

УДК 524.7

ГАЛАКТИКИ В НАБЛЮДЕНИЯХ И ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЯХ

© 2020 г. М. Демянский^{1, 2}, А. Дорошкевич^{3, 4, *}, Т. Ларченкова³, С. Пилипенко³

¹ Institute of Theoretical Physics, University of Warsaw, Warsaw, Poland

² Department of Astronomy, Williams College, Williamstown, USA

³ Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

⁴ Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия

*E-mail: dorr@asc.rssi.ru

Поступила в редакцию 20.04.2020 г.

После доработки 30.06.2020 г.

Принята к публикации 30.07.2020 г.

Сравнение вириальных параметров галактик и скоплений галактик (радиуса, плотности и энтропийной функции) в широком интервале масс $10^6 \leq M_{\text{vir}}/M_{\odot} \leq 10^{14}$ показывает, что эти параметры коррелированы и регулярным образом зависят от вириальной массы объекта. Для наблюдаемых галактик и скоплений галактик доступные оценки вириальных параметров оказываются достаточно близкими и значения редуцированной вириальной плотности G_p сконцентрированы в узком интервале $0.5 \leq G_p/\langle G_p \rangle \leq 2$ вокруг общего среднего значения. Этот “вириальный” парадокс усиливается при сравнении с численными моделями, в которых подобных объектов крайне мало, и для большинства гало темной материи эти плотности в ~ 50 – 100 раз меньше. Теоретический анализ указывает на возможные причины различия наблюдений и моделей, отмечая их связь со спектром космологических возмущений. После соответствующих уточнений рассмотренные данные могут быть использованы для контроля моделей космологической инфляции. Кратко обсуждается ряд сопутствующих вопросов.

DOI: 10.31857/S000462992012004X

1. ВВЕДЕНИЕ

Прецизионные наблюдения флуктуаций реликтового излучения с помощью космических обсерваторий WMAP и Planck [1, 2] подтвердили высокую степень изотропии расширения Вселенной со средней плотностью, близкой к критической, доминирование “темной энергии” и реликтовых адиабатических возмущений плотности и скорости со спектром, близким к спектру Гаррисона–Зельдовича. Эти же наблюдения позволили получить значения постоянной Хаббла $H(z)$, показателя степени спектра возмущений n_p , средней плотности темной материи (ТМ) $\langle \rho_{\text{ТМ}}(z) \rangle$, и средней плотности барионов $\langle \rho_b(z) \rangle$:

$$H^2(z) = H_0^2[\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda],$$

$$H_0 = 67.8 \text{ [км/(с · Опк)]},$$

$$n_p \approx 0.97,$$

$$\langle \rho_m \rangle = \langle \rho_{\text{ТМ}} \rangle + \langle \rho_b \rangle = 3(1+z)^3 \Theta_m [M_{\odot}/\text{кпк}^3],$$

$$\langle \rho_b \rangle = 3 \times 10^{-31} (1+z)^3 \Theta_m \text{ [г/см}^3\text{]} =$$

$$= 4.4(1+z)^3 \Theta_m [M_{\odot}/\text{кпк}^3], \quad (1)$$

$$\Omega_\Lambda \approx 0.72,$$

$$\Omega_{\text{ТМ}} \approx 0.24,$$

$$\Omega_b \approx 0.04,$$

$$\Theta_m = \Omega_m/0.28,$$

где значения безразмерных плотности “темной энергии” Ω_Λ , темной материи $\Omega_{\text{ТМ}}$ и барионов Ω_b приведены для красного смещения $z = 0$, $\Omega_m = \Omega_{\text{ТМ}} + \Omega_b$ – безразмерная плотность нерелятивистской материи.

В рамках этой модели возможно изучать процессы развития возмущений плотности и образования звезд, галактик, скоплений галактик, а также других элементов наблюдаемой структуры Вселенной. Обычно основное внимание уделяется образованию хорошо наблюдаемых элементов структуры, несмотря на то, что согласно современным представлениям [3, 4] галактики содержат лишь малую долю ($\leq 10\%$) всех барионов. При этом можно полагать, что связанные с ними компактные гало ТМ также содержат сравнимую (малую) часть всей ТМ. В свою очередь, свойства гало ТМ, образованные доминирующей темной материей и определяющие свойства как видимых,

так и невидимых элементов структуры Вселенной, изучены, в основном, по результатам численного моделирования.

При обсуждении свойств гало ТМ и их сравнении с галактиками и скоплениями галактик важно не забывать, что почти все объекты, содержащие звезды, связаны с очень высокими пиками плотности и, согласно теории иерархического сгущивания, включают элементы (маломассивные галактики), образованные при красном смещении $z \geq 10$ и участвовавшие в реионизации Вселенной. Хорошим примером служат маломассивные галактики Местной группы, эволюция которых также начиналась при $z \geq 10$, но была рано заторможена (приливным) влиянием близких массивных соседей и/или другими случайными причинами. Образование звезд в этих галактик рассматривалось в [5].

При реионизации нагрев межгалактического газа увеличивает его температуру в $\sim 10^4$ раз. Поэтому в гало ТМ, образованных после реионизации и содержащих только нагретую гелиево-водородную плазму (без металлов), образование первых звезд крайне затруднено и (почти) все первые звезды образовались в гало, возникших при $z \geq 10$. Следовательно, звезды можно рассматривать как достаточно надежный индикатор раннего образования галактик и их принадлежности к семейству высоких пиков плотности в реликтовых возмущениях. Именно поэтому с галактиками связана лишь малая часть и барионов, и темной материи.

Начавшееся при $z \geq 10$ образование галактик и других элементов структуры продолжается и при $z \leq 10$. Согласно численным моделям (Millennium-II [6], Bolshoi [7]) большая часть ТМ сосредоточена в элементах крупномасштабной структуры — филаментах и сверхскоплениях — “блинах” Зельдовича. Кроме того, численные модели показывают, что заметная часть ТМ (до 50%) сосредоточена в компактных маломассивных гало, образованных при $z \leq 10$, содержащих мало газа и не содержащих звезд. Часть таких объектов наблюдается как системы линий поглощения водорода в спектрах квазаров (лес линий Ly- α) [8]. Недавно обнаруженные и активно изучаемые ультрадиффузные галактики [9] можно рассматривать как объекты, промежуточные между галактиками и “невидимыми” компактными гало ТМ. Свойства таких “невидимых” гало могут быть установлены при анализе численных моделей.

Все гало ТМ образованы под действием гравитационной неустойчивости из случайных начальных возмущений, которые описываются единым спектром мощности. Структура вириализованных объектов главным образом зависит от универсального процесса релаксации конденсирующихся ТМ и барионов [10–13], ведущего к эффек-

тивному росту их массы, плотности и энтропии. Это дает основания ожидать высокую степень универсальности процессов образования всех гало ТМ и качественное подобие их свойств. Однако эта универсальность не абсолютна и, как будет показано далее, свойства образующихся в настоящее время массивных и маломассивных гало ТМ заметно отличаются. Это может позволить связать параметры наблюдаемых объектов с параметрами начальных возмущений.

Отметим, что в галактиках и скоплениях галактик эта ожидаемая универсальность частично разрушается под действием барионного компонента и случайных факторов. Это приводит к появлению объектов с разнообразными свойствами [4, 14–19]. Поэтому при определении их вириальных характеристик важно использовать наблюдения удаленной периферии галактик и скоплений галактик, где влияние барионов и звезд невелико. В численных моделях возникают другие, не менее мощные факторы, разрушающие универсальность образования изучаемых объектов. Тем не менее для ряда свойств изначальная универсальность частично сохраняется и может быть обнаружена как в наблюдениях, так и в численных моделях.

В настоящей работе в разделе 2 рассматриваются свойства вириализованных гало ТМ, которые наблюдаются как галактики и скопления галактик. Для этого используются наблюдения далеких периферий этих объектов, где влияние барионного компонента и несимметричности окружения ограничено. Это позволяет оценить параметры наблюдаемых объектов с точностью $\sim 30\%$, которая включает как ошибки наблюдений, так и влияние случайных факторов.

Приближенная универсальность основных вириальных характеристик наблюдаемых гало ТМ, таких как плотность и энтропия, позволяет рассматривать эти объекты — от карликовых галактик до скоплений галактик — как однопараметрическую последовательность. То есть вириальная масса объекта определяет его размер, плотность и даже время образования. Таким образом, появляется возможность связать вириальные характеристики наблюдаемых объектов с основными параметрами начальных возмущений. Это удобно сделать в рамках расширенной модели Пресса—Шехтера (Press—Schechter, PS модели) [20–26], в которой образование галактик и гало ТМ рассматривается как эволюция сферических пиков плотности. Сравнение результатов, полученных в рамках этой модели, с результатами численного моделирования позволяет уточнить пределы применимости теоретических моделей и оценить перспективы дальнейшего изучения вириальных характеристик галактик и гало ТМ.

Возможная универсальность тех или иных свойств гало ТМ широко обсуждается в последние годы. Так, например, рассматривается возможная связь вириальной плотности объекта ρ_{vir} и средней плотности $\langle \rho_m \rangle$ (1) [27] в (условный) момент образования объекта [26], или даже в момент наблюдения [7, 28]. Этот важный вопрос тесно связан с различиями в определении вириальных параметров в наблюдениях и численных моделях и рассмотрен в разделе 3.

В разделе 4 обсуждается возможная универсальность свойств ядер маломассивных галактик [28–32]. Из-за высокой концентрации барионов свойства ТМ в центральных ядрах трудно определить и все оценки их параметров всегда будут модельно зависимы. Подробное исследование свойств таких ядер [28, 33, 34] и сопоставление независимых оценок [35–37] демонстрируют значительное влияние использованной модели.

В разделе 5 рассмотрены некоторые свойства гало ТМ в численных моделях. Основные результаты настоящей работы сформулированы и обсуждаются в разделе 6.

2. ВИРИАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГАЛАКТИК И СКОПЛЕНИЙ ГАЛАКТИК

В этом разделе рассматриваются корреляции вириальных характеристик наблюдаемых и модельных галактик (скоплений галактик): массы M_{vir} , радиуса R_{vir} , средних плотности ρ_{vir} , температуры T_{vir} и энтропийной функции S_{vir} . При заданной (измеренной) массе M_{vir} потенциальная и внутренняя энергии, U_{vir} и K_{vir} , вириальные плотность и энтропийная функция определяются как

$$\begin{aligned} U_{\text{vir}} &= -\frac{3}{5} G \frac{M_{\text{vir}}^2}{R_{\text{vir}}}, \\ K_{\text{vir}} &= \langle M_{\text{vir}} T_{\text{vir}} \rangle = \frac{1}{2} U_{\text{vir}}, \\ \rho_{\text{vir}} &= \frac{3M_{\text{vir}}}{4\pi R_{\text{vir}}^3}, \\ S_{\text{vir}} &= \frac{m_b^{2/3} T_{\text{vir}}}{\langle \rho_{\text{vir}} \rangle^{2/3}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Эти соотношения предполагают сферическую симметрию наблюдаемого объекта. При этом вириальная плотность ρ_{vir} определена как плотность однородного шара с массой M_{vir} и радиусом R_{vir} . В определении энтропийной функции S_{vir} массы частиц темной материи и барионов, m_b , предполагаются равными. Это делает функцию S_{vir} несколько условной, но не мешает ее сравнению для разных наблюдаемых и модельных каталогов. Как в наблюдениях, так и в численных мо-

делях величины U_{vir} и K_{vir} определяются не очень точно. Как правило, в наблюдениях за вириальный радиус принимается максимальный наблюдаемый радиус. Хотя в численных моделях используются более сложные схемы, тем не менее надежные результаты все еще не получены.

Часто вместо вириальной температуры используются наблюдения круговой скорости на вириальном радиусе, v_{vir} , и за вириальную температуру принимается величина

$$T_{\text{vir}}^* \approx m_b v_{\text{vir}}^2 / 2.$$

Температуры T_{vir} и T_{vir}^* отличаются численным коэффициентом, но, ввиду бедности наблюдательных данных, будут использованы все доступные измерения без оговорок. Такой подход увеличивает представительность выборки, но при этом возрастает разброс обсуждаемых параметров.

Несмотря на эти оговорки, современные наблюдения позволяют получить некоторые оценки процессов образования галактик и гало ТМ. Наблюдения в широком интервале масс $10^6 \leq M_{\text{vir}}/M_{\odot} \leq 10^{14}$ (от скоплений галактик до карликовых галактик) демонстрируют почти универсальную зависимость вириальных параметров ρ_{vir} и S_{vir} (2) от их размера и массы [38]. Выпишем эту универсальную зависимость в явном виде и рассмотрим зависимость поверхностной плотности Σ_{vir} , редуцированной вириальной плотности G_{ρ} , и энтропийной функции G_s , от массы

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{vir}} &= \frac{3M_{\text{vir}}}{4\pi R_{\text{vir}}^2}, \\ G_{\rho} &= \rho_{\text{vir}} \sqrt{M_{12}} = 2 \left(\frac{\Sigma_{\text{vir}}}{\Sigma_0} \right)^{3/2} G_0, \\ G_s &= \frac{S_{\text{vir}}}{M_{12}^{5/6}} S_0 \sqrt{\frac{\Sigma_0}{\Sigma_{\text{vir}}}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $M_{12} = M_{\text{vir}}/10^{12} M_{\odot}$, $\Sigma_0 = M_{\odot}/\text{пк}^2$, $G_0 = 10^3 M_{\odot}/\text{кпк}^3$, $S_0 \approx 36 \text{ см}^2 \text{ кЭВ}$.

Отметим, что для скоплений галактик подобные соотношения обсуждались уже в 1986 г. [14, 39].

2.1. Наблюдаемые характеристики галактик и скоплений галактик

Рассмотрена выборка 194 галактик [35–37, 40–43] и 447 скоплений галактик [44–52], включающая объекты с массами в диапазоне $10^6 \leq M_{\text{vir}}/M_{\odot} \leq 10^{15}$. Для всех объектов по опубликованным радиусам и массам (или круговым скоростям) получены значения Σ_{vir} , G_{ρ} и G_s , которые приведены в табл. 1 и на рис. 1.

Таблица 1. Вириальные параметры 194 галактик и 447 скоплений галактик

$10f_{\text{obj}}$	$\lg(M_{12})$	$\lg(\rho_{\text{vir}}/\langle\rho_{\text{vir}}\rangle)$	$\Sigma_{\text{vir}}/\langle\Sigma_{\text{vir}}\rangle$	$G_p/\langle G_p\rangle$	$G_s/\langle G_s\rangle$
0.016	-6.64	0.76	1.10	1.11	0.26
0.094	-5.62	0.26	1.01	1.00	0.27
0.328	-4.88	0.37	1.05	1.11	0.27
0.312	-4.19	-0.05	1.00	1.05	0.26
0.078	-3.27	0.86	0.87	0.87	0.94
0.390	-2.61	0.89	1.01	1.15	1.03
0.624	-1.80	0.57	1.31	1.56	0.86
0.515	-0.94	0.31	1.49	1.91	0.74
0.608	-0.24	0.43	1.51	2.00	0.66
0.499	0.80	-1.86	0.65	0.56	1.46
1.435	1.39	-1.92	0.45	0.29	2.32
1.139	2.30	-1.68	0.90	0.77	1.11
3.885	2.90	-1.68	1.09	1.00	0.68
0.078	3.43	-1.97	0.68	0.52	0.61

Средние значения этих параметров по всем объектам выборки равны

$$\begin{aligned} \langle\Sigma_{\text{vir}}\rangle &= 43(1 \pm 0.5)\Sigma_0, \\ \langle G_p\rangle &= 6 \times 10^2(1 \pm 0.8)G_0, \\ \langle G_s\rangle &= 5(1 \pm 0.7) \text{ см}^2 \text{ кэВ}. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметный разброс в оценках (4) частично связан с различиями процедуры измерения.

Полученные результаты можно сравнить с оценками для отдельных галактик и групп галактик. Так, для 13 групп галактик из работы [53] и для 7 групп из работы [54] поверхностная плотность и средняя масса соответственно равны

$$\begin{aligned} \langle\Sigma_{13}\rangle &\approx 26.1(1 \pm 0.20)\Sigma_0, & \langle M\rangle &\approx 4.2 \times 10^{13} M_\odot, \\ \langle\Sigma_7\rangle &\approx 50.1(1 \pm 0.14)\Sigma_0, & \langle M\rangle &\approx 9.2 \times 10^{13} M_\odot. \end{aligned} \quad (5)$$

Для массивной эллиптической галактики NGC 1407 анализ [55] приводит к оценкам

$$\begin{aligned} M_{\text{vir}} &\approx (1 \pm 0.4) \times 10^{13} M_\odot, \\ R_{\text{vir}} &\approx 0.54(1 \pm 0.3) \text{ Мпк}, \\ \Sigma_{\text{vir}} &\approx 14(1 \pm 0.7)\Sigma_0. \end{aligned}$$

Для ультрадиффузной галактики Dragonfly-44 [56]

$$\begin{aligned} M_{1/2} &\approx 0.7 \times 10^{10} M_\odot, & R_{1/2} &\approx 4.6 \text{ кпк}, \\ \Sigma_{\text{vir}} &\approx 74\Sigma_0. \end{aligned}$$

Отметим также рисунок из работы [57, рис. 3], на котором показана зависимость

$$\begin{aligned} M_{1/2} &\approx 2 \times 10^8 M_\odot (R_{1/2}/\text{кпк})^2, \\ 10^7 &\leq M_{1/2}/M_\odot \leq 10^{10}, \end{aligned}$$

что приводит к оценке

$$\langle\Sigma_{1/2}\rangle \approx 50\Sigma_0, \quad \langle G_p\rangle \approx 700G_0.$$

Все эти результаты близки к оценкам (4). В то же время следует отметить, что для галактик IC 10, NGC 3738, DDO 46, DDO 101 $\Sigma_{\text{vir}} \geq 100$, а для галактик DDO 50 и IC 1613 $\Sigma_{\text{vir}} \leq 10$ [37]. Эти отличия от средних значений нуждаются в объяснении.

Следует отметить, что заметные вариации приведенных параметров Σ_{vir} , G_p и G_s частично связаны с наблюдательными ограничениями, различиями в методике измерения и принятых предположениях. Например, в работах [50, 51] масса скоплений определялась по гравитационному линзированию, в [49] использовалась температура, измеряемая по рентгеновскому излучению, в [46–48] использовались измерения круговых скоростей на больших радиусах.

Влияние технических факторов приводит к различиям до двух раз в измерениях массы и радиуса одного и того же объекта, и, как следствие, увеличивает разброс в приведенных оценках Σ_{vir} , G_p и G_s . Например, для скопления A383 в трех каталогах даны массы $M_{12} = 490, 310, 810$ и радиусы $R_{\text{vir}} = 1.1, 0.9, 1.8$ Мпк, для скопления A2029 в тех же каталогах даны массы $M_{12} = 1080, 830, 1060$ и радиусы $R_{\text{vir}} = 1.5, 1.4, 2.4$ Мпк соответственно.

Для галактик все параметры определялись по наблюдениям радиуса и круговых скоростей, но при этом максимальный радиус наблюдений может отличаться от действительного вириального радиуса. Для карликовых галактик в качестве вириального радиуса использован радиус на поло-

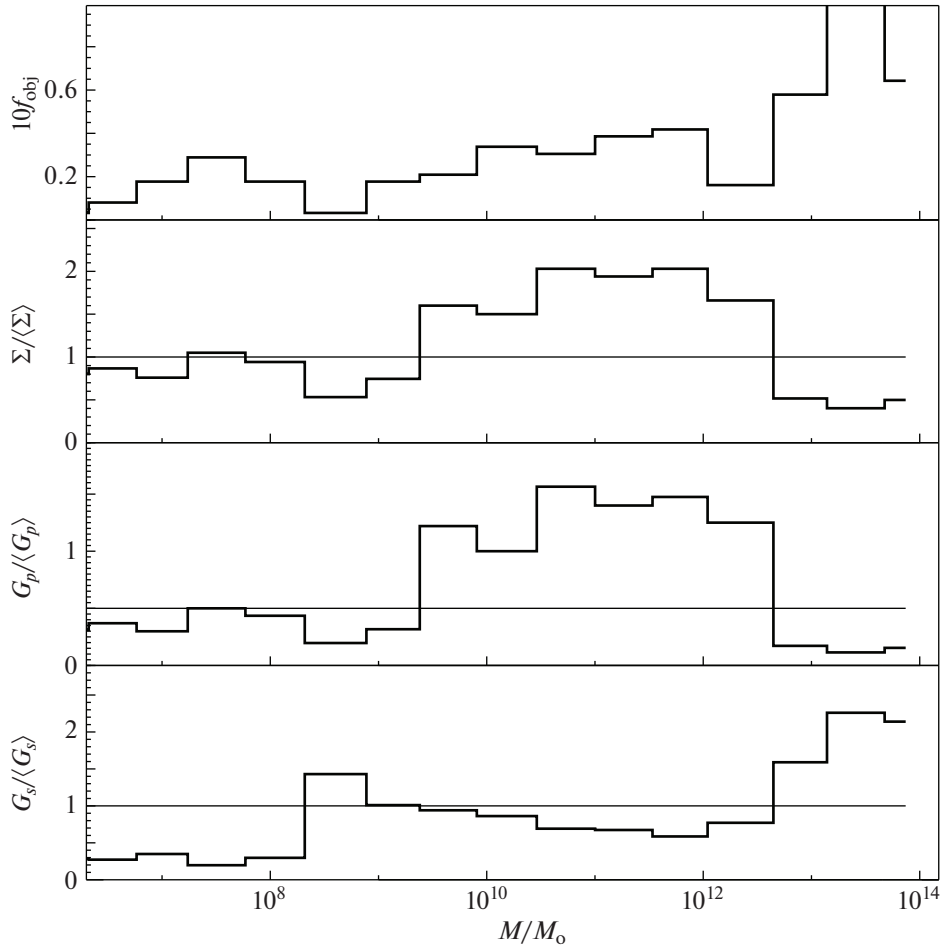


Рис. 1. Для выборки 641 галактики и скопления галактик представлены фракция объектов, f_{obj} , поверхностная плотность, $\Sigma_{\text{vir}}/\langle\Sigma_{\text{vir}}\rangle$, редуцированная плотность, $G_p/\langle G_p\rangle$ и энтропия, $G_s/\langle G_s\rangle$, в зависимости от массы объектов, M/M_\odot .

вине светимости, $R_{1/2}$ [42, 43], что несколько увеличивает поверхностную плотность и редуцированную вириальную плотность. Например, для галактик Cetus, Fornax, Draco, Carina в каталоге [42] приведены следующие значения массы и радиуса на половине светимости $M_{1/2} = (4.0, 9.1, 1.7, 1.1) \times 10^7 M_\odot$, $R_{1/2} = (0.6, 0.7, 0.22, 0.25)$ кпк. В свою очередь в каталоге [43] эти значения равны $M_{1/2} = (10, 2.7, 1.1, 0.34) \times 10^7 M_\odot$, $R_{1/2} = (0.6, 0.34, 0.22, 0.14)$ кпк.

Заметный разброс в рассматриваемых наблюдательных данных затрудняет как сравнение с теорией, так и интерпретацию обсуждаемой универсальности. Однако в рассмотренных ниже численных моделях и поверхностная плотность, и редуцированные вириальные плотность и энтропия отличаются от приведенных значений в 10 раз и более. Поэтому даже очень приближенные полученные оценки универсальности наблюдаемых объектов заслуживают внимания.

2.2. Сравнение с расширенной PS моделью

Наблюдаемое распределение $G_p/\langle G_p\rangle$ на Рис. 2 хорошо аппроксимируется функцией

$$G_p(M)/\langle G_p\rangle \approx \frac{16M_{12}^{0.25}}{(1 + 0.8M_{12}^{0.25})^3}, \quad (6)$$

и максимум распределения находится при $\approx 10^{11} M_\odot$.

Теоретический анализ в рамках расширенной модели PS [23–26], выполненный в работе [58], позволяет связать наблюдаемую универсальность рассматриваемых функций и их слабую зависимость от массы гало с формой спектра мощности космологических возмущений плотности. Оценки сделаны с использованием следующих предположений:

1) гало ТМ образуются из пиков плотности со случайной амплитудой $A\sigma_m$, где $\sigma_m(M)$ — диспер-

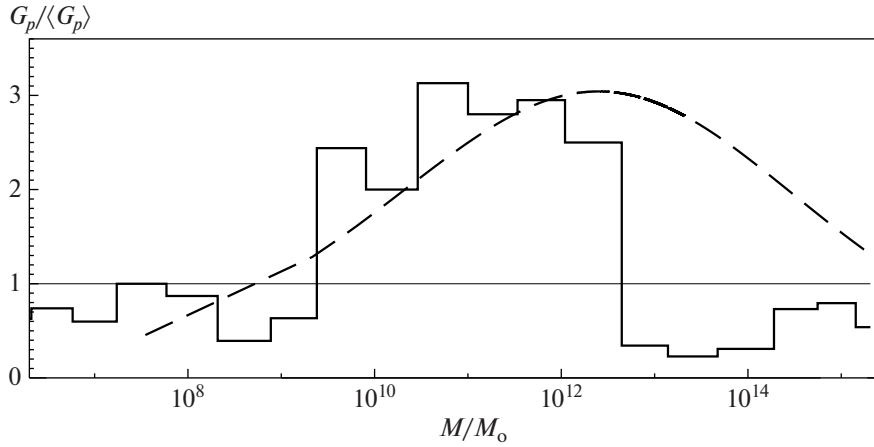


Рис. 2. Для той же выборки, что на рис. 1, распределение наблюдаемой редуцированной плотности $G_p / \langle G_p \rangle$ в зависимости от вириальной массы объектов в сравнении с теоретической зависимостью (7), показанной пунктирной линией.

сия возмущений массы в шаре с радиусом R_{vir} и массой M_{vir} ;

2) гало образуются при красном смещении $1 + z_{\text{cr}}(M_{12}) = A\sigma_m / 1.686$;

3) гало образуются с вириальной плотностью $\rho_{\text{vir}} = 200 \langle \rho_m(z) \rangle$ (1);

4) все галактики хотя бы частично образованы до реионизации при $z \approx 10$ и относятся к отдельным высоким пикам плотности.

Как показано в [58], для спектра [21] с малой массой частиц ТМ получаем

$$G_p^{st}(M) / \langle G_p \rangle \approx \frac{0.2 A_{\text{rad}}^3 M_{12}^{0.32}}{(1 + 0.7 M_{12}^{0.23})^3}. \quad (7)$$

Максимум этой функции достигается при $\approx 1.7 \times 10^{12} M_{\odot}$.

Различия в виде функций (6) и (7) устраняются, если массы соответствующих галактик увеличить в ~ 10 раз. С другой стороны, как показано в [58], наблюдаемое распределение (6) хорошо воспроизводится при соответствующем увеличении амплитуды исходного спектра мощности мелкомасштабных космологических возмущений. При подтверждении использованных наблюдений этот результат закрывает ряд WDM космологических моделей и важен для моделей космологической инфляции. Необходима проверка этих результатов как в численных моделях, так и, главным образом, в наблюдениях во всем интервале масс.

2.3. Представительность рассматриваемой выборки

Ограниченная представительность рассматриваемой выборки изучаемых объектов определяет

ся опубликованными измерениями вириальных параметров. Для галактик она связана в том числе и с заметным влиянием диска спиральных галактик, что делает ненадежными многие оценки вириальной массы. Для скоплений галактик таких ограничений нет, и в рассмотренной выборке их количество в два раза больше количества галактик.

Как уже было отмечено выше, и галактики, и особенно скопления галактик включают лишь малую долю барионов и темной материи. Так, даже принимая $\langle M_{\text{gal}} \rangle \sim 10^{11} M_{\odot}$, при средней плотности наблюдаемых галактик в каталоге SDSS [58] $\langle n_{\text{gal}} \rangle \sim 10^{-2} \text{ Мпк}^{-3}$ их вклад в среднюю плотность (1) можно оценить как

$$\langle \rho_{\text{gal}} \rangle = \langle M_{\text{gal}} \rangle \langle n_{\text{gal}} \rangle \sim 1 M_{\odot} / \text{кпк}^3 \sim 0.03 \langle \rho_m \rangle. \quad (8)$$

Эта грубая оценка близка к оценке [3, 4] доли вещества в составе светящихся объектов

$$\Omega_{\text{lum}} \approx 0.20(1 \pm 0.2) \Omega_b \sim 0.03 \Omega_m. \quad (9)$$

Даже принимая большую среднюю массу скоплений $\langle M_{\text{cls}} \rangle \sim 10^{14} M_{\odot}$, для малой наблюдаемой плотности скоплений $\langle n_{\text{cls}} \rangle \approx 10^{-5} \text{ Мпк}^{-3}$ [59] получаем вновь оценку (8).

Полученные оценки показывают, что отмеченная универсальность структуры (4) относится к объектам, включающим незначительную фракцию барионов (и ТМ), всего около 3%. Но при этом данные объекты представляют практически всю светящуюся материю. Оценки, выполненные с помощью PS модели [7, 20], показывают, что $\sim 3\%$ вещества концентрируется в объектах с массой $M \geq 10^{6-7} M_{\odot}$ при красных смещениях $z \sim 15-12$.

При этом их средняя масса $\langle M \rangle \approx 5 \times 10^{7-8} M_{\odot}$

близка к массам карликовых галактик. Эти оценки близки к оценкам, полученным в численных моделях [60], и определенно указывают на корреляцию отмеченных особенностей внутреннего строения (3), (4) с периодом образования объекта.

2.4. Влияние выбора R_{vir} на вириальные параметры

Вириальный радиус R_{vir} вводится в (2) путем сравнения внутренней K_{vir} и потенциальной U_{vir} энергий гало ТМ. Как было отмечено выше, и в наблюдениях, и в численных моделях эти энергии определяются не очень надежно, и, как правило, в наблюдениях за вириальный радиус принимается максимальный наблюдаемый радиус. В карликовых галактиках Местной группы за вириальный радиус принят радиус на половине светимости, $R_{1/2}$. Этот произвол в выборе R_{vir} является одним из главных источников ошибок в определении обсуждаемых характеристик, поэтому важно получить оценки влияния этого фактора.

Для грубых оценок можно использовать популярные аналитические модели, которые, однако, показывают сильную зависимость от плохо известной структуры периферии гало ТМ. Так, для популярного двухпараметрического профиля [61] NFW

$$\begin{aligned} \rho_{\text{NFW}}(r) &= \frac{\rho_0}{c(1+c)^2}, \quad c = \frac{r}{r_0}, \\ M &= M_0 f_{\text{NFW}}(c) = 4\pi\rho_0 r_0^3 f_{\text{NFW}}(c), \\ f_{\text{NFW}}(c) &= \ln(1+c) - \frac{c}{1+c}, \\ -U_{\text{NFW}} &= \frac{GM_0^2}{2r_0} \left[\frac{c^2}{2(1+c)^2} - \frac{f(c)}{1+c} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где ρ_0, r_0 – параметры центрального ядра, c – концентрация (безразмерный радиус). Этот профиль часто используется для описания скоплений галактик и массивных объектов в численных моделях. Однако в этой модели вириальная масса не ограничена, что затрудняет сравнение с наблюдениями. Для объекта с таким профилем плотности рассматриваемая поверхностная плотность вириализованных объектов зависит от радиуса

$$\frac{M(c_1)}{M(c_2)} = \frac{f_{\text{NFW}}(c_1)}{f_{\text{NFW}}(c_2)}, \quad \frac{\Sigma_{\text{vir}}(c_1)}{\Sigma_{\text{vir}}(c_2)} \approx \frac{c_2^2 f_{\text{NFW}}(c_1)}{c_1^2 f_{\text{NFW}}(c_2)}, \quad (11)$$

и в интервале $3 \leq c_1, c_2 \leq 6$ масса и поверхностная плотность меняются как

$$M_{\text{vir}}(3)/M_{\text{vir}}(6) \approx 0.55, \quad \Sigma_{\text{vir}}(3)/\Sigma_{\text{vir}}(6) \approx 2.5.$$

Таким образом, измерения в этом интервале радиусов остаются в пределах разброса данных (4). Эти свойства снижают требования к точности наблюдений вириальных параметров и позволяют использовать для грубых оценок наблюдения,

выполненные разными методами и с разной точностью.

Однако в другой модели [62] градиент плотности на периферии больше, чем в предыдущей модели и влияние ошибки в выборе R_{vir} возрастает:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \frac{\rho_0}{c(1+c)^3}, \quad c = \frac{r}{r_0}, \\ R_{\text{vir}} &\rightarrow \frac{6}{5} r_0, \quad M_{\text{vir}} = 2\pi\rho_0 r_0^3 \frac{c^2}{(1+c)^2}, \\ \frac{M_{\text{vir}}(3)}{M_{\text{vir}}(6)} &\approx 0.76, \quad \frac{\Sigma_{\text{vir}}(3)}{\Sigma_{\text{vir}}(6)} \approx 3. \end{aligned} \quad (12)$$

3. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ВИРИАЛЬНЫЕ ПЛОТНОСТЬ И РАДИУС ГАЛО

В большинстве наблюдаемых объектов вириальный радиус больше радиуса, определяемого звездами, или радиоизлучением. Поэтому известное определение вириальной массы по измерениям кеплеровской зависимости круговой скорости от радиуса $v_{\text{circ}}^2 = GM_{\text{vir}}/r$ имеет ограниченное применение и требует нескольких наблюдений на возрастающих радиусах. Но и в этом случае возникают заметные ошибки из-за несферичности периферии галактик и скоплений галактик, из-за сильной неоднородности окружающей среды и др. Так, многие галактики расположены в филаментах, что влияет на свойства периферийных областей. Учитывать влияние окружающей среды особенно важно при определении вириальных параметров скоплений галактик, которые, как правило, расположены внутри сверхскоплений – “блинов” Зельдовича, и всегда тесно связаны с несколькими филаментами. Эти особенности ярко проявляются в численных модельных расчетах (см., напр., [63]).

В последние годы стало популярным универсальное определение вириальной плотности

$$\rho_{\text{vir}} \approx 200 \langle \rho_m(z) \rangle. \quad (13)$$

Вместо фактора 200 в этом соотношении можно использовать другие, например, фактор 500.

Это соотношение феноменологически описывает процесс релаксации образующегося ТМ гало. Оно было получено в простой модели в работе [27] и не имеет серьезного теоретического обоснования. Строго говоря, оно лишь предлагает связать плотность ρ_{vir} с соответствующим красным смещением z_{cr} ,

$$\rho_{\text{vir}} \approx 7(1+z_{\text{cr}}) \times 10^3 M_{\odot}/\text{кпк}^3.$$

В модели [27] это соотношение можно (условно) рассматривать как определение красного смещения z_{cr} рождения объекта. В работе [26] этот вопрос рассмотрен подробнее.

Однако дальнейшее развитие этого подхода привело к отождествлению красного смещения в соотношении (13) с *наблюдаемым* красным смещением объекта. По существу, это отождествление предполагает соответствующий продолжающийся рост массы объекта вплоть до момента наблюдения и единую вириальную плотность всех объектов при данном z — от карликовых галактик до скоплений галактик — вне зависимости от их массы.

Такой подход привлекает своей универсальностью, но не согласуется с измерениями вириальных параметров в наблюдениях, а потому часто приводит к неожиданным результатам, например, увеличивая вириальный радиус в несколько раз ради сохранения низкой вириальной плотности при малых z . Более того, сравнение соотношения (13) с наблюдаемым соотношением (4) приводит к выводу, что

$$M_{\text{vir}} \approx 10^{15} M_{\odot} (1+z)^{-6}.$$

Это соотношение примерно описывает эволюцию средней массы $\langle M_{\text{vir}}(z) \rangle$, определяемой PS моделью. Но если вириальная плотность *всех* объектов при данном красном смещении одинакова, то соотношения (4) ликвидируют индивидуальность наблюдаемых галактик и приводят к неожиданному (но ошибочному) выводу, что для *всех* галактик и скоплений галактик, наблюдаемых при данном красном смещении, все вириальные параметры (в том числе и масса) одинаковы.

Определение вириального радиуса в численных моделях предполагает очень подробное изучение соответствующими методами периферии галактик, скоплений галактик и других элементов структуры Вселенной. Как отмечено выше, при этом желательнее не использовать сферического приближения. Ряд методов, используемых в таком анализе, обсуждаются в работе [64].

Вероятно, одним из наиболее перспективных методов изучения компактных гало является метод “Минимального Покрывающего Древа” (Minimal Spanning Tree) [58, 65–67], который обеспечивает высокую эффективность описания при минимальных предположениях о свойствах изучаемой системы. В последнее время этот метод широко применяется при анализе некоторых космологических задач [68–71].

4. СВОЙСТВА ЯДЕР МАЛОМАССИВНЫХ ГАЛАКТИК

Возможная универсальность свойств ядер маломассивных галактик давно привлекает внимание [28–32], хотя для этого и нет серьезных теоретических оснований. Но из-за высокой концентрации барионов свойства ТМ в центральных областях трудно определить, и все оценки пара-

метров таких ядер всегда будут модельно зависимы. Подробное обсуждение этого вопроса [28, 33] хорошо демонстрирует различия в подходах и выводах.

Если в [28, 32] авторы считают установленной универсальность поверхностной плотности ядер маломассивных галактик $\langle \rho_0 r_0 \rangle$, то с этим не согласны авторы [33, 34]. Это лишний раз подтверждает сильную зависимость свойств таких ядер от методов разделения вклада барионов и ТМ. Неоднократно отмеченная сравнительно слабая связь вириальных параметров со свойствами ядер маломассивных галактик явно прослеживается в выборке [37].

5. ТМ ГАЛО В ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЯХ

На рис. 3 в качестве примера показано распределение частиц ТМ в численной модели. Темные точки, соответствующие гало ТМ, очевидно, коррелируют с видимыми структурными элементами. К сожалению, в большинстве численных моделей, созданных после 2011 г., выделение гало ТМ выполняется с помощью BDM кода [7, 72] с использованием универсальной вириальной плотности (13). Как было отмечено выше, это сильно искажает реальные параметры гало и затрудняет сравнение с наблюдениями. Кроме того, разделение модельных ТМ гало на “галактики” и “темные” объекты не может быть выполнено с достаточной достоверностью, и поэтому мы вынуждены рассматривать только зависимость вириальных характеристик ТМ гало от массы.

Для нескольких выборок модельных гало ТМ средние характеристики приведены в табл. 2. Отметим, что если для малой фракции гало с $M_{12} \geq 0.1$ эти характеристики близки к наблюдаемым (4), то для гораздо большей фракции гало ТМ с $M_{12} \leq 0.1$ значения $\langle \Sigma_{\text{vir}} \rangle$ и $\langle G_p \rangle$ значительно меньше. В рамках PS модели это различие в свойствах наблюдаемых и модельных гало ТМ можно частично объяснить обрезанием модельного спектра плотности

$$\sigma_m \approx \frac{11}{1 + 3.735 M_{12}^{0.17} + 0.36 M_{12}^{0.425}}, \quad (14)$$

$$G_p \propto M_{x12}^{1/2}.$$

Таблица 2. Вириальные параметры нескольких выборок гало ТМ в численных моделях [7, 73]

N_{obj}	$\langle M_{12} \rangle$	$\langle \Sigma_{\text{vir}} \rangle / \Sigma_0$	$\langle G_p \rangle / G_0$	$\langle G_s \rangle / \text{см}^2 \text{кЭЮ}$
30	660	43(1 ± 0.3)	600(1 ± 0.4)	1.6(1 ± 0.2)
280	≥100	48(1 ± 0.2)	700(1 ± 0.1)	6.1(1 ± 0.2)
4000	~0.1	47(1 ± 0.8)	800(1 ± 1.1)	10(1 ± 0.5)
10 ⁶	≤0.1	3(1 ± 0.8)	10(1 ± 0.4)	36(1 ± 0.5)

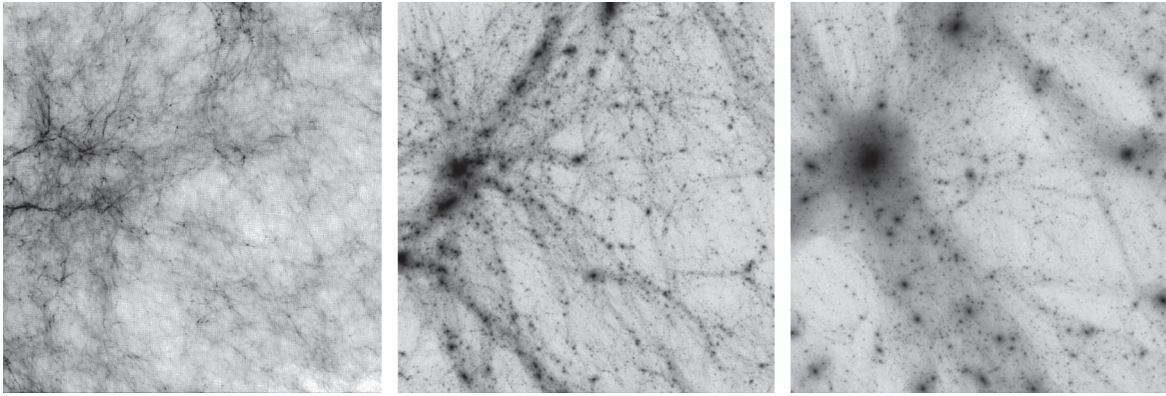


Рис. 3. Пример возникновения и последующего разрушения структурных элементов в окрестности крупного ТМ гало. Показано распределение частиц ТМ при красных смещениях (слева направо) $z = 15$, $z = 4$ и $z = 1$.

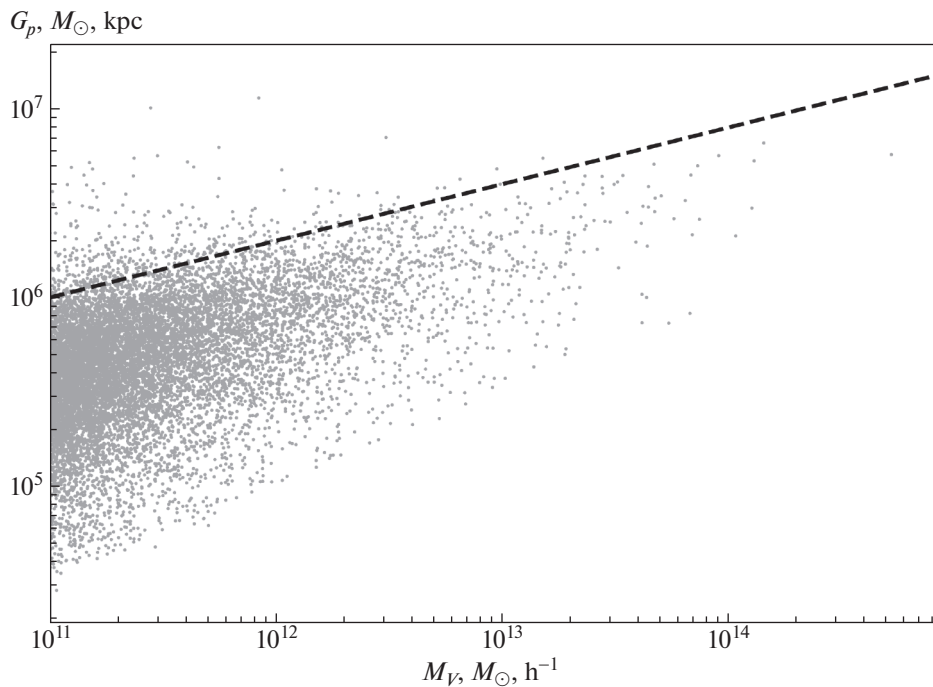


Рис. 4. Распределение редуцированной плотности $G_p(M_{\text{vir}})$ для 4.5×10^5 гало в модели [7]. Штриховая линия соответствует условию $G_p = 2 \times 10^6 M_{12}^{0.3}$.

Соответствующие различия в виде функций (6) и (15) ведут к подавлению модельных $\langle \Sigma_{\text{vir}} \rangle$ и $\langle G_p \rangle$ при $M_{12} \ll 1$.

Этот фактор важен, но он не объясняет большой разброс G_p на рис. 4, где приведено распределение редуцированной плотности $G_p(M_{\text{vir}})$ гало ТМ в численных моделях [7]. По сравнению с рис. 1 на рис. 4 видна многозначность функции $G_p(M_{\text{vir}})$, возрастающая при малых массах M_{vir} . Это обусловлено массовым образованием гало

ТМ с $M_{12} \leq 1$ на красных смещениях $z \leq 10$. Эти гало умеренной массы связаны с многочисленными низкими пиками плотности, количество которых по меньшей мере в $\sim 10^3$ раз превышает количество “галактик”. Их свойства плохо описываются расширенной PS моделью, которая не рассматривает взаимные влияния близких пиков. Эти взаимодействия мало существенны для эволюции редких высоких пиков, но они в корне меняют эволюцию многочисленных низких пиков

плотности. Эти различия подчеркивают ограниченность применимости теоретической PS модели, а также важность учета взаимодействия близких пиков плотности, обнаруженного в численных моделях.

Напомним, что в отличие от этих многочисленных гало ТМ маломассивные галактики, как правило, связаны с высокими пиками, соседствующими с еще более высокими пиками больших (“хозяйских”) галактик. Они содержат звезды и, следовательно, образовались при $z \geq 10$, но рост их массы при $z \leq 10$ заторможен влиянием более массивных соседей [24] (или другими факторами). Поэтому различия в свойствах маломассивных галактик и модельных гало ТМ сравнимой массы совершенно естественны.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Теоретические и численные модели образования галактик и структуры Вселенной внесли сравнимый взаимно дополняющий вклад в развитие космологии. Если теоретические модели, такие как [20–23, 26, 74–77], подчеркивают главные факторы, определяющие образование и эволюцию структурных элементов, то численные модели позволяют учесть их комплексное влияние. В этой работе показано, что в рамках расширенной PS модели хорошо описывается универсальность свойств наблюдаемых галактик и скоплений галактик. В то же время такой подход имеет ограниченную применимость при описании многочисленных модельных гало ТМ.

Показано, что:

1. Большая часть галактик и скоплений галактик демонстрирует универсальность вириальных характеристик, таких как поверхностная плотность, Σ_{vir} , редуцированная плотность и энтропия G_p , G_s (см. (4), (7)), что позволяет рассматривать эти объекты как однопараметрическую последовательность.

2. Эта универсальность связана с эволюцией относительно небольшой популяции высоких пиков плотности, описывающей образование галактик и скоплений галактик.

3. В численных моделях эта универсальность сохраняется лишь для массивных гало ТМ. Для многочисленных гало ТМ малой и умеренной массы эта универсальность полностью разрушается при их взаимодействии. Это взаимодействие мало для эволюции редких высоких пиков, при этом оно в корне меняет эволюцию и свойства многочисленных гало ТМ малой массы.

4. Наблюдаемая зависимость вириальных характеристик галактик от вириальной массы объекта чувствительна к виду спектра начальных возмущений. В перспективе это может позволить

оценить вид мелкомасштабной части спектра возмущений, что важно для изучения свойств ранней Вселенной.

К сожалению, случайный характер имеющихся на сегодня наблюдательных данных не позволяет продвинуться в анализе этих важных вопросов. Тем не менее при организации специальной программы наблюдений современный уровень регистрирующей аппаратуры может позволить получить необходимые данные. Не менее обещающим в этом направлении представляется и детальный анализ результатов специальных численных моделей, сочетающих высокое разрешение с корректным описанием крупномасштабных корреляций в эволюции структурных элементов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена в рамках программы ФИАН ННГ 01-2018.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *E. Komatsu, K. M. Smith, J. Dunkley, C. L. Bennett, et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **192**, id. 18 (2011).
2. *P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, et al.*, *Astron. and Astrophys.* **594**, id.A13 (2016).
3. *J. M. Shull, B. D. Smith, and C. W. Danforth*, *Astrophys. J.* **759**, id. 23 (2012).
4. *T. Naab and J. P. Ostriker*, *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* **55**, 59 (2017).
5. *D. R. Weisz, A. E. Dolphin, E. D. Skillman, J. Holtzman, K. M. Gilbert, J. J. Dalcanton, and B. F. Williams*, *Astrophys. J.* **789**, id. 148 (2014).
6. *M. Boylan-Kolchin, V. Springel, S. White, A. Jenkins, and G. Lemson*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **398**, 1150 (2009).
7. *A. Klypin, S. Trujillo-Gomez, and J. Primack*, *Astrophys. J.* **740**, 102 (2011).
8. *M. Demiański, A. Doroshkevich, and T. Larchenkova*, *Astron. Letters*, in press (2020).
9. *J. Simon*, *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* **57**, 375 (2019).
10. *S. Chandrasekhar*, *Rev. Modern Physics* **15**, 1 (1943).
11. *D. Lynden-Bell*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **136**, L101 (1967).
12. *J. Fillmore and P. Goldreich*, *Astrophys. J.* **281**, 1 (1984).
13. *A. V. Gurevich and K. P. Zybin*, *Physics Uspekhi* **38**, 687 (1995).
14. *S. Allen, A. Evrard, and A. Mantz*, *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* **49**, 409 (2011).
15. *A. B. Zacos, A. C. Saburova, A. B. Хонерсков, C. A. Хонерсков*, *Успехи физ. наук* **187**, 3 (2017).
16. *J. Tumlinson, M. Peebles, and J. Werk*, *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* **55**, 389 (2017).
17. *J. Bullock and M. Boylan-Kolchin*, *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* **55**, 343, (2017).

18. *R. Wechsler and J. Tinker*, *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* **56**, 435, (2018).
19. *T. Zavala and C. Frenk*, *Galaxies* **7**, 81 (2019).
20. *W. Press and P. Schechter*, *Astrophys. J.* **187**, 425 (1974).
21. *J. Bardeen, J. Bond, N. Kaiser, and A. Szalay*, *Astrophys. J.* **304**, 15 (1986).
22. *J. Bond, S. Cole, G. Efstathiou, and N. Kaiser*, *Astrophys. J.* **379**, 440 (1991).
23. *R. Sheth and G. Tormen*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **329**, 61 (2002).
24. *R. Sheth*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **345**, 1200 (2003).
25. *R. Sheth, and G. Tormen*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **350**, 1385 (2004).
26. *R. Sheth, and G. Tormen*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **349**, 1464 (2004).
27. *C. Lacey and S. Cole*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **262**, 627 (1993).
28. *P. Salucci*, *Astron. and Astrophys. Rev.* **27**, id. 2 (2019).
29. *J. Kormendy and K. Frimen*, in *Dark Matter in Galaxies*, IAU Symp. 220, held 21–25 July, 2003 in Sydney, Australia, edited by S. D. Ryder, D. J. Pisano, M. A. Walker, and K. C. Freeman (San Francisco: Astron. Soc. Pacific, 2004), p. 377.
30. *F. Donato, G. Gentile, and P. Salucci*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **397**, 1169 (2009).
31. *C. Di Paolo, P. Salucci, and A. Erkurt*, arXiv:1805.07165 [astro-ph.GA] (2018).
32. *E. Karukes and P. Salucci*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **465**, 4703 (2017).
33. *A. Saburova and A. Del Popolo*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **445**, 3512 (2014).
34. *L. M. Fernández-Hernández, A. Montiel, and M. A. Rodríguez-Meza*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **488**, 5127 (2019).
35. *W. J. G. de Blok, F. Walter, E. Brinks, C. Trachternach, S.-H. Oh, and R. C. Kennicutt, Jr.*, *Astrophys. J.* **136**, 2648 (2008).
36. *R. Kuzio de Naray, S. S. McGaugh, W. J. G. de Blok, and A. Bosma*, *Astrophys. J. Suppl.* **165**, 461 (2006).
37. *S.-H. Oh, D. A. Hunter, E. Brinks, B. G. Elmegreen, et al.*, *Astron. J.* **149**, id. 180 (2015).
38. *M. Demiarński and A. Doroshkevich*, *Astron. Astrophys. Trans.* **30**, 185 (2017).
39. *N. Kaiser*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **222**, 323 (1986).
40. *R. A. Swaters, R. Sancisi, T. S. van Albada, J. M. van der Huls*, *Astron. and Astrophys.* **493**, 871 (2009).
41. *R. Bottema and J. L. G. Pestaña*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **448**, 2566 (2015).
42. *E. N. Kirby, J. S. Bullock, M. Boylan-Kolchin, M. Kaplinghat, and J. G. Cohen*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **439**, 1015 (2014).
43. *M. G. Walker, M. Mateo, E. W. Olszewski, J. Penarrubia, N. W. Evans, and G. Gilmore*, *Astrophys. J.* **704**, 1274 (2009).
44. *J. Merten, M. Meneghetti, M. Postman, K. Umetsu, et al.*, arXiv:1404.1376 [astro-ph.CO] (2014).
45. *R. W. Schmidt and S. W. Allen*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **379**, 209 (2007).
46. *M. Arnaud, E. Pointecouteau, and G. W. Pratt*, *Astron. and Astrophys.* **441**, 893 (2005).
47. *E. Pointecouteau, M. Arnaud, and G. W. Pratt*, *Astron. and Astrophys.* **435**, 1 (2005).
48. *G. W. Pratt, M. Arnaud, and E. Pointecouteau*, *Astron. and Astrophys.* **446**, 429 (2006).
49. *Z. Zhu, H. Xu, J. Wang, J. Gu, et al.*, arXiv:1511.04699 [astro-ph.CO] (2015).
50. *C. Sifon, H. Hoekstra, M. Cacciato, M. Viola, et al.*, *Astron. and Astrophys.* **575**, id.A48 (2015).
51. *R. Herbonnet, C. Sifon, H. Hoekstra, Y. Bahe, et al.*, arXiv:1912.04414 [astro-ph.CO] (2019).
52. *Iu. Babyk, I. Vavilova, and A. Del Popolo*, arXiv:1208.2424 [astro-ph.CO] (2012).
53. *W. Xu, M. E. Ramos-Ceja, F. Pacaud, T. H. Reiprich, and T. Erben*, *Astron. and Astrophys.* **619**, id.A162 (2018).
54. *M. E. Ramos-Ceja, F. Pacaud, T. H. Reiprich, K. Migkas, L. Lovisari, and G. Schellenberger*, *Astron. and Astrophys.* **626**, id.A48 (2019).
55. *A. Wasserman, A. J. Romanowsky, J. Brodie, P. van Dokkum, et al.*, *Astrophys. J.* **863**, id. 130 (2018).
56. *P. van Dokkum, R. Abraham, J. Brodie, C. Conroy, et al.*, *Astrophys. J.* **828**, id. L6 (2016).
57. *D. Zaritsky*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **464**, L110 (2017).
58. *A. Doroshkevich, D. L. Tucker, S. Allam, and M. J. Way*, *Astron. and Astrophys.* **418**, 7 (2004).
59. *A. Vikhlinin, A. V. Kravtsov, R. A. Burenin, H. Ebeling, et al.*, *Astrophys. J.* **692**, 1060 (2009).
60. *S. V. Pilipenko, M. A. Sánchez-Conde, F. Prada, and G. Yepes*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **472**, 4918 (2017).
61. *J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White*, *Astrophys. J.* **490**, 493 (1997).
62. *L. Hernquist*, *Astrophys. J.* **356**, 359 (1990).
63. *S. Tonnesen, B. D. Smith, J. A. Kollmeier, and R. Cen*, *Astrophys. J.* **845**, id. 47 (2017).
64. *C.-H. Chuang, C. Zhao, F. Prada, E. Munari, et al.*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **452**, 686 (2015).
65. *J. D. Barrow, S. P. Bhavsar, and D. H. Sonoda*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **216**, 17 (1985).
66. *S. Gottlöber and V. Turchaninov*, *EAS Publ. Ser.* **20**, 25 (2006).
67. *M. Demiarński, A. Doroshkevich, S. Pilipenko, and S. Gottlöber*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **414**, 1813 (2011).
68. *M. Alpaslan, A. S. G. Robotham, D. Obreschkow, S. Penny, et al.*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **440**, L106 (2014).

69. *K. Naidoo, L. Whiteway, E. Massara, D. Gualdi, O. Lahav, M. Viel, H. Gil-Marín, and A. Font-Ribera*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **491**, 1709 (2020).
70. *A. Rost, F. Stasyszyn, L. Pereyra, Luis; H. J. Martínez*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **493**, 1936 (2020).
71. *I. Santiago-Bautista, C. A. Caretta, H. Bravo-Alfaro, E. Pointecouteau, and H. Andernach*, arXiv:2002.03446 [astro-ph.GA] (2020).
72. *P. S. Behroozi, R. H. Wechsler, and H.-Y. Wu*, Astrophys. J. **762**, id. 109 (2013).
73. *T. J. Armitage, D. J. Barnes, S. T. Kay, Y. M. Bahe, C. Dalla Vecchia, R. A. Crain, and T. Theuns*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **474**, 3746 (2018).
74. *Ya. Zel'dovich*, Astron. and Astrophys. **5**, 84 (1970).
75. *A. G. Doroshkevich, M. Iu. Khlopov, R. A. Sunyaev, A. S. Szalay, and Ia. B. Zeldovich*, Ann. N.Y. Acad. Sci. **375**, 32 (1981).
76. *G. R. Blumenthal, H. Pagels, and J. R. Primack*, Nature, **299**, 37 (1982).
77. *S. F. Shandarin, A. G. Doroshkevich, and Ya. B. Zel'dovich*, Soviet Physics Uspekhi **26**, 46 (1983).