АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2019, том 96, № 5, с. 418–430

УДК 521.1

ОСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПРИ ВОЗМУЩАЮЩЕМ УСКОРЕНИИ, МЕНЯЮЩЕМСЯ ПО ЗАКОНУ ОБРАТНЫХ КВАДРАТОВ

© 2019 г. Т. Н. Санникова[1*], К. В. Холшевников[1,2**]

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

[2]Институт прикладной астрономии РАН, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 01.10.2018 г.; после доработки 16.12.2018 г.; принята к публикации 17.12.2018 г.

Рассмотрено движение точки нулевой массы под действием притяжения к центральному телу $\mathcal{S}$ и возмущающего ускорения $\mathbf{P}'$, величина которого обратно пропорциональна квадрату расстояния до $\mathcal{S}$. Направление $\mathbf{P}'$ постоянно в одной из трех наиболее употребительных в астрономии системах отсчета: основная инерциальная $\mathcal{O}$ и две орбитальные $\mathcal{O}_s$ с осью x по радиусу-вектору при $s = 1$ и по вектору скорости при $s = 2$. Отношение $|\mathbf{P}'|$ к основному ускорению, вызванному притяжением центрального тела, считаем малым. К уравнениям движения в оскулирующих элементах применено осредняющее преобразование в первом приближении по малому параметру. Получены замкнутые выражения для правых частей уравнений движения в средних элементах. В системах $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_1$ они выражены через элементарные функции; в системе $\mathcal{O}_2$ появляются полные эллиптические интегралы. Получены замкнутые выражения функций замены переменных. В системах $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_1$ все встречающиеся функции элементарны, кроме тех, что определяют вариацию средней аномалии. Последняя дается интегралом от элементарной функции, а также рядом по степеням эксцентриситета, сходящимся абсолютно и равномерно при $0 \leqslant e \leqslant 1$. В системе $\mathcal{O}_2$ все функции, кроме тех, что определяют вариацию средней аномалии, выражены через неполные эллиптические интегралы. Вариация средней аномалии вычисляется с помощью ряда Фурье по средней аномалии. Интегрирование осредненных уравнений движения будет выполнено в последующих работах. Возможные приложения рассмотренной модельной задачи: движение астероида с учетом эффекта Ярковского–Радзиевского и движение космического аппарата с солнечным парусом, когда возмущающее воздействие обратно пропорционально квадрату расстояния от Солнца. Разумеется, определение компонентов вектора $\mathbf{P}'$ требует знания теплофизических характеристик тела и параметров его вращательного движения в первом случае и определенного управления парусом во втором.

DOI: 10.1134/S0004629919050050

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть в $\mathbb{R}^3$ имеется система двух точечных масс: неподвижное тело $\mathcal{S}$ (например, Солнце) массой m_0 и малое тело $\mathcal{A}$ (напр., астероид), движущееся под действием силы притяжения к точке $\mathcal{S}$ и возмущающего ускорения $\mathbf{P}'$. Введем три координатные системы с общим началом в $\mathcal{S}$, но с разными направлениями осей: основная инерциальная $\mathcal{O}$ с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ и две сопутствующие $\mathcal{O}_s$ с ортами $\mathbf{i}_s$, $\mathbf{j}_s$, $\mathbf{k}_s$. Орты системы $\mathcal{O}_1$ направлены по радиусу-вектору, трансверсали — перпендикулярно к радиусу-вектору в плоскости оскулирующей орбиты в сторону движения, и бинормали — по вектору площадей. Орты системы $\mathcal{O}_2$ направлены по вектору скорости, главной нормали к оскулирующей орбите и бинормали. В качестве вспомогательной понадобится также система $\mathcal{O}_3$ с ортами, направленными в перицентр оскулирующей орбиты, по нормали к $\mathbf{i}_3$ в плоскости оскулирующей орбиты в сторону движения и бинормали [1]. В [2, 3] рассмотрены задачи о движении $\mathcal{A}$ при возмущающем ускорении $\mathbf{P}'$, постоянном в одной из описанных систем отсчета. Там же указаны астрономические приложения этих модельных задач.

Теперь мы рассмотрим аналогичные задачи при $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/r^2$, $r = \mathcal{SA}$, где постоянным в одной из систем отсчета является вектор $\mathbf{P}$. Отношение модулей возмущающего и основного ускорения $\left(P/r^2\right)\left(\varkappa^2/r^2\right)^{-1} = P/\varkappa^2 = \mu$ постоянно и считается малым. Здесь $\varkappa^2$ — произведение постоянной тяготения на массу $\mathcal{S}$. В настоящей работе

*E-mail: TNSannikova@gmail.com

**E-mail: kvk@astro.spbu.ru

мы получим уравнения движения типа Лагранжа в оскулирующих элементах, явный вид осредняющей замены переменных и уравнения движения в средних элементах. В следующей работе будет рассмотрено интегрирование последних уравнений.

Задачи при $\mathbf{P}' = \text{const}$ и $\mathbf{P} = \text{const}$ во многом схожи, что позволяет часто ограничиваться ссылками на [3]. Основное отличие заключается в использовании истинной аномалии наряду с эксцентрической, поскольку в этом случае множитель r^{-2} становится тригонометрическим многочленом.

Можно указать по меньшей мере два приложения рассматриваемой задачи. Это движение астероида с учетом эффекта Ярковского-Радзиевского и движение космического аппарата с солнечным парусом. В обоих случаях возмущающее воздействие обратно пропорционально квадрату расстояния от Солнца.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

В качестве переменных выберем оскулирующие элементы ω, e, i, Ω, σ, M — среднее движение, эксцентриситет, наклон, долгота восходящего узла, аргумент перицентра и средняя аномалия соответственно. Первые пять из них образуют вектор медленных переменных $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5)$, а последний — быструю переменную y. Во всех используемых системах отсчета уравнения движения типа Эйлера [4] имеют форму

$$\dot{\mathbf{x}} = \mu \mathbf{f}(\mathbf{x}, y),$$
$$\dot{y} = x_1 + \mu g(\mathbf{x}, y)$$

с малыми (порядка μ) правыми частями, различаясь лишь видом функций $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_5)$, g. Последние фактически приведены в [1]: надо лишь заменить f_s, g на f_s/r^2, g/r^2.

В основной системе $\mathcal{O}$ имеем:

$$f_1 = \frac{3}{a^3\eta}\left[\frac{a^2}{r^2}\Phi_1 \sin\theta - \frac{a^2}{r^2}(e + \cos\theta)\Phi_2\right], \qquad (1)$$

$$f_2 = \frac{1}{\varkappa a^{3/2}\eta}\Bigg[-\frac{a}{r}(e + \cos\theta)\Phi_1 \sin\theta + {}$$
$$+ \frac{a}{2r}(3 + 4e\cos\theta + \cos 2\theta)\Phi_2\Bigg],$$

$$f_3 = \frac{a}{\varkappa a^{3/2} r\eta}\Phi_3 \cos w,$$

$$f_4 = \frac{a}{\varkappa a^{3/2} r\eta \sin i}\Phi_3 \sin w,$$

$$f_5 = -\frac{1}{2\varkappa a^{3/2} e\eta}\Bigg[\frac{a}{r}(3 + 2e\cos\theta - \cos 2\theta)\Phi_1 - {}$$
$$- \frac{a}{r}\Phi_2 \sin 2\theta\Bigg] - f_4 \cos i,$$

$$g = \frac{1}{\varkappa a^{3/2} e}\Bigg[\frac{a}{2r}(3 - 2e\cos\theta - \cos 2\theta)\Phi_1 - {}$$
$$- \frac{a}{r}(\cos\theta + 2e)\Phi_2 \sin\theta\Bigg].$$

Здесь и ниже $a = \varkappa^{2/3}\omega^{-2/3}$ — большая полуось, $p = a\eta^2$ — фокальный параметр, $\eta = \sqrt{1 - e^2}$, $r = p/(1 + e\cos\theta) = a(1 - e\cos E)$, где θ — истинная и E — эксцентрическая аномалии, $w = \sigma + \theta$ — аргумент широты. Компоненты $\mathbf{P}$ во вспомогательной системе $\mathcal{O}_3$ обозначены через Φ_s. Они связаны с компонентами P_s в основной системе соотношением

$$\Phi_s = b_{1s}P_1 + b_{2s}P_2 + b_{3s}P_3,$$

где b_{ks} — элементы матрицы вращения

$$\begin{pmatrix} \cos\sigma\cos\Omega - \cos i \sin\sigma \sin\Omega & -\sin\sigma\cos\Omega - \cos i\cos\sigma\sin\Omega & \sin i \sin\Omega \\ \cos\sigma\sin\Omega + \cos i\sin\sigma\cos\Omega & -\sin\sigma\sin\Omega + \cos i\cos\sigma\cos\Omega & -\sin i\cos\Omega \\ \sin i\sin\sigma & \sin i\cos\sigma & \cos i \end{pmatrix}.$$

Таким образом, функции Φ_s зависят только от медленных переменных i, σ, Ω. Тригонометрические функции от аргумента широты равны

$$\cos w = \cos(\sigma + \theta) = \cos\sigma\cos\theta - \sin\sigma\sin\theta,$$
$$\sin w = \sin(\sigma + \theta) = \sin\sigma\cos\theta + \cos\sigma\sin\theta.$$

В сопровождающей системе $\mathcal{O}_1$

$$f_1 = -\frac{3}{a^3\eta}\left(e\frac{a^2}{r^2}S\sin\theta + \eta^2\frac{a^3}{r^3}T\right), \qquad (2)$$

$$f_2 = \frac{\eta}{\varkappa a^{3/2} e}\left[e\frac{a^2}{r^2}S\sin\theta + \left(\eta^2\frac{a^3}{r^3} - \frac{a}{r}\right)T\right],$$
$$f_3 = \frac{a}{\varkappa a^{3/2} r\eta} W\cos w,$$
$$f_4 = \frac{a}{\varkappa a^{3/2} r\eta\sin i} W\sin w,$$
$$f_5 = -\frac{\eta}{\varkappa a^{3/2} e}\frac{a^2}{r^2}S\cos\theta + {}$$
$$+ \frac{\sin\theta}{\varkappa a^{3/2}\eta e}\left(\frac{a}{r} + \eta^2\frac{a^2}{r^2}\right)T - f_4\cos i,$$
$$g = \frac{1}{2\varkappa a^{3/2} e}(-3e + 2\cos\theta + e\cos 2\theta)\frac{a}{r}S - {}$$
$$- \frac{\sin\theta}{\varkappa a^{3/2} e}\left(\frac{a}{r} + \eta^2\frac{a^2}{r^2}\right)T.$$

Постоянные S, T, W — компоненты $\mathbf{P}$ в системе $\mathcal{O}_1$. Заметим, что $W = \Phi_3$.

В сопровождающей системе $\mathcal{O}_2$

$$f_1 = -\frac{3}{a\eta}\vartheta\frac{\mathfrak{T}}{r^2}, \tag{3}$$
$$f_2 = \frac{2\sqrt{p}(e+\cos\theta)}{\varkappa\vartheta}\frac{\mathfrak{T}}{r^2} - \frac{r\sqrt{p}\sin\theta}{\varkappa a\vartheta}\frac{\mathfrak{N}}{r^2},$$
$$f_5 = \frac{2\sqrt{p}\sin\theta}{\varkappa e\vartheta}\frac{\mathfrak{T}}{r^2} + {}$$
$$+ \frac{2e + (1+e^2)\cos\theta}{\varkappa\sqrt{p}e\vartheta}\frac{\mathfrak{N}}{r} - f_4\cos i,$$
$$g = -\frac{2\sin\theta(1+e^2+e\cos\theta)}{\varkappa e\sqrt{a}\vartheta}\frac{\mathfrak{T}}{r} - {}$$
$$- \frac{(1-e^2)\cos\theta}{\varkappa e\sqrt{a}\vartheta}\frac{\mathfrak{N}}{r},$$

где

$$\vartheta(\theta, e) = \sqrt{1 + e^2 + 2e\cos\theta}. \tag{4}$$

Постоянные $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{N}$, W — компоненты $\mathbf{P}$ в системе $\mathcal{O}_2$. Мы опустили функции f_3, f_4, поскольку они совпадают с приведенными в (2).

3. ПРОЦЕДУРА ОСРЕДНЕНИЯ

Выполним, *ограничиваясь первым порядком малости*, близкую к тождественной осредняющую замену переменных $(\mathbf{x}, y) \longleftrightarrow (\mathbf{X}, Y)$, устраняющую быструю угловую переменную Y из уравнений в средних элементах $(\mathbf{X}, Y)$. Подробности см. в [2, 3, 5]. Заметим лишь, что ни резонансов, ни малых знаменателей мы не встретим, поскольку налицо лишь одна быстрая переменная Y.

Замена переменных:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, Y), \quad \mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, y), \tag{5}$$
$$y = Y + v(\mathbf{X}, Y), \quad Y = y - v(\mathbf{x}, y).$$

Уравнения движения в новых (средних) элементах:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \tag{6}$$
$$\dot{Y} = X_1 + G(\mathbf{X}),$$

где

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathcal{E}\mathbf{f}(\mathbf{X}, Y), \quad G(\mathbf{X}) = \mathcal{E}g(\mathbf{X}, Y).$$

Здесь и ниже мы пользуемся интегральными операторами

$$\mathcal{E}f(\mathbf{X}, Y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathbf{X}, Y)\, dY, \tag{7}$$
$$\mathcal{I}f(\mathbf{X}, Y) = \int \left[f(\mathbf{X}, Y) - \mathcal{E}f(\mathbf{X}, Y)\right]\, dy.$$

Последняя первообразная определяется однозначно условием нулевого среднего

$$\mathcal{E}\mathcal{I}f(\mathbf{X}, Y) = 0. \tag{8}$$

Во всех используемых системах отсчета функции $\mathbf{f}, g$ выражены явно через истинную аномалию. При необходимости их легко выразить через эксцентрическую аномалию. Поэтому интегралы (7) вычисляются переходом к θ или E:

$$dy = dM = \frac{r^2}{a^2\eta}\, d\theta = \frac{r}{a}\, dE, \tag{9}$$

при этом пределы интегрирования $-\pi$, π не меняются. Напомним, что среднее значение нечетной функции равно нулю, а среднее значение четной функции можно найти интегралом от 0 до π.

Определяющие замену переменных величины $\mathbf{u}, v$ даются соотношениями

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, y) = \frac{1}{X_1}\mathcal{I}\mathbf{f}(\mathbf{x}, y), \tag{10}$$
$$v(\mathbf{x}, y) = \frac{1}{X_1}\mathcal{I}\left[u_1(\mathbf{x}, y) + g(\mathbf{x}, y)\right].$$

Обратим внимание, что $u_1, \ldots, u_5$ находятся одной квадратурой, тогда как v — двумя. Вторая — это интеграл от u_1.

Замечание 1. Функции $\mathbf{u}, v$ имеют первый порядок малости по μ. Разности $\mathbf{u}(\mathbf{x}, y) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, Y)$ периодичны как по y, так и по Y и имеют второй порядок. Поэтому в (5) безразлично, считать ли аргументами $\mathbf{u}, v$ средние или оскулирующие элементы. Напротив, в (6) мы имеем дело именно со средними элементами. Однако для средних элементов, отвечающих оскулирующим $\omega, e, \ldots$ мы не вводим новых обозначений типа $\omega', e', \ldots$, поскольку в (6) оскулирующие элементы *не встречаются*.

4. ОСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Величины Φ_1, Φ_2 зависят лишь от медленных переменных, а Φ_3, S, T, W, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{N}$ постоянны. Поэтому вычисление $\mathbf{F}$, G в системах $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_1$ сводится к нахождению нескольких коэффициентов Ганзена с нулевым нижним индексом (см. Приложение 1).

Приведем правые части уравнений (6) в системе $\mathcal{O}$:

$$F_1 = -\frac{3\omega^2 e}{\varkappa^2\eta^2}\Phi_2,$$
$$F_2 = \frac{\omega(1+2\eta)}{\varkappa^2(1+\eta)}\Phi_2,$$
$$F_3 = -\frac{\omega e\cos\sigma}{\varkappa^2\eta(1+\eta)}\Phi_3,$$
$$F_4 = -\frac{\omega e\sin\sigma}{\varkappa^2\eta(1+\eta)\sin i}\Phi_3,$$
$$F_5 = -\frac{\omega(2+\eta)}{\varkappa^2 e(1+\eta)}\Phi_1 - F_4\cos i,$$
$$G = \frac{\omega(1+2\eta+e^2)}{\varkappa^2 e(1+\eta)}\Phi_1.$$

В знаменателях G и первого слагаемого F_5 присутствует e, а в знаменателях F_4 и тем самым второго слагаемого F_5 присутствует $\sin i$.

Правые части (6) в системе $\mathcal{O}_1$ еще проще:

$$F_1 = -\frac{3\omega^2}{\varkappa^2\eta^2}T, \tag{11}$$
$$F_2 = \frac{\omega e}{\varkappa^2(1+\eta)}T,$$
$$F_3 = -\frac{\omega e\cos\sigma}{\varkappa^2\eta(1+\eta)}W,$$
$$F_4 = -\frac{\omega e\sin\sigma}{\varkappa^2\eta(1+\eta)\sin i}W,$$
$$F_5 = -F_4\cos i$$
$$G = -\frac{2\omega}{\varkappa^2}S.$$

По-прежнему в знаменателях F_4 и F_5 присутствует $\sin i$, однако эксцентриситет в знаменателях не появляется. Интересно, что радиальный компонент S возмущающего ускорения не влияет на орбиту $\mathcal{A}$, а лишь на положение $\mathcal{A}$ на орбите.

Перейдем к системе $\mathcal{O}_2$, где коэффициенты Ганзена не работают, и появляются эллиптические интегралы. Они собраны в Приложении 3. Приведем окончательный результат:

$$F_1 = -\frac{6\omega^2}{\pi\varkappa^2(1-e)}\mathbf{E}(k)\mathfrak{T}, \tag{12}$$
$$F_2 = \frac{4\omega}{\pi\varkappa^2}\left[\mathbf{K}(k) - \frac{2\mathbf{D}(k)}{1+e}\right]\mathfrak{T},$$
$$F_5 = \frac{2\omega}{\pi\varkappa^2}\mathbf{K}(e)\mathfrak{N} - F_4\cos i,$$
$$G = \frac{2\omega\eta}{\pi\varkappa^2}\mathbf{K}(e)\mathfrak{N}.$$

Здесь и ниже использованы стандартные обозначения для полных и неполных эллиптических интегралов в форме Лежандра:

$$\mathbf{K}(k) = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{h(x,k)},$$
$$\mathbf{E}(k) = \int\limits_0^{\pi/2} h(x,k)\,dx,$$
$$\mathbf{D}(k) = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x\,dx}{h(x,k)} = \frac{\mathbf{K}(k)-\mathbf{E}(k)}{k^2},$$
$$\mathcal{F}_1(\varphi,k) = \int\limits_0^{\varphi}\frac{dx}{h(x,k)},$$
$$\mathcal{F}_2(\varphi,k) = \int\limits_0^{\varphi} h(x,k)\,dx,$$
$$\mathcal{F}_3(\varphi,k) = \int\limits_0^{\varphi}\frac{\sin^2 x\,dx}{h(x,k)} = \frac{\mathcal{F}_1(\varphi,k)-\mathcal{F}_2(\varphi,k)}{k^2},$$

где $h(x,k) = \sqrt{1-k^2\sin^2 x}$. В формулах (12)

$$k = \frac{2\sqrt{e}}{1+e}.$$

С ростом e от 0 до 1 параметр k также возрастает от 0 до 1, причем $e \leqslant k$; равенство достигается только при $e = k = 0$ и $e = k = 1$.

В уравнениях (12) мы опустили F_3, F_4, т.к. они совпадают с приведенными в (11). Как и в системе $\mathcal{O}_1$, в знаменателях F_4 и F_5 присутствует $\sin i$, а эксцентриситет в знаменателях не появляется.

Обратим также внимание на присутствие η или $1-e$ в знаменателях F_1, F_3, F_4, F_5 во всех системах отсчета. Функции F_2, G свободны от этого недостатка. Однако в системе $\mathcal{O}_2$ они пропорциональны комбинациям эллиптических интегралов, стремящихся к бесконечности при $e \to 1$ (см. формулы (12)). Эта сингулярность несущественна, поскольку

$$\lim_{e\to 1}\left[\mathbf{K}(k) - \frac{2\mathbf{D}(k)}{1+e}\right] = 1, \quad \lim_{e\to 1}\eta\mathbf{K}(e) = 0.$$

Замечание 2. Эллиптические интегралы вычисляются тем быстрее, чем меньше их модуль. Поскольку $e < k$ при $0 < e,\ k < 1$, целесообразно перейти от модуля k к модулю e по приведенным в [6, 7] формулам[1]:

$$\mathbf{K}(k) = (1+e)\mathbf{K}(e), \tag{13}$$

$$\mathbf{E}(k) = \frac{2\mathbf{E}(e) - (1-e^2)\mathbf{K}(e)}{1+e}.$$

Отсюда следует

$$\mathbf{K}(k) - \frac{2}{1+e}\mathbf{D}(k) = \frac{\mathbf{E}(e) - (1-e^2)\mathbf{K}(e)}{e}. \tag{14}$$

Формулы (13), (14) можно использовать при вычислении функций F_1, F_2, определенных соотношениями (12).

5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Вычислим определяющие замену переменных функции u_s, v по формулам (10).

5.1. Основная система отсчета $\mathcal{O}$

Все необходимые интегралы от функций (1) вычислены в Приложениях 1 и 2. Приведем окончательный результат для u_s.

$$u_1 = -\frac{3\omega}{\varkappa^2\eta^2}\Big\{(\cos\theta + e)\Phi_1 + \tag{15}$$
$$+ [\sin\theta + e(\theta - M)]\Phi_2\Big\},$$

$$u_2 = \frac{1}{\varkappa^2}\left[\frac{1}{e}\cos\theta - \right.$$
$$-\frac{\eta^2}{e^2}\left(\ln(1+e\cos\theta) - \ln\frac{2\eta^2}{1+\eta}\right) +$$
$$\left. + (1-\eta)\left(1 + \frac{\eta}{e^2}\right)\right]\Phi_1 + \frac{1}{\varkappa^2 e^2}\Big[\eta(E-M) +$$
$$+ \left(2e^2 - 1\right)(\theta - M) + e\sin\theta\Big]\Phi_2,$$

$$u_3 = \frac{1}{\varkappa^2\eta e}\Bigg\{\cos\sigma\,[\eta(\theta - M) - (E - M)] +$$
$$+ \eta\sin\sigma\left[\ln(1+e\cos\theta) + 1 - \eta - \ln\frac{2\eta^2}{1+\eta}\right]\Bigg\}\Phi_3,$$

$$u_4 = \frac{1}{\varkappa^2\eta e\sin i}\Bigg\{\sin\sigma\,[\eta(\theta - M) - (E - M)] -$$
$$- \eta\cos\sigma\left[\ln(1+e\cos\theta) + 1 - \eta - \ln\frac{2\eta^2}{1+\eta}\right]\Bigg\}\Phi_3,$$

$$u_5 = -\frac{1}{2\varkappa^2\eta e}\left[2\eta\frac{1+e^2}{e^2}(\theta - M) - \right.$$
$$\left. - \frac{2\eta^2}{e^2}(E - M) - \frac{2\eta}{e}\sin\theta\right]\Phi_1 -$$
$$- \frac{1}{\varkappa^2 e^3}\Big[e\cos\theta - \ln(1 + e\cos\theta) +$$
$$+ \ln\frac{2\eta^2}{1+\eta} + \eta - \eta^2\Big]\Phi_2 - u_4\cos i.$$

Для определения v необходимо, кроме интеграла от g,

$$\frac{1}{\omega}\mathcal{I}g = \frac{1}{\varkappa^2 e^3}\Big[\eta^3(\theta - M) + \tag{16}$$
$$+ (3e^2 - 1)(E - M) - \eta e\sin\theta\Big]\Phi_1 +$$
$$+ \frac{\eta}{\varkappa^2 e}\left[\frac{1}{e}\cos\theta + \left(2 - \frac{1}{e^2}\right) \times \right.$$
$$\times \left(\ln(1+e\cos\theta) - \ln\frac{2\eta^2}{1+\eta}\right) +$$
$$\left. + (1-\eta)\left(2 + \frac{\eta}{e^2}\right)\right]\Phi_2,$$

вычислить интеграл от u_1. Интегралы от $\cos\theta + e$ и $\sin\theta$ вычислены в Приложении 2 (п. 2 и п. 3). Интеграл от разности аномалий разбивается на два интеграла (см. Приложение 2, п. 4):

$$\mathcal{I}(\theta - M) = \mathcal{I}(\theta - E) + \mathcal{I}(E - M) =$$
$$= \mathcal{I}(\theta - E) - e\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) + \frac{e^2}{4}\cos 2E.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\omega}\mathcal{I}u_1 = \frac{3}{\varkappa^2\eta^2}\Bigg\{-\eta^2\Phi_1\sin E +$$
$$+ \left[\frac{e(\eta + e^2)}{2} + (\eta + e^2)\cos E - \right.$$
$$\left. - \frac{e^3}{4}\cos 2E - e\mathcal{I}(\theta - E)\right]\Phi_2\Bigg\},$$

что вместе с (16) дает

$$v = \frac{1}{\varkappa^2 e^3}\left[\eta^3(\theta - M) - (E - M) - \eta e\sin\theta\right]\Phi_1 +$$
$$+ \frac{1}{\varkappa^2}\left[\frac{\eta}{e^2}\cos\theta + \frac{\eta}{e}\left(2 - \frac{1}{e^2}\right) \times \right.$$
$$\times \left(\ln(1+e\cos\theta) - \ln\frac{2\eta^2}{1+\eta}\right) +$$
$$+ \frac{\eta - \eta^2}{e}\left(2 + \frac{\eta}{e^2}\right) + \frac{3e(\eta + e^2)}{2\eta^2} + 3\frac{\eta + e^2}{\eta^2} \times$$

[1] Вторая из формул (13) приведена в [8, раздел 9C] с опечаткой.

$$\times \cos E - \frac{3e^3}{4\eta^2}\cos 2E - \frac{3e}{\eta^2}\mathcal{I}(\theta - E)\Bigg]\Phi_2.$$

Функцию $\mathcal{I}(\theta - E)$ можно вычислять по формулам (27) или (28) Приложения 2.

5.2. Сопровождающая система отсчета $\mathcal{O}_1$

Действуя, как и в предыдущем разделе, получим

$$u_1 = \frac{3\omega}{\varkappa^2\eta^2}\left[e(\cos\theta + e)S - (e\sin\theta + \theta - M)T\right],$$

$$u_2 = -\frac{1}{\varkappa^2}(\cos\theta + e)S + \\ + \frac{1}{\varkappa^2 e}\left[(\theta - M) - \eta(E - M) + e\sin\theta\right]T,$$

$$u_5 = -\frac{1}{\varkappa^2 e}S\sin\theta - \frac{1}{\varkappa^2 e^2}\Bigg[e\cos\theta + e^2 + \\ + \ln(1 + e\cos\theta) + 1 - \eta - \ln\frac{2\eta^2}{1+\eta}\Bigg]T - u_4\cos i.$$

Выражения для u_3, u_4 мы опустили, поскольку они совпадают с приведенными в (15) с учетом $\Phi_3 = W$.

Как и выше, находим:

$$\frac{1}{\omega}\mathcal{I}g = \frac{1}{\varkappa^2 e}\left[-2e(E - M) + \eta\sin\theta\right]S + \\ + \frac{\eta}{\varkappa^2 e^2}\Bigg[e\cos\theta + e^2 + \ln(1 + e\cos\theta) + \\ + 1 - \eta - \ln\frac{2\eta^2}{1+\eta}\Bigg]T, \tag{17}$$

$$\frac{1}{\omega}\mathcal{I}u_1 = \frac{3e}{\varkappa^2}S\sin E + \\ + \frac{3}{\varkappa^2\eta^2}\Bigg[e(1+\eta)\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) - \\ - \frac{e^2}{4}\cos 2E - \mathcal{I}(\theta - E)\Bigg]T. \tag{18}$$

В итоге, суммируя (17) и (18), получим

$$v = \frac{1}{\varkappa^2}\left[(E - M) + \frac{\eta}{e}\sin\theta\right]S + \\ + \frac{1}{\varkappa^2\eta^2}\Bigg\{3e(1+\eta)\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) - \frac{3e^2}{4}\cos 2E + \\ + \frac{\eta^3}{e}\cos\theta + \frac{\eta^3}{e^2}\left[\ln(1 + e\cos\theta) - \ln\frac{2\eta^2}{1+\eta}\right] + \\ + \frac{(2+\eta)\eta^3}{1+\eta} - 3\mathcal{I}(\theta - E)\Bigg\}T.$$

Функцию $\mathcal{I}(\theta - E)$ можно вычислять по формулам (27) или (28) Приложения 2.

5.3. Сопровождающая система отсчета $\mathcal{O}_2$

Все необходимые интегралы от функций (3) вычислены в Приложении 4.

Выпишем u_s:

$$u_1 = -\frac{6\omega}{\varkappa^2(1-e)}\left[\mathcal{F}_2\left(\frac{\theta}{2}, k\right) - \frac{1}{\pi}\mathbf{E}(k)M\right]\mathfrak{T},$$

$$u_2 = \frac{4}{\varkappa^2}\Bigg\{\mathcal{F}_1\left(\frac{\theta}{2}, k\right) - \frac{1}{\pi}\mathbf{K}(k)M - \\ - \frac{2}{(1+e)}\left[\mathcal{F}_3\left(\frac{\theta}{2}, k\right) - \frac{1}{\pi}\mathbf{D}(k)M\right]\Bigg\}\mathfrak{T} + \\ + \frac{2\eta}{\varkappa^2 e}\left[\operatorname{arctg}\frac{\vartheta}{\eta} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}[\eta^2\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)]\right]\mathfrak{N},$$

$$u_5 = -\frac{2}{\varkappa^2 e^2}\left[\vartheta - \frac{2\eta}{\pi}\mathbf{E}(e)\right]\mathfrak{T} + \\ + \frac{1}{\varkappa^2}\Bigg[\frac{1}{\eta}\left(\mathcal{F}_1\left(E + \frac{\pi}{2}, e\right) - \mathbf{K}(e)\left(1 + \frac{2}{\pi}M\right)\right) + \\ + \frac{1}{e^2}\ln\frac{e\sin E + \sqrt{1 - e^2\cos^2 E}}{\eta}\Bigg]\mathfrak{N} - u_4\cos i,$$

$$\frac{1}{\omega}\mathcal{I}g = \frac{4}{\varkappa^2}\Bigg[\operatorname{arctg}\frac{\vartheta}{\eta} - \frac{\pi}{4} - \frac{\eta^2}{\pi}\mathbf{K}(e) + \\ + \frac{1}{e^2}\left(\frac{\eta}{2}\vartheta - \frac{1}{\pi}\mathbf{E}(e)\right)\Bigg]\mathfrak{T} + \\ + \frac{\eta}{\varkappa^2}\Bigg[\mathcal{F}_1\left(E + \frac{\pi}{2}, e\right) - \mathbf{K}(e)\left(1 + \frac{2}{\pi}M\right) - \\ - \frac{1}{e^2}\ln\frac{e\sin E + \sqrt{1 - e^2\cos^2 E}}{\eta}\Bigg]\mathfrak{N}.$$

Выражения для u_3, u_4 мы опустили, поскольку они совпадают с приведенными в (15) с учетом $\Phi_3 = W$.

Для определения v необходимо, кроме приведенного выше интеграла от g, вычислить интеграл от u_1. Обозначим

$$\mathcal{F}_2\left(\frac{\theta}{2}, k\right) - \frac{\mathbf{E}(k)}{\pi}M = \frac{\mathbf{E}(k)}{\pi}(\theta - M) + H(\theta, k),$$

$$H(\theta, k) = \mathcal{F}_2\left(\frac{\theta}{2}, k\right) - \frac{\mathbf{E}(k)}{\pi}\theta.$$

Обе переменные $\theta - M$ и H нечетны и 2π-периодичны как функции от θ. Интеграл $\mathcal{I}(\theta - M)$ приведен в Приложении 2 (п. 4). Воспользуемся рядом Фурье для H:

$$H(\theta, k) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}B_m(k)k^{2m}\sin m\theta. \tag{19}$$

Коэффициенты $B_m(k)$ можно представить рядом [6]:

$$B_m(k) = \tag{20}$$
$$= \frac{1}{m}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+1)\cdots(s+m)}{(s+m+1)\cdots(s+2m)}\times$$
$$\times\left[\frac{(2s+2m-1)!!}{(2s+2m)!!}\right]^2\frac{k^{2s}}{2s+2m-1}.$$

По уточненной формуле Валлиса [9]

$$\left[\frac{(2s+2m-1)!!}{(2s+2m)!!}\right]^2 < \frac{1}{\pi(s+m)}.$$

Далее, при $m \geqslant 1$

$$\frac{(s+1)\cdots(s+m)}{(s+m+1)\cdots(s+2m)}\frac{2s+2m+1}{2s+2m} < 1.$$

Эти оценки позволяют вывести из (20) неравенство

$$B_m(k) < \frac{2}{\pi m}\times \tag{21}$$
$$\times\sum_{s=0}^{\infty}\frac{k^{2s}}{(2s+2m+1)(2s+2m-1)} <$$
$$< \frac{2}{\pi m}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{(2s+2m+1)(2s+2m-1)}.$$

Сумма в последнем выражении равна $1/2(2m-1)$. В итоге получаем оценку $B_m(k)$:

$$B_m(k) < \frac{1}{\pi m(2m-1)}, \quad m \geqslant 1.$$

Если оценить отдельно слагаемое в (20), отвечающее $s = 0$, и суммировать в (21) от единицы до бесконечности, то последняя оценка при $m > 1$ несколько улучшается:

$$B_m(k) < \frac{1}{2\pi m^2}, \quad m \geqslant 2.$$

Перейдем к средней аномалии

$$\sin m\theta = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{0m}(e)\sin nM, \tag{22}$$

где $S_n^{0m}(e) = X_n^{0m}(e) - X_{-n}^{0m}(e)$ можно найти в [4, 10–12]. Как известно, $S_n^{0m}(e)$ имеет порядок $e^{|n-m|}$. Подставляя (22) в (19), получим

$$H(\theta, k) = -\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nM, \tag{23}$$
$$C_n = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m B_m(k) S_n^{0m}(e) k^{2m}.$$

Интегрирование элементарно:

$$\mathcal{I}H = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{n}\cos nM. \tag{24}$$

Учитывая, что $e = \mathcal{O}(k^2)$, заключаем, что $C_n = \mathcal{O}(k^{2n})$, и ряды (23), (24) быстро сходятся при малых и умеренных эксцентриситетах.

Окончательно,

$$\frac{1}{\omega}\mathcal{I}u_1 = \frac{6}{\varkappa^2(1-e)}\left\{\frac{\mathbf{E}(k)}{\pi}\left[e\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{e^2}{4}\cos 2E\right] - \frac{\mathbf{E}(k)}{\pi}\mathcal{I}(\theta - E) - \mathcal{I}H\right\}\mathfrak{T},$$
$$v = \frac{2}{\varkappa^2(1-e)}\left\{2(1-e)\left[\operatorname{arctg}\frac{\vartheta}{\eta} - \frac{\pi}{4} - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{\eta^2}{\pi}\mathbf{K}(e) + \frac{1}{e^2}\left(\frac{\eta}{2}\vartheta - \frac{1}{\pi}\mathbf{E}(e)\right)\right] +$$
$$+ \frac{3\mathbf{E}(k)}{\pi}\left[e\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) - \frac{e^2}{4}\cos 2E\right] -$$
$$\left. - \frac{3\mathbf{E}(k)}{\pi}\mathcal{I}(\theta - E) - 3\mathcal{I}H\right\}\mathfrak{T} +$$
$$+ \frac{\eta}{\varkappa^2}\left[\mathcal{F}_1\left(E + \frac{\pi}{2}, e\right) - \mathbf{K}(e)\left(1 + \frac{2}{\pi}M\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{e^2}\ln\frac{e\sin E + \sqrt{1 - e^2\cos^2 E}}{\eta}\right]\mathfrak{N}.$$

Функцию $\mathcal{I}(\theta - E)$ можно вычислять по формулам (27) или (28) Приложения 2, а функцию $\mathcal{I}H$ — по формуле (24).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В задаче о движении тела в трех наиболее употребительных системах отсчета с возмущающим ускорением, обратно пропорциональным квадрату расстояния $r = \mathcal{SA}$, получены замкнутые формулы для уравнений движения в средних элементах в первом порядке по малому параметру. В системах $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}_1$ правые части уравнений движения — элементарные функции элементов. В системе $\mathcal{O}_2$ правые части уравнений движения выражаются через полные эллиптические интегралы первого и второго рода в форме Лежандра.

В системах $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}_1$ функции замены переменных элементарны для всех элементов, кроме средней аномалии. Выражение для средней аномалии содержит интеграл от сложной (хотя элементарной) функции, или бесконечный ряд, сходящийся абсолютно и равномерно при всех $0 \leqslant e \leqslant 1$.

В системе $\mathcal{O}_2$ функции замены переменных элементарны для i, Ω, а для a, e, σ содержат полные и неполные эллиптические интегралы первого и второго рода в форме Лежандра. Для средней аномалии появляется бесконечный ряд, коэффициенты которого сами являются рядами.

В следующей работе будет рассмотрено интегрирование осредненных уравнений.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны анонимному рецензенту за ценные замечания, учтенные в окончательной редакции рукописи. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 18-12-00050).

Приложение 1

ДЕЙСТВИЕ ОПЕРАТОРА $\mathcal{E}$ НА ФУНКЦИИ, ВХОДЯЩИЕ В СООТНОШЕНИЯ (1) И (2)

Рассматриваемые функции имеют вид $(r/a)^n \cos k\theta$, их средние значения равны коэффициентам Ганзена с нулевым нижним индексом $X_0^{nk}(e)$. Свойства коэффициентов Ганзена и таблица их первых значений приведены в [4, 13, 14]. Выпишем нужные нам коэффициенты Ганзена

$$X_0^{-3,0} = \eta^{-3}, \quad X_0^{-2,0} = \eta^{-1}, \quad X_0^{-2,1} = 0,$$
$$X_0^{-1,0} = 1, \quad X_0^{-1,1} = -\frac{e}{1+\eta}, \quad X_0^{-1,2} = \frac{1-\eta}{1+\eta}$$

и их комбинации

$$eX_0^{-2,0} + X_0^{-2,1} = \frac{e}{\eta},$$
$$3X_0^{-1,0} + 4eX_0^{-1,1} + X_0^{-1,2} = \frac{2\eta(1+2\eta)}{1+\eta},$$
$$3X_0^{-1,0} + 2eX_0^{-1,1} - X_0^{-1,2} = \frac{2\eta(2+\eta)}{1+\eta},$$
$$3X_0^{-1,0} - 2eX_0^{-1,1} - X_0^{-1,2} = \frac{2(1+2\eta+e^2)}{1+\eta},$$
$$(1-e^2)X_0^{-3,0} - X_0^{-1,0} = \frac{e^2}{\eta(1+\eta)},$$
$$-3eX_0^{-1,0} + 2X_0^{-1,1} + eX_0^{-1,2} = -4e.$$

Понадобятся также соотношения

$$\mathcal{E}(\cos\theta) = X_0^{0,1} = -e,$$
$$\mathcal{E}(\cos E) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos E(1 - e\cos E)\, dE = -\frac{e}{2},$$
$$\mathcal{E}(\cos nE) = 0, \quad n > 1.$$

Приложение 2

ДЕЙСТВИЕ ОПЕРАТОРА $\mathcal{I}$ НА ФУНКЦИИ, ВХОДЯЩИЕ В СООТНОШЕНИЯ (1) И (2)

Согласно (7), (9)

$$\mathcal{I}f = \int (f - \mathcal{E}f)\, dM =$$
$$= \int \frac{r^2}{a^2\eta}(f - \mathcal{E}f)\, d\theta = \int \frac{r}{a}(f - \mathcal{E}f)\, dE.$$

Постоянная интегрирования определяется из условия нулевого среднего (8). Полезной часто оказывается формула

$$\mathcal{I}f = \int f\, dM - (\mathcal{E}f)M.$$

Ниже под знаком интеграла оказываются либо четные, либо нечетные периодические функции быстрой переменной. В первом случае необходимо сначала вычислить $\mathcal{E}f$, что сделано в Приложении 1. Зато в результате получаем нечетную функцию с нулевым средним. Во втором случае автоматически $\mathcal{E}f = 0$. Зато после интегрирования получаем четную функцию, и нужно еще определить ее среднее значение.

1. Вспомогательные формулы

$$\frac{d(E-M)}{dM} = \frac{a}{r} - 1, \tag{25}$$
$$\frac{d(\theta - M)}{dM} = \eta\left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{1}{\eta}\right),$$
$$\eta\frac{d\sin\theta}{dM} = \frac{ae\cos 2\theta}{2r} + \frac{a\cos\theta}{r} + \frac{ae}{2r}$$

являются простыми следствиями (9). Из (25) находим нужные нам линейные комбинации:

$$\frac{ae\cos\theta}{r} + \frac{e^2}{1+\eta} = \tag{26}$$
$$= \eta\frac{d(\theta-M)}{dM} - \frac{d(E-M)}{dM},$$
$$\frac{ae\cos 2\theta}{r} = 2\eta\frac{d\sin\theta}{dM} - \frac{2a\cos\theta}{r} - \frac{ae}{r}.$$

Используя (26), получим:

$$\frac{ae^2\cos 2\theta}{r} - e^2\frac{1-\eta}{1+\eta} = 2e\eta\frac{d\sin\theta}{dM} -$$
$$- 2\eta\frac{d(\theta-M)}{dM} + (2-e^2)\frac{d(E-M)}{dM}.$$

2. Теперь легко определяются интегралы от четных функций :

$$\mathcal{I}\left(\frac{a}{r}\right) = \int\left(\frac{a}{r} - 1\right)\, dM = E - M,$$

$$\mathcal{I}\left(\frac{a^2}{r^2}\right) = \int \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{1}{\eta}\right)\, dM = \frac{\theta - M}{\eta},$$

$$\mathcal{I}\left(\frac{a^3}{r^3}\right) = \int \left(\frac{a^3}{r^3} - \frac{1}{\eta^3}\right)\, dM =$$

$$= \int \frac{1}{\eta^3}(1 + e\cos\theta)\, d\theta - \frac{M}{\eta^3} =$$

$$= \frac{\theta - M + e\sin\theta}{\eta^3},$$

$$\mathcal{I}\left(\frac{a}{r}\cos\theta\right) = \int \left(\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{e}{1+\eta}\right)\, dM =$$

$$= \frac{1}{e}\left[\eta(\theta - M) - (E - M)\right],$$

$$\mathcal{I}\left(\frac{a}{r}\cos 2\theta\right) = \int \left(\frac{a}{r}\cos 2\theta - \frac{1-\eta}{1+\eta}\right)\, dM =$$

$$= \frac{1}{e^2}\left[2\eta(e\sin\theta - \theta + M) + (2 - e^2)(E - M)\right],$$

$$\mathcal{I}\left(\frac{a^2}{r^2}\cos\theta\right) = \int \frac{a^2}{r^2}\cos\theta\, dM =$$

$$= \int \frac{1}{\eta}\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{\eta}\sin\theta.$$

Понадобится также соотношение

$$\mathcal{I}(\cos\theta + e) = \int (\cos\theta + e)\, dM =$$

$$= \eta^2 \int \cos E\, dE = \eta^2 \sin E.$$

3. Интегралы от нечетных функций берутся непосредственно.

$$\mathcal{I}\left(\frac{a}{r}\sin\theta\right) = \eta \int \frac{\sin\theta d\theta}{1 + e\cos\theta} =$$

$$= -\frac{\eta}{e}\left[\ln(1 + e\cos\theta) + 1 - \eta - \ln\frac{2\eta^2}{1+\eta}\right],$$

$$\mathcal{I}\left(\frac{a}{r}\sin 2\theta\right) = \eta \int \frac{\sin 2\theta d\theta}{1 + e\cos\theta} =$$

$$= \frac{2\eta}{e^2}\Bigg[\ln(1 + e\cos\theta) - e\cos\theta -$$

$$- \eta(1 - \eta) - \ln\frac{2\eta^2}{1+\eta}\Bigg],$$

$$\mathcal{I}\left(\frac{a^2}{r^2}\sin\theta\right) = \frac{1}{\eta}\int \sin\theta\, d\theta = -\frac{\cos\theta + e}{\eta}.$$

Понадобится также соотношение

$$\mathcal{I}(\sin\theta) = \eta \int \sin E\, dE = -\eta\left(\cos E + \frac{e}{2}\right).$$

Чтобы определить постоянные интегрирования, мы воспользовались формулой

$$\int \ln(1 + e\cos\theta)\, dM =$$

$$= \int (1 - e\cos E)[\ln\eta^2 - \ln(1 - e\cos E)]\, dE =$$

$$= \int (1 - e\cos E) \times$$

$$\times \left[\ln\frac{2\eta^2}{1+\eta} - \ln(1 - 2\beta\cos E + \beta^2)\right]\, dE,$$

где

$$\beta = \frac{e}{1+\eta}, \quad e = \frac{2\beta}{1+\beta^2}.$$

Поскольку при $\beta^2 < 1$ [7, п. 4.224.14, п. 4.397.6] справедливы выражения

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2\beta\cos E + \beta^2)\, dE = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos E \ln(1 - 2\beta\cos E + \beta^2)\, dE = -\beta,$$

приходим к равенству

$$\mathcal{E}\ln(1 + e\cos\theta) = -1 + \eta + \ln\frac{2\eta^2}{1+\eta}.$$

4. Интегралы от разности аномалий

$$\mathcal{I}(E - M) = \int e\sin E(1 - e\cos E)\, dE =$$

$$= -e\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) + \frac{e^2}{4}\cos 2E.$$

С истинной аномалией положение сложнее. Соотношение [13, 15]

$$\theta - E = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta\sin E}{1 - \beta\cos E}$$

влечет

$$\mathcal{I}(\theta - E) = 2\int \psi(E)\, dE,$$

$$\psi(E) = (1 - e\cos E)\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta\sin E}{1 - \beta\cos E}\, dE.$$

Взять интеграл аналитически не удалось. Можно предложить два варианта действий.

4a. Численное интегрирование

$$\mathcal{I}(\theta - E) = I(E) - I_0,$$

где

$$I(E) = 2\int_{-\pi}^{E} \psi(t)\,dt, \quad I_0 = \mathcal{E} I(E).$$

Вычисление I_0 можно свести к однократному интегрированию [16, п. 597, задача 11]:

$$I_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dE \int_{-\pi}^{E} \psi(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - t)\psi(t)\,dt.$$

Функция $\psi(t)$ нечетна, а $t\psi(t)$ четна, поэтому

$$I_0 = -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\psi(t)\,dt.$$

Окончательно,

$$\mathcal{I}(\theta - E) = 2\int_{-\pi}^{E} \psi(t)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\psi(t)\,dt. \qquad (27)$$

4b. Ряд по степеням β [4, 13] есть

$$\theta - E = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n}\sin nE.$$

Отсюда

$$(1 - e\cos E)(\theta - E) = \frac{2}{1+\beta^2} \times$$
$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n}(1 - 2\beta\cos E + \beta^2)\sin nE =$$
$$= \frac{\beta(2+\beta^2)}{1+\beta^2}\sin E - \frac{2}{1+\beta^2} \times$$
$$\times \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1-(n-1)\beta^2}{n(n^2-1)}\beta^n \sin nE.$$

Интегрируя, получим

$$\mathcal{I}(\theta - E) = -\frac{\beta(2+\beta^2)}{1+\beta^2}\left(\frac{e}{2} + \cos E\right) + \qquad (28)$$
$$+ \frac{2}{1+\beta^2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1-(n-1)\beta^2}{n^2(n^2-1)}\beta^n \cos nE.$$

Ряд сходится абсолютно и равномерно при $0 \leqslant e \leqslant 1$.

Приложение 3

ДЕЙСТВИЕ ОПЕРАТОРА $\mathcal{E}$ НА ФУНКЦИИ, ВХОДЯЩИЕ В СООТНОШЕНИЯ (3)

Ключевую роль играет величина (4). Ее целесообразно представить в разных формах:

$$\vartheta = \sqrt{1 + e^2 + 2e\cos\theta} =$$
$$= (1+e)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} = \eta\sqrt{\frac{1 + e\cos E}{1 - e\cos E}},$$

где

$$\varphi = \frac{\theta}{2}, \quad k = \frac{2\sqrt{e}}{1+e}.$$

С помощью (9) найдем средние значения трех четных функций:

$$\mathcal{E}\frac{a^2\vartheta}{r^2} = \frac{1}{\pi\eta}\int_{0}^{\pi} \vartheta\,d\theta = \frac{2(1+e)}{\pi\eta} \times$$
$$\times \int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \frac{2(1+e)}{\pi\eta}\mathbf{E}(k),$$

$$\mathcal{E}\frac{a^2}{r^2\vartheta} = \frac{1}{\pi\eta}\int_{0}^{\pi} \frac{d\theta}{\vartheta} = \frac{2}{\pi\eta(1+e)} \times$$
$$\times \int_{0}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \frac{2}{\pi\eta(1+e)}\mathbf{K}(k),$$

$$\mathcal{E}\frac{a^2\cos\theta}{r^2\vartheta} = \frac{2}{\pi\eta(1+e)}\int_{0}^{\pi/2} \frac{(1 - 2\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} =$$
$$= \frac{2}{\pi\eta(1+e)}\left[\mathbf{K}(k) - 2\mathbf{D}(k)\right].$$

Среднее значение трех других функций находим переходом к эксцентрической аномалии:

$$\mathcal{E}\frac{a}{r\vartheta} = \frac{1}{\pi\eta}\int_{0}^{\pi} \frac{1 - e\cos E}{\sqrt{1 - e^2\cos^2 E}}\,dE = \qquad (29)$$
$$= \frac{2}{\pi\eta}\int_{0}^{\pi/2} \frac{dE}{\sqrt{1 - e^2\cos^2 E}} = \frac{2}{\pi\eta}\mathbf{K}(e),$$

$$\mathcal{E}\frac{a\cos\theta}{r\vartheta} = \frac{1}{\pi\eta}\int_{0}^{\pi} \frac{\cos E - e}{\sqrt{1 - e^2\cos^2 E}}\,dE =$$
$$= -\frac{2e}{\pi\eta}\mathbf{K}(e),$$

$$\mathcal{E}\vartheta = \frac{\eta}{\pi}\int\limits_0^\pi \sqrt{1-e^2\cos^2 E}\, dE = \frac{2\eta}{\pi}\mathbf{E}(e).$$

Здесь использованы очевидные соотношения

$$\int\limits_0^\pi h_1(\cos x)\, dx = 0,$$

$$\int\limits_0^\pi h_2(\cos x)\, dx = 2\int\limits_0^{\pi/2} h_2(\cos x)\, dx,$$

если $h_1(-y) = -h_1(y)$, $h_2(-y) = h_2(y)$.

Приложение 4

ДЕЙСТВИЕ ОПЕРАТОРА $\mathcal{I}$ НА ФУНКЦИИ, ВХОДЯЩИЕ В СООТНОШЕНИЯ (3)

1. Интегралы от четных функций

С учетом найденных в Приложении 3 средних значений, получим

$$\mathcal{I}\frac{a^2\vartheta}{r^2} = \frac{2(1+e)}{\eta}\int\limits_0^{\theta/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi - \\ - \frac{2(1+e)}{\pi\eta}\mathbf{E}(k)M = \\ = \frac{2(1+e)}{\eta}\left[\mathcal{F}_2\left(\frac{\theta}{2},k\right) - \frac{1}{\pi}\mathbf{E}(k)M\right],$$

$$\mathcal{I}\frac{a^2}{r^2\vartheta} = \frac{2}{\eta(1+e)}\int\limits_0^{\theta/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \\ - \frac{2}{\pi\eta(1+e)}\mathbf{K}(k)M = \\ = \frac{2}{\eta(1+e)}\left[\mathcal{F}_1\left(\frac{\theta}{2},k\right) - \frac{1}{\pi}\mathbf{K}(k)M\right],$$

$$\mathcal{I}\frac{a^2\cos\theta}{r^2\vartheta} = \frac{2}{\eta(1+e)}\int\limits_0^{\theta/2}\frac{(1-2\sin^2\varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \\ - \frac{2}{\pi\eta(1+e)}\left[\mathbf{K}(k) - 2\mathbf{D}(k)\right]M = \\ = \frac{2}{\eta(1+e)}\left[\mathcal{F}_1\left(\frac{\theta}{2},k\right) - 2\mathcal{F}_3\left(\frac{\theta}{2},k\right) - \\ - \frac{1}{\pi}\mathbf{K}(k)M + \frac{2}{\pi}\mathbf{D}(k)M\right].$$

Интегралы от двух оставшихся функций из (3) находим переходом к эксцентрической аномалии:

$$\mathcal{I}\frac{a}{r\vartheta} = \frac{1}{\eta}\int\limits_0^E\frac{1-e\cos x}{\sqrt{1-e^2\cos^2 x}}\, dx - \\ - \frac{2}{\pi\eta}\mathbf{K}(e)M + \text{const}.$$

Разобьем интеграл на два. Первый (содержащий единицу в числителе) подстановкой $x = x' - \pi/2$ сводится к стандартному эллиптическому, а второй (содержащий $e\cos x$ в числителе) элементарен:

$$\int\limits_0^E\frac{1-e\cos x}{\sqrt{1-e^2\cos^2 x}}dx = \mathcal{F}_1\left(E+\frac{\pi}{2},e\right) - \\ - \ln\left(e\sin E + \sqrt{1-e^2\cos^2 E}\right) + \text{const}.$$

Постоянное слагаемое определим условием нечетности $\mathcal{I}(a/r\vartheta)$:

$$\mathcal{I}\frac{a}{r\vartheta} = \frac{1}{\eta}\left[\mathcal{F}_1\left(E+\frac{\pi}{2},e\right) - \mathbf{K}(e) - \frac{2}{\pi}\mathbf{K}(e)M\right] - \\ - \frac{1}{\eta}\ln\frac{e\sin E + \sqrt{1-e^2\cos^2 E}}{\eta}.$$

Мы использовали нечетность эллиптических интегралов $\mathcal{F}_s(\varphi,k)$ по первой переменной и свойство

$$\mathcal{F}_1(\varphi+\pi,k) = \mathcal{F}_1(\varphi,k) + 2\mathbf{K}(k).$$

Аналогично получим

$$\mathcal{I}\frac{a\cos\theta}{r\vartheta} = \frac{1}{\eta}\int\limits_0^E\frac{\cos x - e}{\sqrt{1-e^2\cos^2 x}}\, dx + \\ + \frac{2e}{\pi\eta}\mathbf{K}(e)M + \text{const},$$

$$\mathcal{I}\frac{a\cos\theta}{r\vartheta} = \\ = -\frac{e}{\eta}\left[\mathcal{F}_1\left(E+\frac{\pi}{2},e\right) - \mathbf{K}(e) - \frac{2}{\pi}\mathbf{K}(e)M\right] + \\ + \frac{1}{e\eta}\ln\frac{e\sin E + \sqrt{1-e^2\cos^2 E}}{\eta}.$$

2. Интегралы от нечетных функций

Используя переход к истинной аномалии, выразим интегралы через элементарные функции и $\mathbf{E}(e)$

$$\mathcal{I}\frac{a^2\sin\theta}{r^2\vartheta} = \frac{1}{\eta}\int\frac{\sin\theta\, d\theta}{\vartheta} = \\ = -\frac{1}{\eta e}\left(\vartheta - \frac{2\eta}{\pi}\mathbf{E}(e)\right),$$

$$\mathcal{I}\frac{a\sin\theta}{r\vartheta} = \eta\int\frac{\sin\theta\,d\theta}{(1+e\cos\theta)\vartheta} = = -\frac{2}{e}\operatorname{arctg}\frac{\vartheta}{\eta} + \mathrm{const},$$

$$\mathcal{I}\frac{a\sin\theta\cos\theta}{r\vartheta} = \eta\int\frac{\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{(1+e\cos\theta)\vartheta} = = \frac{2}{e^2}\operatorname{arctg}\frac{\vartheta}{\eta} - \frac{\eta}{e^2}\left(\vartheta - \frac{2\eta}{\pi}\mathbf{E}(e)\right) + \mathrm{const}.$$

Осталось найти среднее значение арктангенса. Обозначим временно

$$f(E) = \operatorname{arctg}\frac{\vartheta}{\eta} = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}},$$

$$f'(E) = -\frac{e\sin E}{2\sqrt{1-e^2\cos^2 E}}$$

и проинтегрируем интеграл для среднего значения по частям

$$\pi\mathcal{E}f = \int\limits_0^\pi f(E)\,d(E-e\sin E) = = (E-e\sin E)f(E)\Big|_0^\pi - - \int\limits_0^\pi (E-e\sin E)f'(E)\,dE = = \pi\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} + \frac{e}{2}A,$$

$$A = \int\limits_0^\pi \frac{\sin E(E-e\sin E)}{\sqrt{1-e^2\cos^2 E}}\,dE.$$

Разобьем отрезок интегрирования для A на два точкой $E=\pi/2$ и во втором интеграле сделаем подстановку $E\to\pi-E$:

$$A = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin E(E-e\sin E)}{\sqrt{1-e^2\cos^2 E}}\,dE + + \int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin E(\pi-E-e\sin E)}{\sqrt{1-e^2\cos^2 E}}\,dE = = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin E(\pi-2e\sin E)}{\sqrt{1-e^2\cos^2 E}}\,dE.$$

Представляя числитель последнего интеграла в виде

$$-2e + \frac{2}{e} - \frac{2}{e}(1-e^2\cos^2 E) + \pi\sin E,$$

найдем

$$A = \frac{2\eta^2}{e}\mathbf{K}(e) - \frac{2}{e}\mathbf{E}(e) + \frac{\pi\arcsin e}{e},$$

так что

$$\mathcal{E}f = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} + \frac{1}{2}\arcsin e + + \frac{1}{\pi}[\eta^2\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)].$$

Упростим последнее выражение. Положим

$$\alpha = \arcsin e,\quad \beta = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.$$

Простая тригонометрия показывает, что

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),\quad \beta = \frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2},$$

то есть

$$\mathcal{E}f = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}[\eta^2\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)].$$

Окончательно,

$$\mathcal{I}\frac{a\sin\theta}{r\vartheta} = = -\frac{2}{e}\left[\operatorname{arctg}\frac{\vartheta}{\eta} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}[\eta^2\mathbf{K}(e)-\mathbf{E}(e)]\right], \tag{30}$$

$$\mathcal{I}\frac{a\sin\theta\cos\theta}{r\vartheta} = = \frac{2}{e^2}\left[\operatorname{arctg}\frac{\vartheta}{\eta} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}[\eta^2\mathbf{K}(e)-\mathbf{E}(e)]\right] - - \frac{\eta}{e^2}\left(\vartheta - \frac{2\eta}{\pi}\mathbf{E}(e)\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников, Вестн. СПбГУ. Сер. 1: Математика. Механика. Астрономия № 4, 134 (2013).
2. Т. Н. Санникова, Вестн. СПбГУ. Сер. 1: Математика. Механика. Астрономия №1, 171 (2014).
3. Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников, Астрон. журн. **91**(12), 1060 (2014).
4. М. Ф. Субботин, *Введение в теоретическую астрономию* (М.: Наука, 1968).
5. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* (М.: ФМ, 1963).

6. А. М. Журавский, *Справочник по эллиптическим функциям*. (М.–Л.: Изд. АН СССР, 1941).
7. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Физматгиз, 1963).
8. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, *Специальные функции* (М.: Наука, 1964).
9. В. А. Антонов, Е. И. Тимошкова, К. В. Холшевников, *Введение в теорию ньютоновского потенциала* (М.: Наука, 1988).
10. Г. Н. Дубошин (ред.), *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Изд-е 2-е*. (М.: Наука, 1976).
11. A. Cayley, Mem. Roy. Astron. Soc. **29**, 191 (1861).
12. M. P. Jarnagin, Astron. Paper **18**, 2 (1965).
13. К. В. Холшевников, В. Б. Титов, *Задача двух тел* (СПб.: Изд. СПбГУ, 2007).
14. А. В. Грибанов, Труды АО ЛГУ **38**, 165 (1983).
15. А. Уинтнер, *Аналитические основы небесной механики* (М.: Наука, 1967).
16. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3* (М.–Л.: Физматлит, 1960).