau_2^* = 1.12,$$

так что τ_1, τ_2 лежат глубоко внутри круга сходимости. Более того, квадратичного по τ приближения в (10) и кубичного в (11) более чем достаточно. С принятой точностью в формуле (19) можно считать

$$Q_1(\tau) = \left(8 - \frac{11}{4}e^2 - 3e^4\right)\tau^2, \tag{21}$$

$$Q_2(\tau) = \frac{9\varkappa^4\eta^2}{2a^4T^2}\tau^4.$$

2. На месячном интервале $Q_2(\tau)$ в несколько раз меньше $Q_1(\tau)$: сдвиг вдоль орбиты меньше сдвига поперек орбиты. Противоположная ситуация на годичном интервале за одним исключением для 130-м астероида 2002 CX58. На обоих интервалах различия доходят до двух-трех порядков.

3. На месячном интервале $\varrho_1 > \varrho_2(\tau_1)$: периодические возмущения превосходят вековые. Противоположная ситуация на годичном интервале $\varrho_1 < \varrho_2(\tau_2)$ за одним исключением для того же 130-м астероида 2002 CX58.

4. Величина ϱ_1 для большинства астероидов оказалась меньше радиуса Земли $R_\oplus$. Но для четырех астероидов $\varrho_1 > R_\oplus$. Мы приняли $R_\oplus = 6.5 \cdot 10^6$ с учетом атмосферы.

5. Величина $\varrho_2(\tau_1)$ для всех астероидов оказалась меньше радиуса Земли. Увод астероидов за месяц невозможен. Правда, возможно тонкое маневрирование с привлечением периодических возмущений для упомянутых четырех астероидов. Но это слишком опасно.

6. Для всех 19 астероидов с диаметром до 55 м включительно $\varrho_2(\tau_2)$ превысило радиус Земли. Для таких опасных астероидов увод возможен за время около года. Учет периодических возмущений необходим.

7. Увод астероидов крупнее 55-м за год невозможен.

Б. Увеличим возмущающую силу в N раз, сохраняя остальные предположения п. **А**. При расчетах положим $N = 20$.

1. Значения T, $1/t^*$, τ_1, τ_2, ϱ_1 увеличиваются в N раз. В частности, при $N = 20$

$$\tau_1 < \tau_2 < 1.3 \cdot 10^{-3}.$$

По-прежнему квадратичного по τ приближения в (10) и кубичного в (11) достаточно и можно пользоваться формулой (21). Поэтому значения $Q_s(\tau_k)$ увеличиваются в N^2 раз, а $\varrho_2(\tau_k)$ — в N раз.

2. Соотношения между $Q_2(\tau)$ и $Q_1(\tau)$ не изменяются.

3. Соотношения между ϱ_1 и $\varrho_2(\tau)$ не изменяются.

4. Для всех 11 астероидов с диаметром, меньшим 40 м, и 5 астероидов с диаметрами до 53 м $\varrho_2(\tau_1)$ превысило радиус Земли. Для более крупных $\varrho_2(\tau_1)$ оказалось меньше $R_\oplus$. Таким образом, для небольших опасных астероидов увод возможен за время около месяца. Учет периодических возмущений, превышающих вековые, обязателен.

5. Для всех 47 астероидов с диаметром до 143 м включительно, а также еще четырех 150-м астероидов $\varrho_2(\tau_2)$ превысило радиус Земли. Для таких астероидов увод возможен за время около года. Учет периодических возмущений также необходим.

6. Увод астероидов крупнее 150-м, в частности, увод Апофиса за год невозможен.

B. При каких условиях станет возможным увод более крупных астероидов? Очевидно, следует либо увеличить тягу двигателя, либо время маневра, либо и то, и другое. Для Апофиса нужно увеличить значение $\varrho_2(\tau_2)$ в 200 раз, чтобы оно превысило $R_\oplus$.

1. Добьемся этого за счет тяги. Полагая $N = 200$, получим $\tau_2 = 4.5 \cdot 10^{-6}$, что по-прежнему позволяет пользоваться упрощенной формулой (21). Норма уклонения возрастет в те же 200 раз. Таким образом, Апофис можно увести с орбиты соударения за год при тяге в 200 Н. Более точный расчет дает тягу в 196 Н для увода за год.

2. Добьемся этого за счет продолжительности маневра, полагая $N = 20$. Величина $Q_2(\tau_2)$ в 12 раз превышает $Q_1(\tau_2)$. Поэтому $\varrho_2(\tau)$ в этом диапазоне приблизительно пропорционален τ^2. Таким образом, Апофис можно увести с орбиты соударения за $\sqrt{10}$ лет. Более точный расчет дает для этого 3.16 г.

Столь большая тяга, или столь большое время не позволяют сейчас передвинуть Апофис на безопасную орбиту. Но в не очень далекой перспективе это представляется вполне реальным.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 18-12-00050).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников, Вестн. СПбГУ. Сер. 1: Математика. Механика. Астрономия. Вып. 4, 134 (2013).
2. Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников, Астрон. журн. **91**(12), 1060 (2014).
3. Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников, Астрон. журн. **92**(8), 681 (2015).
4. E. T. Lu and S. G. Love, Nature **438**, 177 (2005).
5. Ю. Д. Медведев, М. Л. Свешников, А. Г. Сокольский, Е. И. Тимошкова, Ю. А. Чернетенко, Н. С. Черных, В. А. Шор, *Астероидно-кометная опасность*, под ред. А. Г. Сокольского (СПб: изд-во ИПА РАН, 1996).
6. А. М. Микиша, М. А. Смирнов, в кн. *Угроза с неба: рок или случайность?*, под ред. А. А. Боярчука (М.: Космоинформ, 1999).
7. Н. Н. Горькавый, А. Е. Дудоров (ред.), *Челябинский суперболид* (Челябинск, изд-во Челябинского ГУ, 2016).
8. А. В. Елькин, Л. Л. Соколов, Международная конференция "Астероидная опасность-95", 23–25 мая 1995 г., Санкт-Петербург. Тезисы докладов, т. 2, 41.
9. Г. Л. Гродзовский, Ю. Н. Иванов, В. В. Токарев, *Механика космического полета (проблемы оптимизации)* (М.: Наука, 1975).
10. В. Н. Лебедев, *Расчет движения космического аппарата с малой тягой* (М.: ВЦ АН СССР, 1968).
11. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* (М.: ФМ, 1963).
12. Д. Брауер, Дж. Клеменс, *Методы небесной механики* (М.: Мир, 1964).
13. А. Пуанкаре, *Лекции по небесной механике* (М.: Наука, 1965).
14. М. Ф. Субботин, *Введение в теоретическую астрономию* (М.: Наука, 1968).
15. W. Gröbner, *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen* (Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1967).
16. Г. Е. О. Джакалья, *Методы теории возмущений для нелинейных систем* (М.: Наука, 1979).
17. А. Х. Найфе, *Методы возмущений* (М.: Наука, 1976).
18. К. В. Холшевников, *Асимптотические методы небесной механики* (Л.: Изд-во ЛГУ, 1985).
19. А. Уинтнер, *Аналитические основы небесной механики* (М.: Наука, 1967).
20. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Физматгиз, 1963).
21. Н. Батмунх, Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников, В. Ш. Шайдулин, Астрон. журн. **93**, 331 (2016).
22. https://ssd.jpl.nasa.gov, сайт NASA Solar System Dynamics.