

УДК 531.391;521.93

## ДОЛГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВАРИАЦИИ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ ЗЕМНОГО ПОЛЮСА, ВЫЗВАННЫЕ ЛУНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

© 2019 г. В. В. Перепелкин<sup>1\*</sup>, Л. В. Рыхлова<sup>2\*\*</sup>, А. С. Филиппова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский авиационный институт, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт астрономии РАН, Москва, Россия

Поступила в редакцию 29.06.2018 г.; принята в печать 13.09.2018 г.

На основе численно-аналитического подхода исследуются нерегулярные эффекты колебательного процесса земного полюса, связанные с изменением чандлеровского и годичного компонентов. Предлагается подход к исследованию колебательных процессов в движении земного полюса на основе совместного рассмотрения чандлеровской и годичной составляющих его движения. Показано, что в рамках такого подхода можно найти преобразование к новой системе координат, в которой движение полюса синхронизировано с прецессией лунной орбиты. Приведены оценки точности прогноза координат земного полюса с учетом дополнительных слагаемых, вызванных лунным возмущением.

DOI: 10.1134/S0004629919020075

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Создание динамических моделей движения деформируемой Земли относительно центра масс, которые с высокой точностью идентифицируют ее параметры вращения, важно для надежного прогноза колебательного движения полюса и является основополагающим при решении ряда задач астрометрии, навигации и геофизики. Высокоточные данные астрометрических измерений угловых параметров вращения Земли [1] позволяют заключить о сложности динамических процессов, происходящих в системе Земля–Луна–Солнце, что приводит к потребности уточнения математических моделей в принятых теориях вращательно-колебательного движения деформируемой Земли. Оно осуществляется на основе поиска компромисса между сложностью модели и точностью измерений, а также длительностью интервала процесса обработки. При этом проводится тщательный анализ состава базовых функций, их числа и настройка параметров. Обоснование разработанной модели проводится посредством выполнения численных экспериментов с помощью метода наименьших квадратов и спектрально-корреляционного анализа.

Уточнение модели движения полюса связано, с одной стороны, с учетом различных возмущающих факторов, с другой стороны с построением

обобщающей динамической модели, которая позволяет на качественном уровне проанализировать тонкие эффекты в колебательном процессе земного полюса.

Высокоточные наблюдения [1] позволяют выявлять неравномерности во вращении Земли с весьма малыми амплитудами. При этом ряд эффектов, которые можно обнаружить при анализе данных наблюдений, не имеют достоверных объяснений в теории вращения Земли.

Исследованиям движения Земли относительно центра масс посвящено множество научных работ. Современная проблема переменности параметров основных компонентов движения земного полюса актуальна и малоизучена. Она связана в первую очередь с исследованиями, направленными на установление геофизических и небесномеханических причин такого поведения чандлеровского и годичного компонентов, и с построением уточненных моделей прогноза параметров вращения Земли, необходимых для решения задач высокоточной навигации космических аппаратов [2].

Например, в современных работах [3, 4] устанавливается взаимосвязь вариаций амплитуды и фазы чандлеровского компонента с геофизическими процессами в атмосфере и океанах. В работах [5, 6] рассматривается вопрос влияния астрономических факторов на геофизические процессы планетарного масштаба. В частности, показано,

\*E-mail: vadimkin1@yandex.ru

\*\*E-mail: rykhlova@inasan.ru

что 40-летнему циклу вариации амплитуды чандлеровского компонента соответствует 20-летнее колебание амплитуды возмущающей функции чандлеровского компонента. Высказывается предположение о связи 20-летнего цикла с прецессией орбиты Луны.

В исследованиях [7, 8] рассматривается влияние параметрического резонанса в системе Земля–Луна на чандлеровское колебание, на качественном уровне исследуются изменения параметров чандлеровского компонента, обусловленные прецессионным движением лунной орбиты.

Согласно [1, 2, 9, 10], дифференциальные уравнения модели движения полюса можно получить из динамических уравнений Эйлера–Лиувилля с переменным тензором инерции

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} + \omega \times J\omega &= \mathbf{M} - \dot{J}\omega, \quad \omega = (p, q, r)^T, \quad (1) \\ J &= J^* + \delta J, \quad J^* = \text{const}, \\ J^* &= \text{diag}(A^*, B^*, C^*), \\ \delta J &= \delta J(t), \quad \|\delta J\| \ll \|J^*\|, \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}^S + \mathbf{M}^L - \dot{\mathbf{h}} - \omega \times \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Здесь  $\omega$  — вектор угловой скорости в связанной с Землей системе координат [1], которая качественно и количественно согласуется с ITRF. Оси выбранной системы координат приближенно совпадают с главными центральными осями инерции  $J^*$  “замороженной” фигуры Земли с учетом “экваториального выступа”. Считается, что малые вариации тензора инерции  $\delta J$  включают в себя различные гармонические составляющие, которые обусловлены регулярным возмущающим воздействием гравитационных суточных приливов от Солнца и Луны и, возможно, других, например, годовых, месячных и т.п.  $\mathbf{M}^S$  и  $\mathbf{M}^L$  — возмущающие моменты от Солнца и Луны соответственно, а  $\mathbf{h}$  — вектор кинетического момента атмосферы.

Из (1) после усреднения по углу собственного вращения дифференциальные уравнения движения земного полюса в первом приближении по  $p, q$  ( $p, q \ll r$ ) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{p} + N_p q &= j_{qr}^0 r_0^2 + \mu_p, \quad p(t_0) = p_0, \quad (2) \\ \dot{q} - N_q p &= -j_{pr}^0 r_0^2 + \mu_q, \quad q(t_0) = q_0, \\ N_p &= \frac{C^* - B^*}{A^*} r_0, \quad N_q = \frac{C^* - A^*}{B^*} r_0, \\ r_0 &= 7.29 \times 10^{-5} \text{ рад/с}, \end{aligned}$$

где  $\mu_p, \mu_q$  — возмущающие удельные моменты сил, приводящие к наблюдаемому движению полюса;  $j_{pr}^0 = -\langle J_{pr}/B^* \rangle$ ,  $j_{qr}^0 = -\langle J_{qr}/A^* \rangle$  — приливные “выступы”.

Математическая модель колебаний полюса Земли содержит две основные составляющие:

чандлеровское колебание с периодом около 433 зв. сут. и амплитудой, достигающей 0.2–0.25'', и годовое колебание с периодом, приблизительно равным одному году и амплитудой 0.07–0.08''. Координаты полюса ( $x_p, y_p$ ) описываются выражениями

$$\begin{aligned} x_p &= c_x(\tau) - a_x^c \cos 2\pi N\tau + a_x^s \sin 2\pi N\tau - \\ &\quad - Nd_x^c \cos 2\pi\tau - d_x^s \sin 2\pi\tau, \\ y_p &= c_y(\tau) + a_y^c \cos 2\pi N\tau + a_y^s \sin 2\pi N\tau - \\ &\quad - Nd_y^c \cos 2\pi\tau + d_y^s \sin 2\pi\tau, \\ N &\cong 0.84\text{--}0.85. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\tau$  — время, измеряемое стандартными годами;  $N$  — чандлеровская частота (выбирается на основе спектрального анализа длительного ряда наблюдений); величины  $c_x(\tau), c_y(\tau)$  представляют собой координаты точки среднего полюса. Оптимальные значения коэффициентов модели (3) находятся с помощью метода наименьших квадратов [11, 12] на основе статистической обработки астрометрических данных высокоточных измерений угловых параметров движения Земли. При этом выполняются приближенные равенства

$$a_x^{c,s} \approx a_y^{s,c}, \quad d_x^{c,s} \approx d_y^{s,c},$$

отражающие структурные свойства модели.

Целью данной работы является исследование динамики возмущенного колебания земного полюса с учетом прецессионного движения орбиты Луны. Как правило, изучение движения земного полюса основывается на двухчастотном представлении: разделении его движения на чандлеровский и годовые компоненты, которые затем рассматриваются независимо [1–3, 9, 10]. Для изучения возмущений, приводящих к вариациям параметров основных компонентов (чандлеровского и годового) колебаний полюса, наряду с подходом разделения на чандлеровский и годовые компоненты предлагается подход, в котором эти компоненты рассматриваются совместно. Комбинирование этих подходов может быть перспективным для объяснения некоторых новых свойств движения полюса и, в частности, связанных с динамикой движения системы Земля–Луна. Из рассмотренного ниже преобразования координат земного полюса следует, что некоторые вариации параметров чандлеровского и годового компонентов могут быть обусловлены возмущением от прецессии орбиты Луны.

## 2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО РЕЖИМА ЗЕМНОГО ПОЛЮСА НА ЧАСТОТЕ ПРЕЦЕССИИ ОРБИТЫ ЛУНЫ

На поверхности Земли траектория движения полюса (в связанной системе координат) представляет собой спиралевидную кривую, которую он

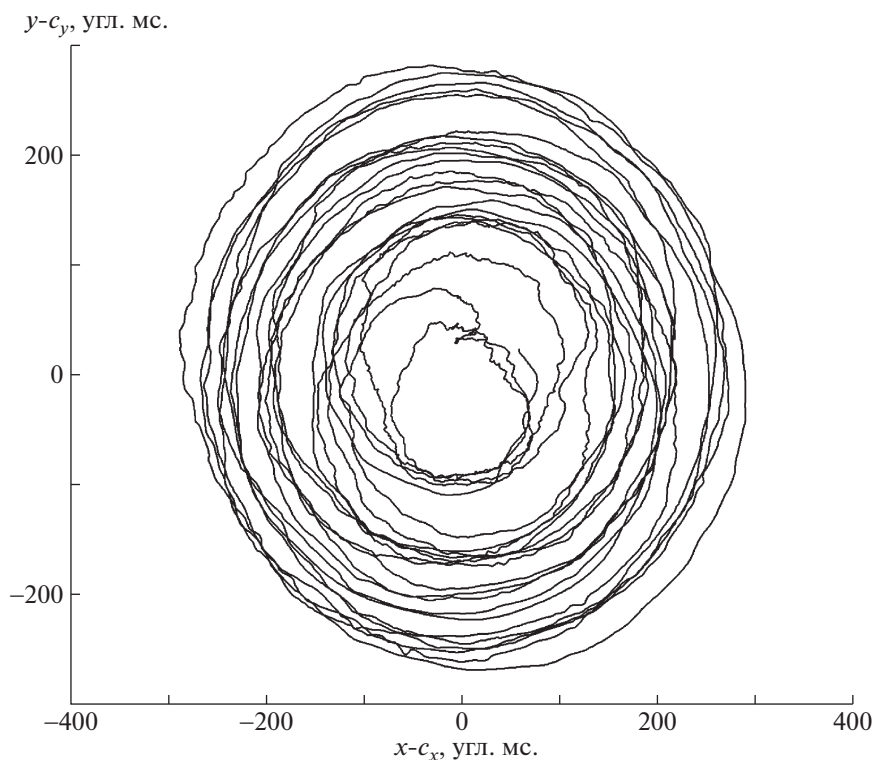


Рис. 1. Траектория движения земного полюса вокруг среднего положения на интервале времени с 1982 по 2006 г.

описывает, двигаясь вокруг средней точки (рис. 1). Движение средней точки (ее дрейф) имеет долгопериодический и вековой характер. Зависимость координат  $x_p, y_p$  полюса от времени получается как сложение трендовой составляющей с координатами  $c_x, c_y$ , чандлеровского и годичного компонентов с периодами 365.25 и 433 суток соответственно и мелкомасштабных колебаний, как правило, имеющих нерегулярный или квазирегулярный характер. Вследствие сложения чандлеровского и годичного компонентов радиус траектории изменяется в среднем от 70 до 230 мс дуги с периодом приблизительно 6.45 лет, что приводит к модуляции колебаний (см. рис. 1).

Для исследования вариаций основных компонентов колебаний полюса предлагается преобразование его координат в несколько этапов. Центрировав траекторию его движения вычетом трендовой составляющей, совершив поворот осей системы координат в сторону движения полюса на переменный угол  $Nt$ , соответствующий его “среднему” (равномерному) движению. Частота  $N$  является постоянной величиной, однако ее значение зависит от соотношения амплитуд чандлеровской и годичной гармоник. Для рассматриваемого далее интервала времени амплитуда чандлеровского колебания больше амплитуды годичного колебания и средняя частота обращения полюса по его траектории близка к чандлеровской частоте. В но-

вой системе  $(x_1, y_1)$ , вращающейся относительно исходной системы, полюс совершает циклическое квазипериодическое движение с периодом, соответствующим амплитудной модуляции чандлеровского и годичного компонентов.

Для амплитудно-частотного анализа колебательного процесса земного полюса также удобно представить выражения его координат в полярных параметрах:  $a$  — амплитуда результирующего колебания и  $\psi$  — фаза (полярный угол) его движения:

$$x_p = c_x + a \cos \psi, \quad y_p = c_y + a \sin \psi.$$

Первый этап преобразования можно проиллюстрировать в полярных координатах. Обозначим возмущения, приводящие к наблюдаемым колебаниям полюса, через  $\mu_x, \mu_y$ . Эти величины — возмущения в дифференциальных уравнениях его координат — имеют размерность удельного момента сил, умноженного на секунду. Тогда, опуская диссипативные слагаемые, дифференциальные уравнения вариации амплитуды и фазы движения полюса будут иметь вид [4]:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= [\mu_x \cos \psi + \mu_y \sin \psi], \\ \delta \dot{\psi}_{var} &= a^{-1} [\mu_y \cos \psi - \mu_x \sin \psi], \\ \delta \psi_{var} &= \psi - Nt. \end{aligned} \quad (4)$$

Параметры  $a, \delta \psi^{var}$  будут полярными координатами новой системы, которые соответствуют декартовым координатам  $(x_1, y_1)$ .

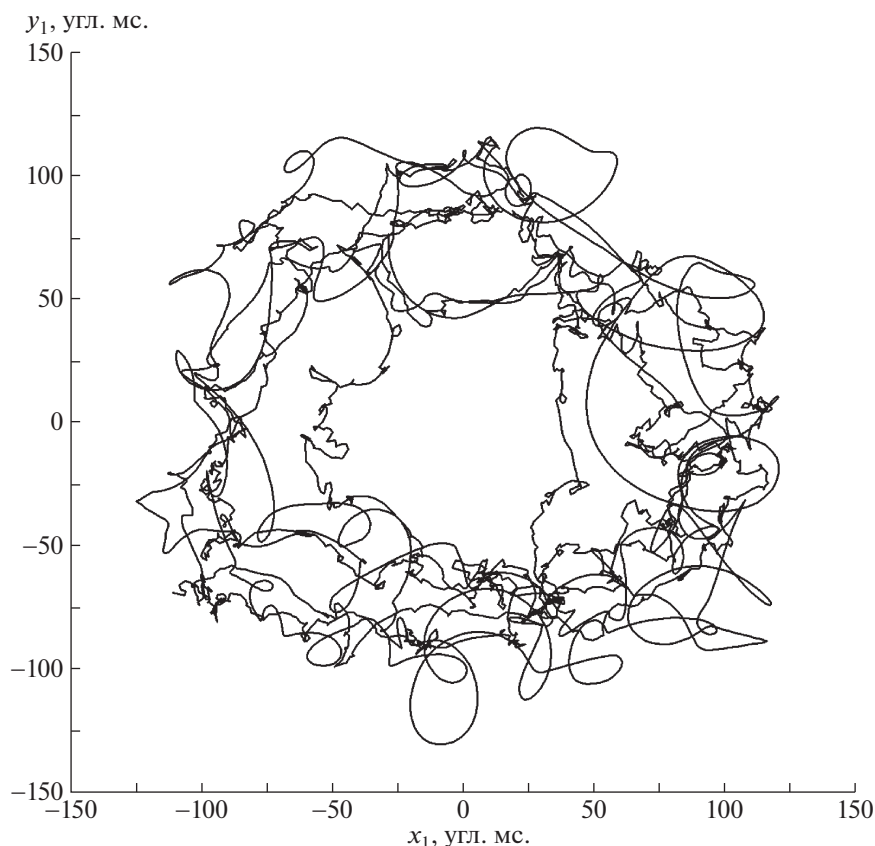


Рис. 2. Траектория движения земного полюса в системе координат  $(x_1, y_1)$ .

На рис. 2 показан результат преобразования наблюдений МСВЗ координат полюса Земли в интервале с 1982 по 2006 г. к новой системе  $(x_1, y_1)$ .

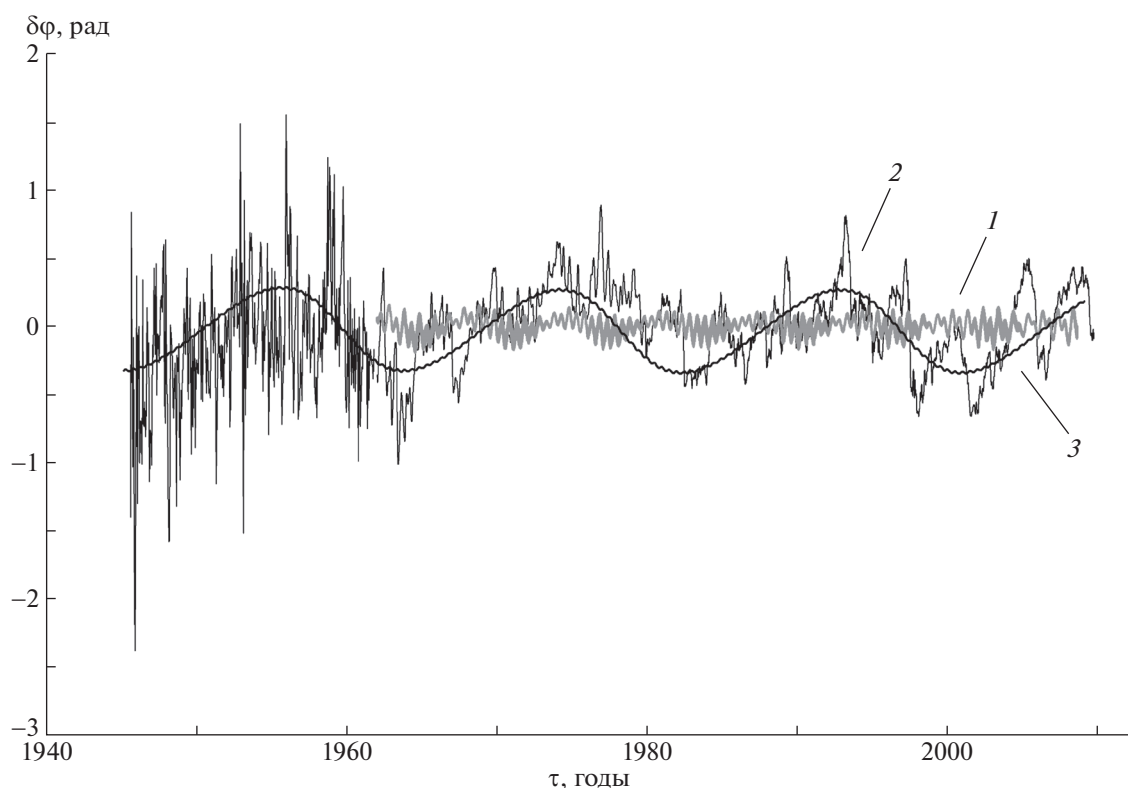
Во вращающейся относительно исходной системе координат движение полюса происходит главным образом с близким к 6-ти летнему периодом и имеет прямое движение (по направлению вращения Земли). В этой системе регулярная траектория полюса согласно двухчастотной модели его колебаний с постоянными коэффициентами будет являться “средней” для наблюдаемой его траектории и содержать гармоники с небольшими амплитудами и периодами не больше периода модуляции чандлеровского и годичного компонентов. То есть в новой системе иллюстрируется амплитудная модуляция чандлеровского и годичного компонентов, которая по двухчастотной модели носит регулярный характер, а согласно наблюдаемому движению — возмущенный.

Далее, обозначив через  $\nu_T \approx \nu_h - N$  среднюю частоту 6-летней модуляции, которую нетрудно определить из обработки данных наблюдений МСВЗ, аналогично первому преобразованию совершив переход к новой системе  $(\xi, \eta)$  посредством

последовательных сдвигов на постоянную величину (центрирования траектории) и вращения с частотой  $\nu_T$  в прямом направлении. В этой системе траектория иллюстрирует возмущения модуляции чандлеровского и годичного компонентов. На рис. 3 приведена зависимость полярного угла от времени в окончательной системе  $(\xi = b \cos \delta\varphi, \eta = b \sin \delta\varphi)$  для интервала с 1944 по 2006 г.

Во вращающейся системе координат  $(\xi, \eta)$  относительно исходной фаза движения полюса  $\delta\varphi$  (полярный угол) согласно двухчастотной модели чандлеровских и годичных колебаний с постоянными коэффициентами будет совершать мелкомасштабные колебания с периодами, не превышающими период их модуляции. Однако наблюдаемый полюс в этой системе совершает в несколько раз большее по амплитуде циклическое движение с частотой 0.0537 циклов в год, соответствующей частоте прецессии орбиты Луны.

Рис. 3 показывает удовлетворительную синфазность движения полюса и прецессии орбиты Луны. Для этого на график фазы  $\delta\varphi$  колебательного движения земного полюса, полученной согласно двухчастотной модели движения полюса с постоянными коэффициентами (кривая 1) и согласно



**Рис. 3.** Зависимости изменения полярного угла  $\delta\varphi$  земного полюса во вращающейся относительно исходной системе координат согласно двухчастотной модели чандлеровского и годовичного компонентов с постоянными коэффициентами (1), согласно результатам обработки данных наблюдений и измерений МСВЗ (2) и колебания вдоль экватора точки пересечения экватора с лунной орбитой (3).

наблюдениям МСВЗ (кривая 2) в новой системе координат, наложен график отклонения точки пересечения земного экватора и лунной орбиты от точки весеннего равноденствия (кривая 3). Периодическое отклонение точки пересечения земного экватора и лунной орбиты от точки весеннего равноденствия происходит вследствие прецессии орбиты Луны с периодом 18.61 лет. В новой системе координат график фазы движения земного полюса иллюстрирует возмущения в шестилетней модуляции чандлеровского и годовичного компонентов. Отметим, что сильные флуктуации, присутствующие на графике с 1945 до 1962 г., обусловлены большой ошибкой измерений положения земного полюса. До 1945 г. низкая точность измерений и, как следствие, сильные флуктуации требуют предварительного сглаживания до осуществления преобразования. Кроме того, наблюдаются интервалы, на которых амплитуда годовичного компонента больше чандлеровского, а средняя частота обращения полюса вокруг средней точки оказывается близкой к годовичной частоте. Заметим, что рассматриваемый процесс носит преимущественно квазирегулярный характер и на разных участках могут наблюдаться небольшие сдвиги фазы.

Для второго случая, если амплитуда чандлеровского компонента становится меньше амплитуды годовичного компонента, преобразование от исходной системы координат к новой осуществляется аналогично первому варианту. Однако частота обращения полюса вокруг средней точки в этом случае будет близка к годовичной частоте, так что система  $(x_1, y_1)$  получается из исходной последовательным сдвигом на постоянную величину и поворотом на угол, соответствующий годовому вращению. В полученной системе полюс, как и в первом случае, будет совершать циклическое движение с шестилетним периодом, соответствующим периоду биения полюса, но в обратном направлении. Затем, совершив сдвиг и поворот, соответствующий шестилетнему движению полюса в сторону его движения, перейдем к новой системе  $(\xi, \eta)$ .

Амплитуда  $b$  (радиус) траектории движения земного полюса в окончательной системе не содержит значимых периодических колебаний с периодом, близким к периоду прецессии орбиты Луны, однако имеет существенную постоянную составляющую  $b_0$ , что и позволяет рассматривать процесс как квазистационарный с достаточно стабильными средними параметрами.

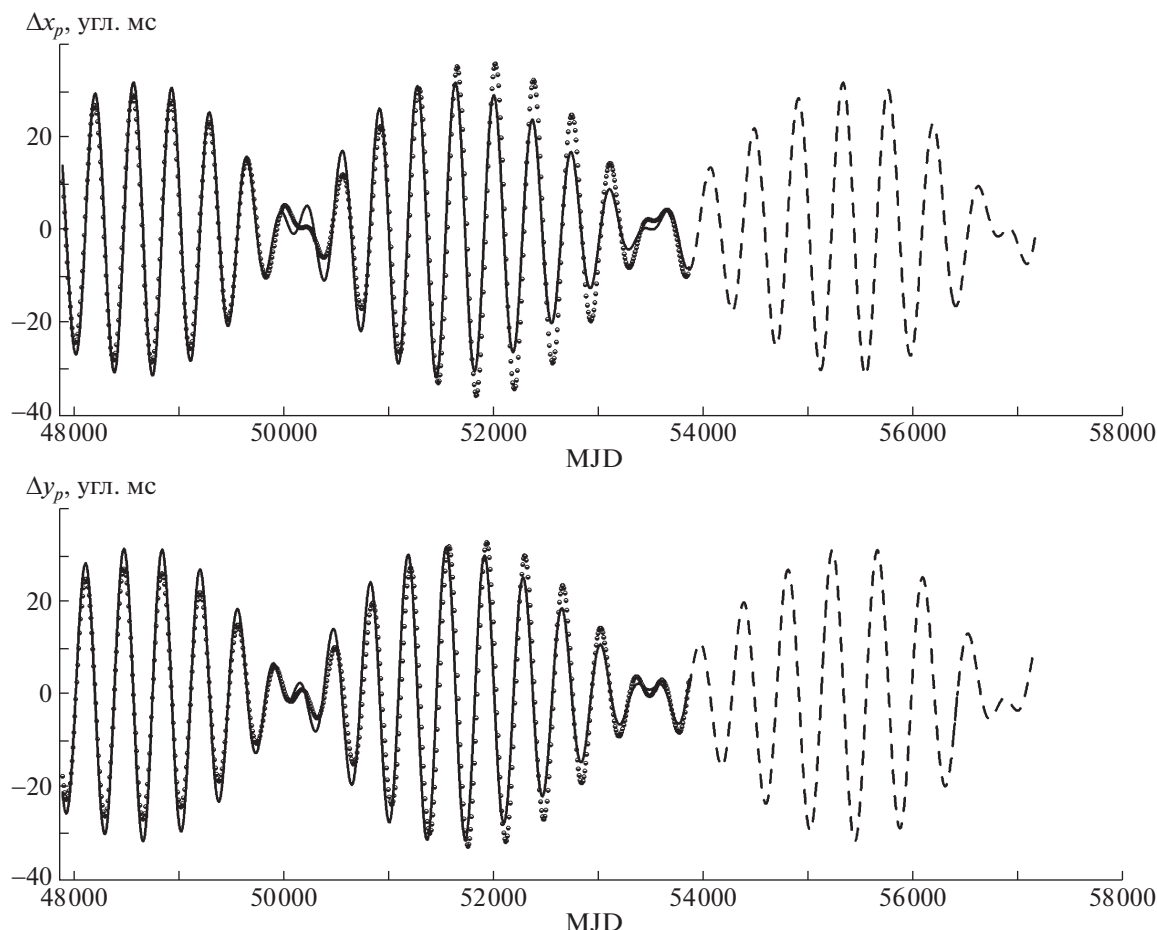


Рис. 4. Сравнение  $\Delta x_p$ ,  $\Delta y_p$  (сплошная и штриховая линии) с поправкой, полученной обработкой данных наблюдений МСВЗ (пунктир).

### 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПРОГНОЗА ДВИЖЕНИЯ ЗЕМНОГО ПОЛЮСА

Предложенное в предыдущем пункте преобразование системы координат, в которой рассматривается движение земного полюса, можно представить в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \xi_p \\ \eta_p \end{pmatrix} = \Pi(w_{ch/h} - w_1) \times \left[ \Pi(w_1) \begin{pmatrix} x_p - c_x \\ y_p - c_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (5)$$

$$w_{ch/h} = \begin{cases} w_h, & \text{если } a_h < a_{ch}, \\ w_{ch}, & \text{если } a_h > a_{ch}, \end{cases}$$

$$w_1 = \begin{cases} w_{ch}, & \text{если } a_h < a_{ch}, \\ w_h, & \text{если } a_h > a_{ch}, \end{cases}$$

$$\dot{w}_{ch} = 2\pi(0.84-0.85)\omega_*, \quad \dot{w}_h = 2\pi\omega_*,$$

$$\dot{h} = \frac{2\pi}{18.61}\omega_*.$$

Здесь  $a_h$  и  $a_{ch}$  — амплитуды годичного и чандлеровского колебания полюса;  $\omega_*$  — годовая частота.

В (5) введены следующие обозначения:  $\Pi$  — матрица плоского поворота;  $a_0$  — среднее значение амплитуды колебаний полюса вокруг “средней точки” (то есть без трендовой составляющей);  $c_x$ ,  $c_y$  задают положение “средней точки” полюса и содержат константы, вековые слагаемые и вариации с периодами больше шести лет;  $w_{ch/h} - w_1 = \pm\nu_T$  — частота шестилетнего циклического движения полюса в системе  $(x_1, y_1)$ .

В новой системе координат  $(\xi, \eta)$  удастся проиллюстрировать синхронные колебания полюса Земли с прецессионным движением орбиты Луны и определить регулярную составляющую вариации фазы  $\delta\varphi$ . Тогда, выполнив обратное преобразование вектора  $(b_0(\cos \delta\varphi - 1), b_0 \sin \delta\varphi)^T$  к исходной

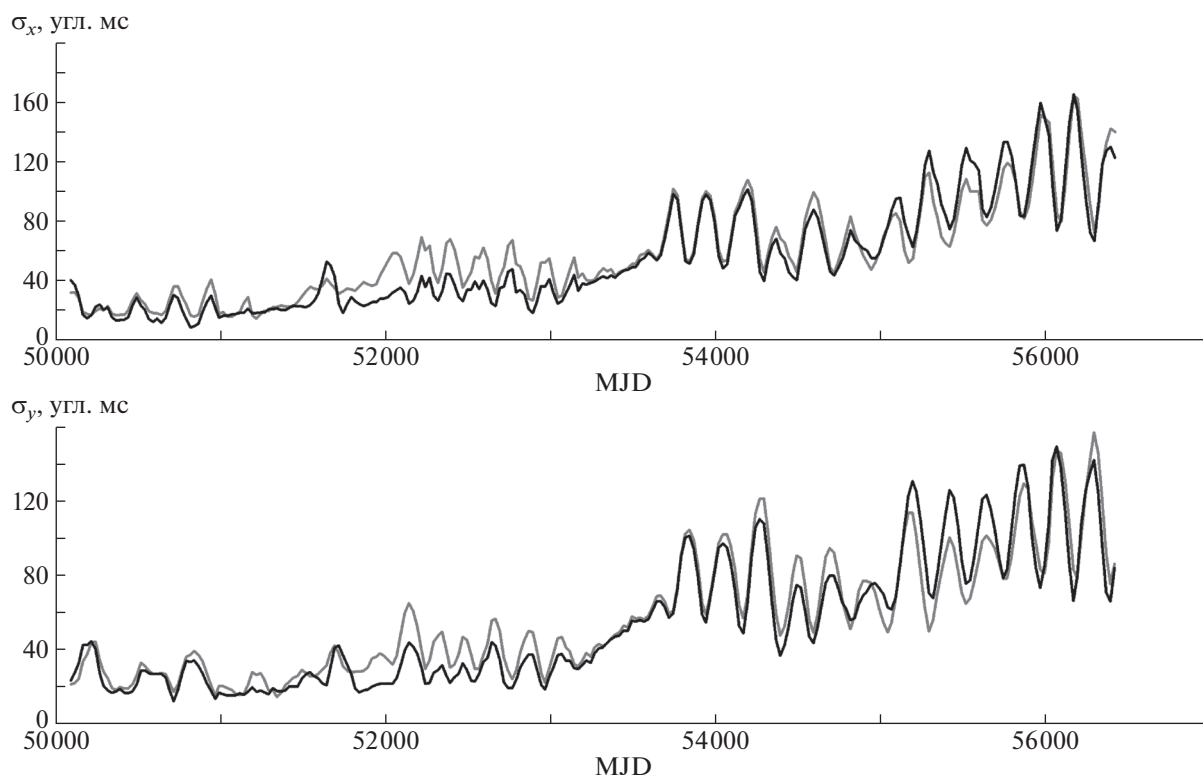


Рис. 5. Среднеквадратические отклонения прогнозов координат полюса согласно двухчастотной модели без учета (серая линия) и с учетом (черная линия) дополнительных слагаемых с годичной частотой без смены режима колебания.

системе, заданное выражением

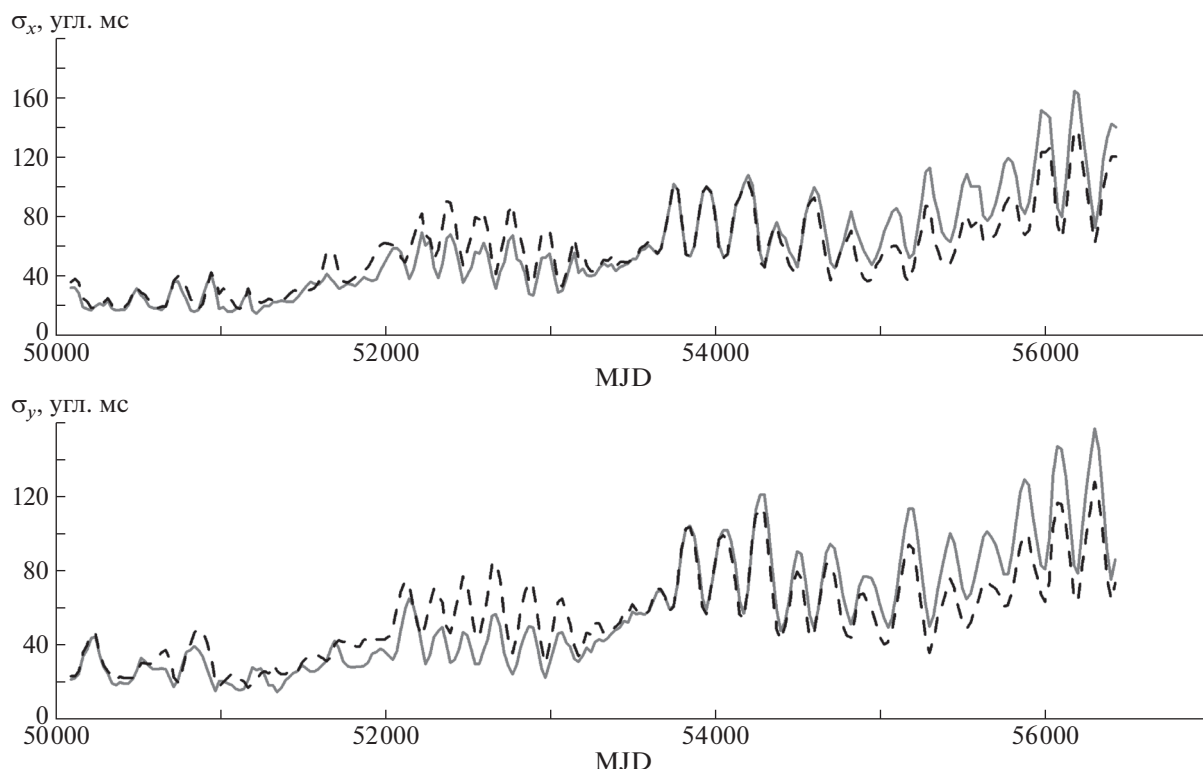
$$\begin{pmatrix} \Delta x_p \\ \Delta y_p \end{pmatrix} = b_0 \Pi^{-1}(w_1) \times \quad (6) \\ \times \Pi^{-1}(w_{ch/h} - w_1) \begin{pmatrix} \cos \delta\varphi - 1 \\ \sin \delta\varphi \end{pmatrix},$$

можно получить дополнительные слагаемые к основной двухчастотной модели (3) колебательно-го процесса земного полюса с определенными из наблюдений постоянными значениями амплитуд и фаз.

На рис. 4 даны дополнительные гармоники разработанной модели (сплошная и штриховая линии), полученные в результате обратного преобразования (6). Гармоники приведены в сравнении с соответствующими колебаниями, выделенными обработкой данных наблюдений МСВЗ координат земного полюса с помощью спектрального анализа. На графиках по осям ординат отложены дополнительные слагаемые координат полюса  $\Delta x_p$ ,  $\Delta y_p$ , измеряемые в угловых миллисекундах, а по оси абсцисс — время в сутках MJD (Modified Julian Date).

При смене колебательного режима (смене соотношения амплитуд чандлеровской и годичной

гармоник) изменится и преобразование (5–6), что приведет к изменению основной гармоники дополнительных слагаемых. Для интервала времени, рассмотренного на рис. 4, смена соотношения амплитуд чандлеровской и годичной гармоник имела место после 2006 г. ( $\gtrsim$  MJD 54 000). Так, до этого момента времени амплитуда чандлеровской составляющей была больше амплитуды годичной, средняя частота обращения полюса вокруг центральной точки соответствовала чандлеровской частоте и основная частота дополнительных слагаемых соответствовала частоте годичного колебания. В последующее время амплитуда годичной составляющей выросла, а амплитуда чандлеровского компонента уменьшилась, что привело к изменению соотношения амплитуд и изменению колебательного режима. На графиках дополнительные гармоники с разными частотами отмечены сплошной и штриховой линиями. Для второго интервала времени выделить гармоники обработкой данных наблюдений пока не представляется возможным, так как интервал наблюдений после 2006 г. слишком мал для отделения рассматриваемых частот от чандлеровской частоты. Хорошее совпадение кривой, полученной в результате преобразования (6), и гармоник, выделенных из данных измерений с помощью частотной фильтрации, показывает корректность проведенной процедуры.



**Рис. 6.** Среднеквадратические отклонения прогнозов координат полюса согласно двухчастотной модели без учета (серая сплошная линия) и с учетом (черная штриховая линия) дополнительных слагаемых с чандлеровской частотой без смены режима колебания.

Алгоритм построения прогноза согласно двухчастотной модели (3) заключается в оценивании неизвестных средних параметров чандлеровской и годичной гармоник на интервале аппроксимации. Оптимальные значения этих параметров, которые подвержены различным нестационарным возмущающим факторам и испытывают вариации, находятся с помощью метода наименьших квадратов на основе статистической обработки астрометрических данных высокоточных измерений угловых параметров движения Земли [12]. Посредством настройки алгоритма оптимальной фильтрации удастся построить достаточно надежный прогноз движения земного полюса, соответствующий данным измерений МСВЗ.

Введенные параметры трендового компонента основной модели (3) могут в пределах достаточно длительного интервала  $0 \leq \tau \leq \theta$  (где  $\theta$ , например, составляет  $\sim 10\text{--}15$  лет) подвергаться коррекции вида  $c_{x,y} = c_{x,y}^0 + c_{x,y}^1 \tau + \dots$  и аналогично для  $a_{x,y}^{c,s}$  и  $d_{x,y}^{c,s}$ . Для улучшения аппроксимации процесса колебаний вековые члены должны учитывать медленную эволюцию основных параметров системы.

Численное моделирование с учетом полученных в работе дополнительных членов осуществляется согласно аналогичной процедуре. Для определения коэффициентов чандлеровского и годичного

компонентов алгоритм применяется независимо к переменным  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  в виде шестимерных аппроксимаций в соответствии с моделью (3) с учетом заранее определенных с помощью рассмотренной процедуры дополнительных комбинационных гармоник:

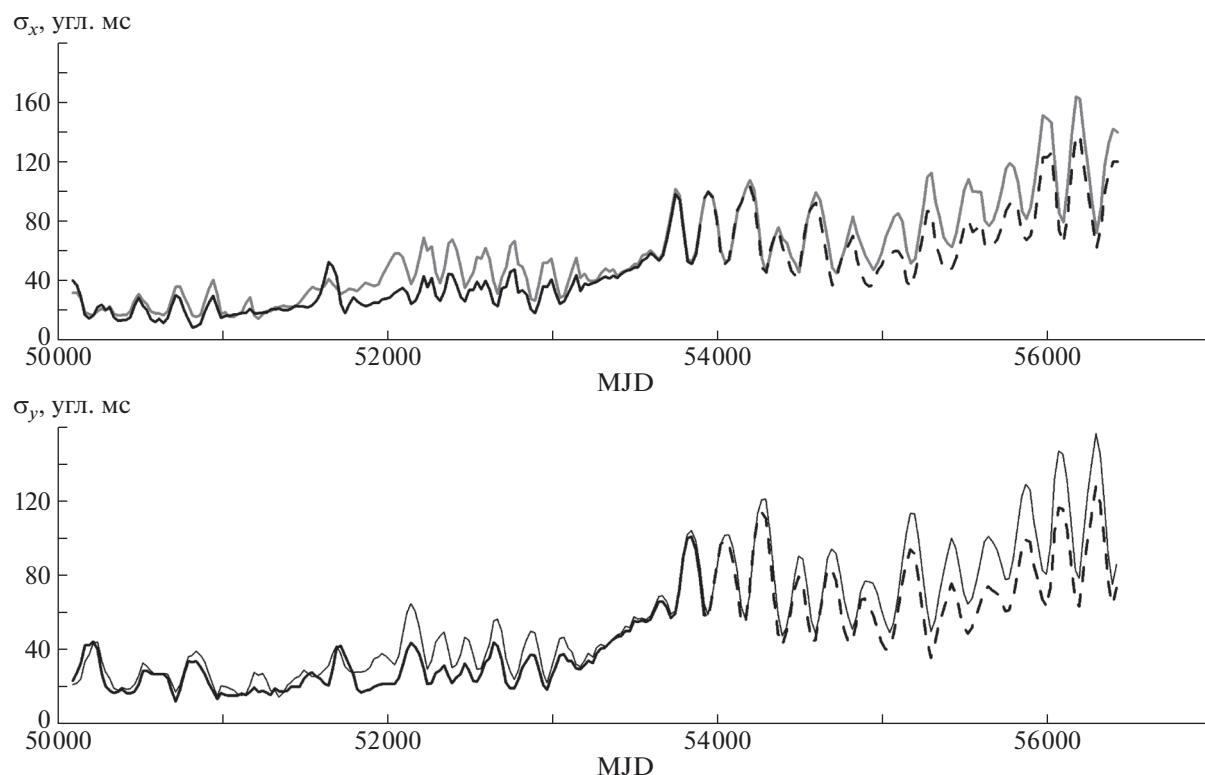
$$x(\tau) = (\xi, f(\tau)), \quad y(\tau) = (\eta, f(\tau)), \quad (7)$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_8)^T, \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_8)^T,$$

$$f(\tau) = (1, \tau, \cos 2\pi N\tau, \sin 2\pi N\tau, \cos 2\pi\tau, \sin 2\pi\tau)^T, \\ N \approx 0.84\text{--}0.85,$$

где  $N$  — чандлеровская частота;  $\tau$  — время в годах.

Существенный интерес для практики представляет применение модели движения земного полюса, функционирующей в автономном режиме, которая позволяет делать прогноз на достаточно длительные интервалы времени без коррекции параметров. В работе получены дополнительные слагаемые к основной модели движения полюса, которые не требуют коррекции коэффициентов. Однако они являются квазистационарными до тех пор, пока средняя частота обращения полюса вокруг центральной точки не изменится, а процесс не перейдет в другой режим, также квазистационарный. Таким образом, дополнительные слагаемые модели



**Рис. 7.** Среднеквадратические отклонения прогнозов координат полюса согласно двухчастотной модели без учета (серая сплошная линия) и с учетом (черные сплошная и штриховая линии) дополнительных слагаемых и смены режима колебания.

отвечают автономному режиму функционирования модели до смены частоты колебательного процесса полюса.

Исследуем вклад дополнительных слагаемых в точность прогноза координат полюса. Для этого на длительном интервале времени, непосредственно предшествующем интервалу прогнозирования (верификации модели) с помощью однократного применения процедуры (7) были определены коэффициенты чандлеровского и годового компонентов. Среднее значение частоты  $N$  выбиралось в результате спектрального анализа рядов наблюдений координат полюса на интервале аппроксимации. На 15-летнем интервале верификации модели (начиная с 1990 г.) двухлетние прогнозы строились с шагом 25 суток.

На рис. 5–7 даны среднеквадратические отклонения двухлетних прогнозов координат полюса согласно двухчастотной модели в автономном режиме без учета (серая линия) и с учетом (черные сплошная и штриховая линии) дополнительных слагаемых модели. По оси ординат отложены среднеквадратические отклонения модели, измеряемые в миллисекундах, а по оси абсцисс — время в сутках MJD.

Графики на рис. 5 и 6 строились без смены колебательных режимов, для режимов на годичной

(черная сплошная линия) и чандлеровской (черная штриховая линия) частотах соответственно. Полученные результаты показывают, что при смене соотношения амплитуд чандлеровской и годичной гармоник меняется режим колебаний найденных слагаемых. Если учесть смену частоты колебаний дополнительных членов (рис. 7), то среднеквадратические отклонения экстраполяций модели с учетом комбинационных лунных гармоник будут меньше, чем без их учета для 92% прогнозов 15-летнего интервала верификации.

Исходя из результатов проведенного численного моделирования и верификации модели на различных интервалах времени, можно сделать вывод о том, что при сохранении стабильности рассматриваемого колебательного процесса земного полюса с частотой, близкой, к частоте прецессии лунной орбиты, дополнительные слагаемые модели позволяют повысить точность определения положения земного полюса в среднем на 30 см при интервале прогноза от 2 до 8 лет в пределах одного колебательного режима полюса (до смены частоты колебаний дополнительных гармоник).

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе обработки астрометрических данных измерений выявлены динамические эффекты про-

пространственного движения системы Земля—Луна в колебательном процессе земного полюса. Показана зависимость вариаций параметров колебательного процесса земного полюса от прецессионного движения орбиты Луны. Предложен алгоритм уточнения модели движения земного полюса, учитывающий эффекты пространственного движения системы Земля—Луна, который может позволить повысить точность определения положения земного полюса в автономном режиме в среднем на 30 см при прогнозе на 2–8 лет до перехода колебательного процесса земного полюса в другой режим.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *International Earth Rotation and Reference Systems Service — IERS Annual Reports*, <http://www.iers.org>.
2. Ю. Г. Марков, В. В. Перепелкин, В. В. Чазов, А. О. Шемяков, Доклады АН **465** (6), 678 (2015).
3. C. Bizouard, F. Remus, S. Lambert, L. Seoane, and D. Gambis, *Astron. and Astrophys.* **526**, id. A106 (2011).
4. L. Zotov, C. Bizouard, and C. K. Shum, *Geodesy and Geodynamics* **7** (3), 216 (2016).
5. Н. С. Сидоренков, *Физика неустойчивостей вращения Земли* (М.: Наука, 2002).
6. L. Zotov and C. Bizouard, *J. Geodynamics* **62**, 30 (2012).
7. G. Kurbasova, L. Rykhlova, and G. Shlikar, *Astron. Rep.* **47** (6), 525 (2003).
8. Yu. G. Markov, V. V. Perepelkin, and A. S. Filippova, *Doklady Physics* **62** (6), 318 (2017).
9. Г. Мориц, А. Мюллер, *Вращение Земли. Теория и наблюдения* (Киев: Наукова Думка, 1992).
10. Н. Манк, Г. Макдональд, *Вращение Земли* (М.: Мир, 1964).
11. Л. Д. Акуленко, Ю. Г. Марков, В. В. Перепелкин, Л. В. Рыхлова, А. С. Филиппова, *Астрон. журн.* **90** (5), 432 (2013).
12. В. С. Губанов, *Обобщенный метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии* (С.-Пб.: Наука, 1997).