

УДК 520.8

АВТОНОМНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КА ГЛОНАСС И GPS В НАВИГАЦИОННЫХ ПРИЕМНИКАХ

© 2020 г. С. М. Кудрявцев^{1,*}

¹ *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга, Москва, Россия*

**E-mail: ksm@sai.msu.ru*

Поступила в редакцию 05.06.2020 г.

После доработки 30.07.2020 г.

Принята к публикации 30.07.2020 г.

Разработан и исследован новый алгоритм автономного долгосрочного прогнозирования эфемерид КА ГЛОНАСС и GPS в наземных навигационных приемниках. Алгоритм может применяться для определения координат пользователя, когда невозможно или затруднительно принять бортовые эфемериды КА (напр., в условиях плохой радиовидимости спутников). Показано, что точностные характеристики метода превышают аналогичные показатели других известных решений. Получена зависимость значения коэффициента учета солнечного давления, специфичного для каждого спутника, от поколения блока КА. Одновременно с параметрами движения спутников определяются координаты полюса Земли с точностью до единиц миллисекунд дуги. Использование автономного алгоритма прогнозирования эфемерид КА позволяет значительно ускорить поиск видимых спутников ГЛОНАСС и GPS и первое определение координат пользователя после “холодного” старта приемника. Статья основана на докладе, сделанном на конференции “Астрометрия вчера, сегодня, завтра” (ГАИШ МГУ, 14–16 октября 2019 г.).

DOI: 10.31857/S0004629920120051

1. ВВЕДЕНИЕ

Каждый КА ГЛОНАСС и GPS периодически транслирует радиосообщения, которые принимаются наземными навигационными приемниками. Эти сообщения, в частности, включают в себя время отправления сигнала и эфемериды спутника. Приемник сравнивает время отправления сигнала (по часам КА) с временем его получения (по часам приемника) и вычисляет соответствующую “псевдодальность” от приемника до КА. (Приставка “псевдо” обусловлена различными часами, используемыми для определения времени распространения сигнала.) При получении измерений “псевдодальности” до 4 навигационных КА приемник может определить свое текущее положение в пространстве и возможную поправку к своим часам. Эфемериды спутника представляют собой набор орбитальных элементов КА GPS или прямоугольные координаты и скорости КА ГЛОНАСС на некоторую начальную эпоху. С помощью стандартного алгоритма прогнозирования движения КА, встроенного в приемник, каждая принятая начальная эфемерида спутника может быть использована (или “размножена”) на интервале времени, не превышающем 4 ч для КА GPS и 30 мин для КА ГЛОНАСС. За пределами этих интервалов точность прогнозирования параметров

движения КА стандартным алгоритмом резко ухудшается.

Из-за низкой пропускной способности используемых каналов связи (50 бит/с) время получения одного измерения “псевдодальности” составляет 2 с для КА ГЛОНАСС и 6 с для КА GPS. Однако время, необходимое для приема полной эфемериды одного спутника, составляет уже 18–36 с. Поэтому нередки ситуации, когда в условиях недостаточной радиовидимости КА (плохие метеословия, нахождение приемника в радиотени от высоких зданий/деревьев и т.д.) сообщение со спутника полностью не принимается. Соответственно, если имеющиеся в приемнике начальные эфемериды КА уже “устарели”, координаты потребителя определяются неудовлетворительно. Для разрешения таких ситуаций в ряде навигационных приемников (в основном, смартфонах) используется технология Assisted-GPS (или A-GPS). В данной технологии эфемериды КА на необходимый момент времени запрашиваются и скачиваются со специальных серверов по Интернету. Однако эта технология имеет свои очевидные недостатки. Во-первых, для ее использования приемник должен включать в себя модуль GSM или Wi-Fi, что не всегда выполняется для массовых моделей, так как приводит к их удоро-

жанию. Во-вторых, приемник должен находиться в зоне покрытия сети сотовой связи или сети Wi-Fi, которые еще не везде доступны. И, в-третьих, потребляемый при скачке данных трафик может привести к дополнительным расходам потребителя на связь, особенно при его нахождении в роуминге.

От указанных недостатков свободны методы автономного прогнозирования координат навигационного КА, выполняемые непосредственно в самом приемнике. В отличие от стандартного алгоритма “размножения” эфемерид, действительного, как сказано выше, на интервале времени от 30 мин до 4 ч, автономный метод должен сохранять необходимую точность на существенно большем интервале времени, желательно, продолжительностью в несколько суток. При этом даже при наличии уверенного сигнала со спутников использование таких автономных и относительно долгосрочных эфемерид позволяет сократить время первого определения координат пользователя после “холодного старта” приемника (т.е. его включения после длительного периода неактивности) с нескольких минут, необходимых для поиска видимых спутников, до нескольких секунд.

В литературе имеется ряд работ, описывающих разработки подобных автономных методов (см., напр., [1–3]), и известны некоторые модели зарубежных приемников, где они уже используются. Однако в российских GPS/ГЛОНАСС приемниках, насколько нам известно, подобные технологии в настоящее время пока не применяются. Поэтому нами был разработан новый метод автономного прогнозирования координат КА ГЛОНАСС и GPS, который может быть использован в перспективных навигационных приемниках. В частности, метод прошел апробацию на отечественном приемнике GeoS [4]. Последующие разделы представляют сам метод и результаты исследований его характеристик.

2. СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

2.1. Сохранение и “размножение” бортовых эфемерид

Во время своей работы приемник принимает краткосрочные бортовые эфемериды КА и использует их для получения навигационного решения, т.е. определения текущих координат потребителя. При этом после определенной доработки приемник может сохранять ряд последних принятых эфемерид в своей памяти. Когда приемник завершил решение навигационной задачи (или во время вынужденного простоя в своей работе, например, при попадании в радиотень), он может выполнить “размножение” сохраненных бортовых эфемерид КА на полном интервале

применимости каждой из них. Для этого приемником используются те же стандартные алгоритмы прогнозирования параметров движения КА, что применяются им для получения навигационного решения. Это аналитические формулы в случае вычисления оскулирующих элементов орбиты КА GPS и численное интегрирование методом Рунге-Кутты 4-го порядка для прогнозирования координат КА ГЛОНАСС. Приемник может также сохранить и “размножить” эфемериды КА, полученные им не только во время последнего прохождения данного спутника в зоне видимости приемника, но и аналогичную информацию из нескольких предыдущих прохождений этого же КА. При получении новых эфемерид КА в следующем сеансе видимости они замещают собой соответствующую информацию с первого сохраненного сеанса, т.е. объем памяти приемника, необходимый для хранения всех данных, не увеличивается со временем.

2.2. Уточнение параметров движения КА на основе бортовых эфемерид

Используя сохраненные и “размноженные” на ряд моментов времени бортовые эфемериды КА в качестве фиктивных “измерений” спутника, можно уточнить ряд параметров движения этого КА, например, с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Необходимое для этого интегрирование уравнений движения спутника на всем интервале “измерений” возможно осуществлять тем же численным методом, который используется в навигационных приемниках для “размножения” бортовых эфемерид КА ГЛОНАСС. Но при этом должна применяться гораздо более точная модель возмущающих сил, чем используемая стандартным алгоритмом прогнозирования.

2.3. Прогнозирование координат спутника на расширенном интервале

По завершении процедуры автономного уточнения параметров движения КА полученное решение может быть использовано для прогнозирования координат спутника на расширенном интервале времени, существенно превышающем стандартный период применимости бортовых эфемерид. Для этого используются уточненные параметры движения КА, а также метод численного интегрирования и улучшенная модель движения КА, которые применялись на предыдущем этапе. Для ускорения вычислений координат спутника во время получения навигационного решения возможно также заранее выполнить численное интегрирование уравнений движения КА и построить аналитические полиномы (напр., Чебышева), представляющие эфемериды КА на

всем расширенном интервале времени. В этом случае время вычисления координат спутника при принятии (возобновлении) навигационного сигнала и, как следствие, время получения навигационного решения не будут зависеть от периода прогнозирования движения КА.

3. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

В решении задачи автономного прогнозирования эфемерид КА GPS и ГЛОНАСС используются различные системы координат. Краткому описанию этих систем и взаимному переходу между ними служит настоящая глава.

3.1. Системы координат бортовых эфемерид КА GPS и ГЛОНАСС

Эфемериды КА GPS, передаваемые в навигационном сообщении, даны во Всемирной геодезической системе координат WGS84 (США). Векторы состояния КА ГЛОНАСС с 31.12.2013 г. заданы в системе отсчета ПЗ-90.11 (Россия). Обе системы координат отличаются от ITRF2008, практической реализации Международной земной системы координат ITRS, только постоянным сдвигом начала отсчета на величину порядка 10 см и отклонениями осей координат, не превышающими нескольких единиц миллисекунд дуги [5]. При этом ITRF2008 отличается от ITRF2014, новейшей реализации ITRS, в основном, сдвигом начала системы отсчета на величину порядка несколько мм [6]. Как следствие, в рамках точности рассматриваемой задачи можно полагать системы координат WGS84 и ПЗ-90.11, используемые для представления бортовых эфемерид КА GPS и ГЛОНАСС, идентичными и совпадающими с последней реализацией ITRS.

3.2. Геоцентрическая небесная система координат

Система координат ITRS, в которой мы в данной задаче полагаем заданными бортовые эфемериды КА ГЛОНАСС и GPS, является неинерциальной, она жестко связана с корой Земли и вращается вместе с последней. Однако интегрирование уравнений движения спутника предпочтительно осуществлять в инерциальной системе отсчета. Одной из таких систем является Геоцентрическая небесная система координат (GCRS). Для перехода между ITRS и GCRS мы будем применять классический подход [7], где точка весеннего равноденствия используется в качестве начала отсчета системы, но с модификациями, рекомендуемыми в работах [8, 9]. Во избежание некоторых неоднозначностей в определении матриц перехода между ITRS и GCRS, имеющих в литературе, приведем ниже их краткий вид.

Пусть $\mathbf{r}_{ITRS}(t)$ есть вектор прямоугольных координат КА в ITRS на произвольный момент времени t , рассчитываемый по бортовым эфемеридам спутника, и $\mathbf{r}_{GCRS}(t)$ есть соответствующий ему вектор прямоугольных координат КА в GCRS. Тогда

$$\mathbf{r}_{ITRS}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{G}(t)\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}_{GCRS}(t), \quad (1)$$

где \mathbf{B} — постоянная матрица, представляющая малые углы отклонений осей GCRS от осей системы координат, определяемой средней точкой весеннего равноденствия и средним экватором Земли на эпоху J2000.0 [8]; $\mathbf{P}(t)$ — матрица прецессии, определяющая положение текущего среднего экватора Земли на момент t относительно среднего экватора Земли эпохи J2000.0,

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{R}_3(\chi_A)\mathbf{R}_1(-\omega_A)\mathbf{R}_3(-\psi_A)\mathbf{R}_1(\epsilon_0), \quad (2)$$

$\mathbf{R}_j(\delta)$ здесь стандартная матрица, описывающая правый поворот системы координат на угол δ вокруг оси j этой системы ($j = 1, 2, 3$), при этом прецессионные углы χ_A , ω_A , ψ_A на момент времени t и ϵ_0 определяются выражениями, приведенными в [10]; $\mathbf{N}(t)$ — матрица нутации, соответствующая отклонению истинного экватора Земли от среднего экватора планеты,

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{R}_1(-\epsilon_A - \Delta\epsilon)\mathbf{R}_3(-\Delta\psi)\mathbf{R}_1(\epsilon_A), \quad (3)$$

где значение угла ϵ_A на момент времени t вычисляется согласно [10], а текущие нутационные углы $\Delta\epsilon$, $\Delta\psi$ могут быть взяты из численных эфемерид планет DE-430 [11];

$\mathbf{G}(t)$ — матрица поворота за вращение Земли, описывающая положение текущего Гринвичского меридиана относительно истинной точки весны,

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{R}_3(\text{GST}), \quad (4)$$

где угол GST (Greenwich Sidereal Time) на момент t определяется выражениями, приведенными в [7, 12]; $\mathbf{W}(t)$ — матрица движения полюсов, представляющая отклонение мгновенной оси вращения Земли от оси Z системы координат ITRS,

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{R}_2(-x_p)\mathbf{R}_1(-y_p), \quad (5)$$

однако значения координат полюса x_p , y_p в общем случае приемнику неизвестны и определяются в процессе решения задачи.

3.3. Специальная инерциальная система координат

В настоящей работе мы вводим специальный случай инерциальной системы координат. В этой системе минимизируется количество необходимых преобразований векторов сил, действующих на КА, а также объем вычислений производных от измеряемых величин по уточняемым параметрам, специфичным для нашей задачи.

Если фиксировать систему координат ITRS в инерциальном пространстве на некоторый начальный момент времени t_0 , то “специальная система координат” (ССК) определяется таким образом, что вектор прямоугольных координат КА на момент t_0 в данной системе, $\mathbf{r}_{ССК}(t_0)$, соотносится с вектором координат КА в ITRS на этот же момент, $\mathbf{r}_{ITRS}(t_0)$, как

$$\mathbf{r}_{ССК}(t_0) = \Delta\mathbf{G}^T(t_0)\mathbf{W}^T(t_0)\mathbf{r}_{ITRS}(t_0), \quad (6)$$

где верхний символ T означает транспонирование матрицы. При этом

$$\Delta\mathbf{G}^T(t_0) \equiv \mathbf{R}_3(\phi), \quad (7)$$

где ϕ есть часть угла поворота системы координат ITRS вокруг ее оси Z , соответствующая возможной погрешности значения UT1–UTC на момент времени t_0 , используемого при вычислении GST. (Величина UT1–UTC рассчитывается приемником по интерполяционным формулам на основе данных принятого навигационного сообщения.) Малый угол ϕ является, в общем случае, эмпирической поправкой, определяемой в процессе решения задачи.

Таким образом, ось X ССК лежит в плоскости истинного экватора Земли и примерно направлена в Гринвичский меридиан Земли (отличается от направления на него на угол ϕ), фиксированные на момент времени t_0 . Ось Z направлена к северу вдоль мгновенной оси вращения Земли на этот же момент времени, и ось Y дополняет систему до правой. Поскольку момент времени t_0 является постоянным в рамках одного решения по прогнозированию бортовых эфемерид, то определенное таким образом положение осей ССК не меняется в пространстве, и ССК является инерциальной системой координат.

3.4. Перевод вектора координат КА из ССК в ITRS

Интегрирование уравнений движения КА осуществляется в ССК, и все векторы возмущающих сил, действующих на спутник, также вычисляются в ССК. Но окончательное представление эфемерид КА должно быть представлено в ITRS, в которой заданы первоначальные бортовые эфемериды спутника.

Формула перевода вектора координат КА, рассчитанном в ССК на момент времени t , в GCRS следующая

$$\mathbf{r}_{GCRS}(t) = \mathbf{B}^T\mathbf{P}^T(t_0)\mathbf{N}^T(t_0)\mathbf{G}^T(t_0)\mathbf{r}_{ССК}(t). \quad (8)$$

Объединяя уравнения (1), (8) и учитывая введение дополнительной матрицы $\Delta\mathbf{G}$, получим

$$\mathbf{r}_{ITRS}(t) = \mathbf{W}(t)\Delta\mathbf{G}(t)\mathbf{G}(t)\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{P}^T(t_0) \times \mathbf{N}^T(t_0)\mathbf{G}^T(t_0)\mathbf{r}_{ССК}(t). \quad (9)$$

На момент t_0 векторы координат КА в ITRS и ССК отличаются между собой только поворотом на малые углы за движение полюса x_p, y_p вокруг осей Y и X системы ITRS, соответственно, и дополнительным поворотом на малый угол ϕ вокруг оси Z

$$\mathbf{r}_{ITRS}(t_0) = \mathbf{W}(t_0)\Delta\mathbf{G}(t_0)\mathbf{r}_{ССК}(t_0). \quad (10)$$

Данные малые углы мы будем определять через обработку бортовых эфемерид наравне с начальным вектором состояния каждого КА и полагать постоянными на всем интервале расширенного прогнозирования спутника на несколько дней, т.е.

$$\mathbf{W}(t) \approx \mathbf{W}(t_0), \quad \Delta\mathbf{G}(t) \approx \Delta\mathbf{G}(t_0). \quad (11)$$

Поэтому можно ввести новую матрицу \mathbf{H} , включающую в себя все три малых угла, – за счет поправки ϕ и координат полюса x_p, y_p , которую будем считать постоянной на всем интервале прогнозирования эфемерид КА в рамках одного решения

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{W}(t)\Delta\mathbf{G}(t) \approx \mathbf{W}(t_0)\Delta\mathbf{G}(t_0) = \mathbf{R}_2(-x_p)\mathbf{R}_1(-y_p)\mathbf{R}_3(\phi) \approx \begin{bmatrix} 1 & \phi & x_p \\ -\phi & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

3.5. Перевод вектора скоростей КА из ССК в ITRS

Если в правой части уравнения (9) обозначить произведение части матриц как $\mathbf{M}(t)$:

$$\mathbf{M}(t) \equiv \mathbf{G}(t)\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{P}^T(t_0)\mathbf{N}^T(t_0)\mathbf{G}^T(t_0), \quad (13)$$

то, учитывая уравнение (12),

$$\mathbf{r}_{ITRS}(t) = \mathbf{H}\mathbf{M}(t)\mathbf{r}_{ССК}(t). \quad (14)$$

Пренебрегая на рассматриваемых нами интервалах времени в несколько дней скоростью изменения всех матриц в уравнении (13), кроме матрицы вращения Земли $\mathbf{G}(t)$, можно записать

$$\mathbf{v}_{ITRS}(t) \approx \mathbf{H}\mathbf{M}(t)\mathbf{v}_{ССК}(t) + \mathbf{H}\boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{M}(t)\mathbf{r}_{ССК}(t)], \quad (15)$$

где $\mathbf{v}_{ITRS}(t), \mathbf{v}_{ССК}(t)$ есть векторы мгновенной скорости КА в ITRS и ССК соответственно, $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, -\omega)$, и ω есть средняя угловая скорость вращения Земли [12],

$$\omega \approx 7.292115855306587 \times 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \quad (16)$$

3.6. Обратный перевод координат и скоростей КА из ITRS в ССК

Для численного интегрирования уравнений движения КА в ССК необходимо перевести только один вектор состояния КА в эту систему координат из ITRS, а именно, координаты и скорости КА на начальный момент времени t_0 . При этом $\mathbf{M}(t_0)$ есть единичная матрица, и из уравнений (14), (15) следует

$$\mathbf{r}_{\text{ССК}}(t_0) = \mathbf{H}^T \mathbf{r}_{\text{ITRS}}(t_0), \quad (17)$$

$$\mathbf{v}_{\text{ССК}}(t_0) = \mathbf{H}^T \mathbf{v}_{\text{ITRS}}(t_0) - \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{H}^T \mathbf{r}_{\text{ITRS}}(t_0)]. \quad (18)$$

4. МОДЕЛЬ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА КА ВО ВРЕМЯ ПОЛЕТА

На среднеорбитальные спутники Земли, к которым относят КА ГЛОНАСС и GPS, действуют следующие основные силы:

- гравитационное поле Земли, включая приливы;
- притяжение “третьих” тел: Солнца, Луны и больших планет;
- солнечное давление.

В рамках точности рассматриваемой задачи эту модель можно упростить следующим образом.

4.1. Гравитационное поле Земли

Разложение гравитационного поля Земли в ряд по сферическим функциям в нашей задаче можно ограничить гармониками до 8-го порядка и степени включительно [1]. Тогда гравитационный потенциал несферичной Земли, U , действующий на КА в ITRS, вычисляется как [13]

$$U(r, \lambda, \varphi) = \frac{\mu_E}{r} \sum_{n=0}^8 \sum_{m=0}^n \left[\left(\frac{R_E}{r} \right)^n \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \times \right. \\ \left. \times (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \right], \quad (19)$$

где r , λ , φ есть сферические координаты КА в ITRS (геоцентрическое расстояние, Гринвичская долгота и широта соответственно), μ_E – гравитационная постоянная Земли; R_E – большая полуось земного эллипсоида, \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} – нормализованные значения гармоник разложения геопотенциала, и \bar{P}_{nm} – соответственно нормализованные присоединенные функции Лежандра.

Ускорение КА в ITRS, $\ddot{\mathbf{r}}_{\text{ITRS}}^{(U)}$, вызванное силой притяжения гравитационного поля Земли, есть градиент потенциала U . В общем случае, вектор $\ddot{\mathbf{r}}_{\text{ITRS}}^{(U)}$ на произвольный момент времени t пересчи-

тывается из ITRS в ССК, где осуществляется численное интегрирование, по формуле, вытекающей из уравнения (9). Однако для расчета соответствующей силы в рассматриваемой задаче эту процедуру можно упростить, воспользовавшись малостью значений углов поворотов за координаты полюсов x_p , y_p и поправки ϕ , а также относительно незначительными изменениями матриц прецессии и нутации Земли на интервале прогнозирования КА в несколько дней

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\text{ССК}}^{(U)}(t) \approx \mathbf{G}(t_0) \mathbf{G}^T(t) \ddot{\mathbf{r}}_{\text{ITRS}}^{(U)}(t) \approx \\ \approx \mathbf{R}_3(-\boldsymbol{\omega}(t - t_0)) \ddot{\mathbf{r}}_{\text{ITRS}}^{(U)}(t). \quad (20)$$

При вычислении ускорений $\ddot{\mathbf{r}}_{\text{ITRS}}^{(U)}$ также необходимо пересчитывать значения текущего вектора координат КА из ССК в ITRS. Для этой (и только этой) цели на рассматриваемых интервалах времени прогнозирования $t - t_0$ в несколько дней можно воспользоваться приближенной формулой

$$\mathbf{r}_{\text{ITRS}}(t) \approx \mathbf{R}_3(\boldsymbol{\omega}(t - t_0)) \mathbf{r}_{\text{ССК}}(t). \quad (21)$$

Воздействием приливов на движение КА ГЛОНАСС и GPS в рассматриваемой задаче можно пренебречь.

4.2. Притяжение “третьих” тел

Притяжение Солнца и Луны на КА приводит к появлению возмущающего ускорения в его движении в инерциальной ССК, $\ddot{\mathbf{r}}_{\text{ССК}}^{(SM)}$, описываемого классическим уравнением

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\text{ССК}}^{(SM)}(t) = \mu_S \left(\frac{\mathbf{s}_{\text{ССК}}^{(S)}(t) - \mathbf{r}_{\text{ССК}}(t)}{|\mathbf{s}_{\text{ССК}}^{(S)}(t) - \mathbf{r}_{\text{ССК}}(t)|^3} - \frac{\mathbf{s}_{\text{ССК}}^{(S)}(t)}{|\mathbf{s}_{\text{ССК}}^{(S)}(t)|^3} \right) + \\ + \mu_M \left(\frac{\mathbf{s}_{\text{ССК}}^{(M)}(t) - \mathbf{r}_{\text{ССК}}(t)}{|\mathbf{s}_{\text{ССК}}^{(M)}(t) - \mathbf{r}_{\text{ССК}}(t)|^3} - \frac{\mathbf{s}_{\text{ССК}}^{(M)}(t)}{|\mathbf{s}_{\text{ССК}}^{(M)}(t)|^3} \right), \quad (22)$$

где μ_S , μ_M , $\mathbf{s}_{\text{ССК}}^{(S)}$, $\mathbf{s}_{\text{ССК}}^{(M)}$ есть, соответственно, гравитационные постоянные Солнца, Луны и векторы геоцентрических координат Солнца и Луны в ССК. Для вычисления данных векторов в GCRS, $\mathbf{s}_{\text{GCRS}}(t)$, можно использовать численные эфемериды DE-430 [11]. Далее имеем

$$\mathbf{s}_{\text{ССК}}(t) = \mathbf{G}(t_0) \mathbf{N}(t_0) \mathbf{P}(t_0) \mathbf{B} \mathbf{s}_{\text{GCRS}}(t). \quad (23)$$

Все матрицы в правой части уравнения (23) являются постоянными и требуют своего вычисления в течение всей процедуры автономного определения орбиты КА только один раз.

Воздействие планет на движение спутника в рамках требуемой точности решения нашей задачи можно не учитывать.

4.3. Солнечное давление

Солнечное давление на КА приводит к дополнительному ускорению спутника. В рассматриваемой задаче можно ограничиться только основным радиальным компонентом вектора соответствующей силы, направленным от Солнца на спутник. Тогда выражение для вектора ускорения КА в ССК, обусловленного солнечным давлением, $\ddot{\mathbf{r}}_{\text{ССК}}^{(SP)}(t)$, можно записать (см., напр., [2, 7, 14])

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\text{ССК}}^{(SP)}(t) = -\alpha P_0 C_R \left(\frac{1 \text{ au}}{r^{(S)}(t)} \right)^2 \frac{A}{M} \mathbf{e}_{\text{ССК}}^{(S)}(t), \quad (24)$$

где $\mathbf{e}_{\text{ССК}}^{(S)}(t)$ – единичный вектор направления на Солнце от КА в ССК на момент времени t ; $r^{(S)}(t)$ – текущее расстояние от КА до Солнца, выраженное в м; 1 au – астрономическая единица, равная 149 597 870 700 м [15]; P_0 – солнечное давление на расстоянии 1 au от Солнца, примерно равное 4.56×10^{-6} Н/м² [7]; C_R – коэффициент отражения солнечного света спутником, условно принимается здесь равным 1.21 [14]; M – масса КА, условно принимается здесь равной 1075 кг, как в [2], для целей последующего сравнения полученных результатов; A – площадь поверхности КА, условно принимается здесь равной 13.4 м², также как в [2]; α – дополнительный согласующий коэффициент, индивидуальный для каждого КА и определяемый из наблюдений спутника.

Уравнение (24) записано для случая, когда спутник полностью освещен Солнцем. Поскольку КА ГЛОНАСС и GPS находятся на среднеорбитальных орбитах, то время их нахождения в тени Земли относительно мало. Поэтому эффектом уменьшения влияния солнечного давления на движение КА за счет попадания спутников в тень Земли в предлагаемом алгоритме мы пренебрегаем.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ КА ГЛОНАСС И GPS

5.1. Уточняемые параметры

Было проведено моделирование автономного определения параметров движения КА ГЛОНАСС и GPS в навигационном приемнике и последующее прогнозирование координат спутников на интервале времени в несколько дней. Для этого использовались реальные бортовые эфемериды КА обеих систем спутников, полученные навигационным приемником GeoS в течение двух периодов времени: 13–19.03.2015 и 19–

26.01.2016. Уточнение проводилось на временном интервале от 3 ч до 2 сут, что соответствовало одному-пяти прохождением каждого спутника в зоне видимости приемника (орбитальный период спутников ГЛОНАСС и GPS составляет примерно полсутки). Бортовые эфемериды каждого КА, полученные и “размноженные” на этих интервалах, принимались в качестве “измерений”. Далее для уточнения параметров движения спутника использовался МНК. По окончании процедуры уточнения проводилось прогнозирование параметров движения КА на интервале времени в несколько дней за пределами выбранного промежутка “измерений” и выполнялось сравнение вычисленных координат спутника с реальными бортовыми эфемеридами.

Максимальный состав уточняемых параметров включает в себя 3 координаты и 3 значения скорости каждого КА на некоторый начальный момент времени в соответствующей ССК, а также координаты полюса Земли x_p, y_p и поправку ϕ к величине угла поворота Земли за GST на этот же момент. При этом на практике мы ограничены относительно небольшим временным интервалом, на котором принятые и “размноженные” бортовые эфемериды КА могут быть сохранены в памяти приемника в качестве “измерений”. Поэтому одновременное определение всех 9 параметров приводило к существенной корреляции между уточняемыми величинами, и, как следствие, к их некорректному определению и последующему неудовлетворительному прогнозированию движения спутника. Однако в качестве начальных значений координат КА используются относительно точные бортовые эфемериды, и потенциальная ошибка этих эфемерид не приводила к существенному ухудшению точности прогнозирования координат спутника на интервале времени в несколько дней. Поэтому начальные координаты спутника были исключены из состава уточняемых параметров. Одновременное определение поправки ϕ и вектора скорости КА на рассматриваемых интервалах времени также приводило к заметной корреляции этих параметров, поэтому малый угол ϕ не уточнялся. Оставшиеся 5 параметров: 3 значения скорости КА и 2 координаты полюса x_p, y_p на начальный момент времени, в результате, составили оптимальный набор уточняемых параметров для каждого КА. Изменением координат полюса на интервале уточнения и прогнозирования движения КА в нескольких днях в нашей задаче мы пренебрегаем.

Значение эмпирического коэффициента солнечного давления α в уравнении (24), специфичного для каждого КА, определялось путем варьирования этого коэффициента перед процедурой уточнения 5 выбранных параметров на обоих рассмотренных интервалах времени (в марте 2015 г. и



Рис. 1. Автономное прогнозирование движения КА ГЛОНАСС-М № 747, январь 2016 г.

январе 2016 г.). Значение α , при котором в результате решения достиглось наилучшее совпадение прогнозируемых и реальных бортовых эфемерид, принималось в качестве фиксированной характеристики данного КА. При этом для каждого рассмотренного КА относительная разница в значении коэффициента α , вычисленного на двух независимых интервалах времени, отстоящих друг от друга более чем на 10 месяцев, не превышала 1–2%. Поэтому полученные индивидуальные значения коэффициента α для всех КА навигационных систем ГЛОНАСС и GPS могут быть определены и сохранены в памяти приемника на этапе составления его программного обеспечения. Они не подлежат уточнению в автономном режиме.

5.2. Выбор оптимального состава “измерений”

С помощью представленного выше алгоритма было проведено исследование эффективности автономного определения параметров движения КА ГЛОНАСС и GPS на интервалах времени до 2 сут и оценка точности последующего прогнозирования координат спутников на интервалах времени до 5 сут. Для этого использовались бортовые эфемериды, полученные на протяжении от одного до пяти проходов навигационных КА в зоне видимости приемника. Был сделан вывод, что оптимальным составом “измерений” является набор бортовых эфемерид, полученных на двух последовательных проходах для КА GPS и на трех последовательных проходах для КА ГЛОНАСС. В течение одного прохода КА в зоне видимости приемника, длящегося в лучшем

случае несколько часов, значения скоростей спутников на начальную эпоху определялись значительно хуже, чем на полусуточных и суточных интервалах “измерений”. Это приводило к большим ошибкам координат КА при их прогнозировании. Увеличение количества проходов, содержащих “измерения”, с двух до трех практически не повышало точность прогнозирования координат КА GPS, однако, как правило, давало заметное улучшение данной характеристики для КА ГЛОНАСС. Дальнейшее увеличение количества используемых проходов уже не оказывало существенного влияния на точность прогнозирования координат спутников обеих навигационных систем. Рисунок 1 содержит характерный пример зависимости ошибок прогнозирования положения КА ГЛОНАСС от количества зон видимости спутника, где принимались его бортовые эфемериды, используемые далее в качестве “измерений”. Данные приведены на январь 2016 г. для спутника ГЛОНАСС-М № 747.

Как следствие, все приводимые ниже результаты автономного прогнозирования движения навигационных КА соответствуют решениям, полученным на основе обработки бортовых эфемерид, накопленных на двух проходах для спутников GPS и на трех проходах для спутников ГЛОНАСС.

5.3. Точность автономного прогнозирования координат КА ГЛОНАСС и GPS

В процессе исследования было отмечено, что точность прогнозирования координат навига-

Таблица 1. Количество навигационных КА различных типов, использованных в решениях

Интервал	GPS IIA	GPS IIR	GPS IIR-M	GPS IIF	ГЛОНАСС-М
13–19.03.2015	4	12	7	7	15
19–26.01.2016	1	10	7	10	23

онных спутников на основе автономного определения их орбит зависит от поколения блока КА. Таблица 1 приводит количество блоков КА каждого типа, с которых были приняты и обработаны реальные бортовые эфемериды на каждом рассмотренном интервале времени. Среди блоков GPS наиболее старыми здесь являются блоки IIA, а наиболее новыми – IIF.

Рисунки 2–6 показывают среднеквадратические ошибки (с.к.о.) автономного прогнозирования координат КА каждого поколения. Данные с.к.о. были получены путем сравнения расчетных значений положений каждого КА, определенных в автономном решении, с принятыми реальными бортовыми эфемеридами этого же спутника на интервале времени до 5 сут. Каждый маркер на рис. 2–6 соответствует с.к.о. прогнозирования положения одного КА. Значительные с.к.о. наблюдаются для КА GPS IIA в решении, полученном по набору бортовых эфемерид на интервале времени 19–26.01.2016 (рис. 2). Однако этот спутник был выведен из эксплуатации 25.01.2016, и можно предположить, что на данном интервале его бортовые эфемериды уже не обладали стандартной точностью. Также значительное отклонение было получено для одного КА GPS IIR (рис. 3), возможно, оно объясняется результатом кратковременного сбоя приемника. Остальные

с.к.о. прогнозирования положений всех спутников одного и того же поколения на обоих рассмотренных интервалах времени хорошо согласуются между собой и могут считаться типичными для соответствующего блока КА. Необходимо отметить, что информации, накопленной только по 4 старым блокам GPS IIA, выглядит недостаточно для полноценной статистики. Однако последний блок этого поколения был выведен из эксплуатации в октябре 2019 г. [16], поэтому данные по этому типу КА GPS более не актуальны.

С.к.о. прогнозирования положения КА GPS блоков IIR и IIR-M выглядят примерно одинаковыми и составляют примерно 10–15 м на интервале времени до 3 сут и 30–50 м на интервале времени до 5 сут (рис. 3, 4). Однако для новых блоков GPS IIF наблюдается заметное улучшение качества автономного решения (рис. 5); наибольшее значение с.к.о. в прогнозировании положений спутников данного поколения не превышает 5 м на интервале времени до 2 сут и 14 м на интервале времени до 5 сут. Такое повышение точности может быть объяснено улучшением позиционирования солнечных батарей КА GPS IIF и, как следствие, большей адекватностью используемого алгоритма расчета солнечного давления на спутник. С.к.о. автономного прогнозирования положений КА ГЛОНАСС-М (рис. 6) выглядят практически

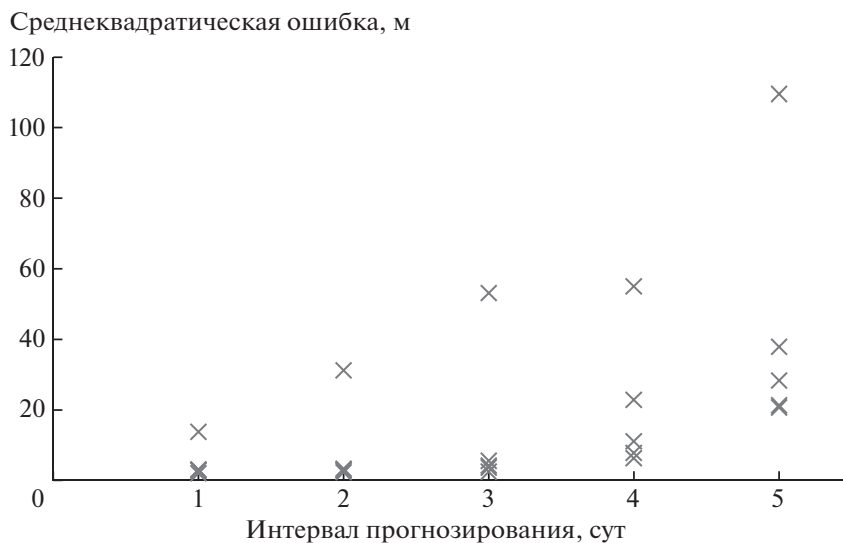


Рис. 2. С.к.о. автономного прогнозирования положения различных КА GPS IIA.

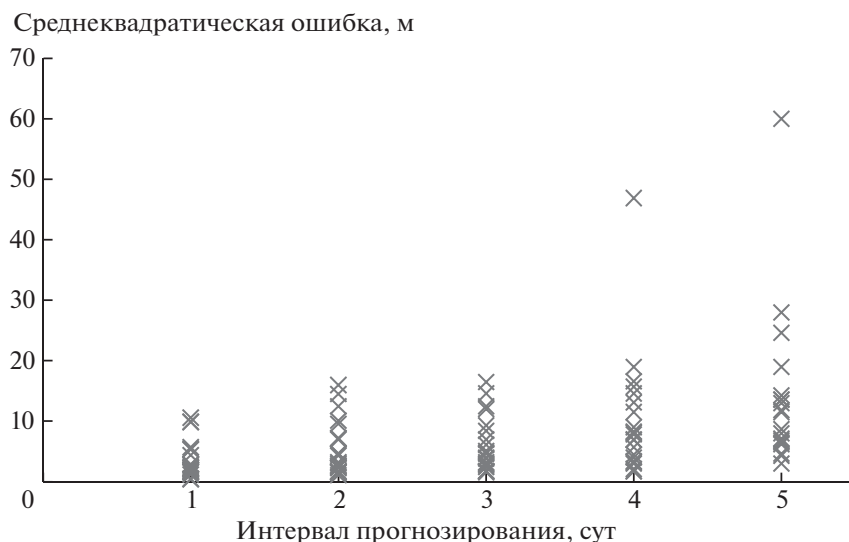


Рис. 3. С.к.о. автономного прогнозирования положения различных КА GPS IIR.

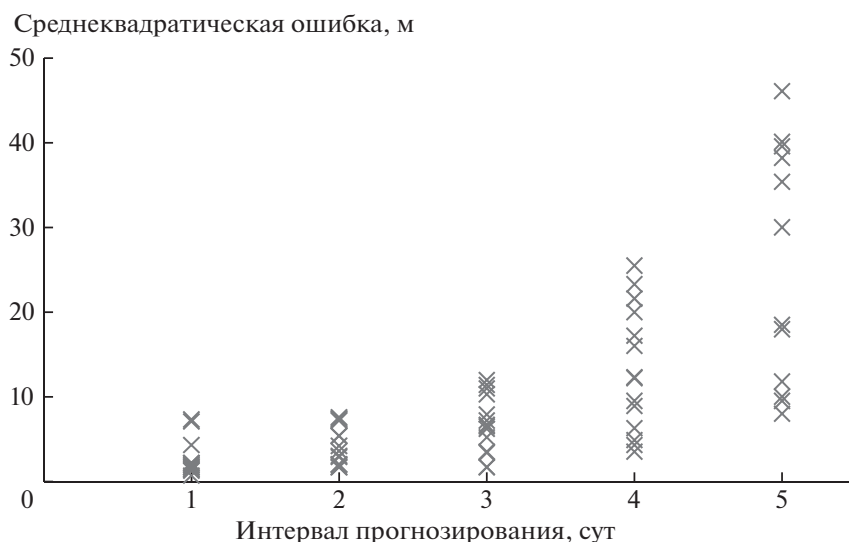


Рис. 4. С.к.о. автономного прогнозирования положения различных КА GPS IIR-M.

равным соответствующим точностным характеристикам расчета движения КА GPS IIF.

Максимальные ошибки в положении КА GPS и ГЛОНАСС, полученные при прогнозировании спутников на различных интервалах времени, приведены в табл. 2. (Данные таблицы не учитывают вероятно ошибочные определения для двух КА GPS, которые обсуждались выше.)

Полученные значения точности автономного прогнозирования движения КА GPS и ГЛОНАСС являются существенно лучшими, чем подобные характеристики, приведенные в работах [1, 2]. Но необходимо отметить, что в [1] исполь-

зовались измерения только с одного прохождения для КА ГЛОНАСС и GPS, а в [2] рассматривалось одно прохождение для КА GPS и до трех прохождений для КА ГЛОНАСС. Поэтому достигнутое в нашем решении улучшение точности автономного прогнозирования эфемерид навигационных КА является, в частности, следствием оптимизации выбора интервала бортовых эфемерид КА, используемых в качестве “измерений”.

В работе [3] также рассматривался расширенный интервал времени “измерений” (до 2 недель), и использовалось несколько прохождений КА. Такой большой интервал времени обуслов-

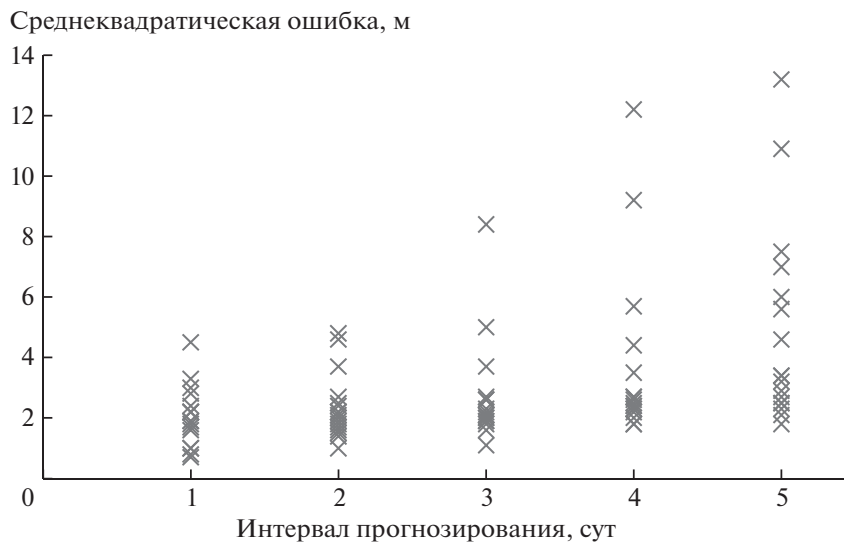


Рис. 5. С.к.о. автономного прогнозирования положения различных КА GPS ИФ.

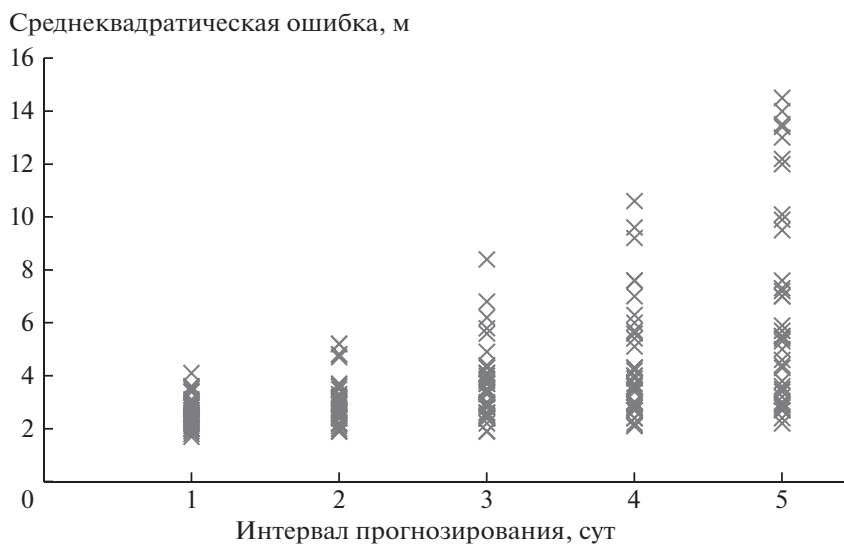


Рис. 6. С.к.о. автономного прогнозирования положения различных КА ГЛОНАСС-М.

лен спецификой алгоритма [3]. Как пример в [3] приводится КА GPS (PRN 16), для которого в этой работе были получены наилучшие результаты автономного прогнозирования движения спутника. В качестве основной характеристики точности прогнозирования используется параметр SISRE (Signal-In-Space Range Error). Этот параметр описывает суммарную ошибку в измеренной “псевдодальности” до спутника, вызванную погрешностью часов приемника и неточностью бортовых эфемерид КА. Поскольку ошибка в значении “псевдодальности” зависит при этом и от положения приемника на Земле, то SISRE

считается как максимальное значение данной ошибки по всем точкам поверхности Земли. Далее, для оценки погрешности “псевдодальности”, вызванной исключительно неточностью расчетных эфемерид КА, в значение SISRE, принятом в [3], не включается ошибка часов приемника.

В результате для КА GPS (PRN 16) в [3] было получено значение SISRE, равное примерно 2 м на интервале автономного прогнозирования движения КА в 1 сут, 3,5 м – на интервале прогнозирования 3 сут и 6 м – на интервале в 5 сут. Отметим, что в качестве источника данных в [3] использовались бортовые эфемериды этого спут-

Таблица 2. Максимальные ошибки автономного прогнозирования положения КА для различных типов спутников, м

ΔT , сут	GPS IIA	GPS IIR	GPS IIR-M	GPS IIF	ГЛОНАСС-M
1	7.4	22.0	14.1	10.0	9.7
2	10.0	35.5	29.0	17.0	15.4
3	38.2	43.4	60.0	26.0	25.0
4	72.4	78.0	100.3	30.5	45.2
5	106.4	90.0	157.2	33.1	59.8

Примечание. ΔT – интервал прогноза в сутках. Данные по GPS IIA получены по 4 КА, что недостаточно для полноценной статистики.

ника, принятые в начале 2016 г. на временном промежутке, близком к одному из интервалов, рассмотренных в настоящей работе. Оценки максимальных значений параметра SISRE при автономном прогнозировании координат этого же КА GPS (PRN 16), полученные в наших решениях по двум наборам бортовых эфемерид, приведены в табл. 3. Видим, что они близки к представленным в работе [3]. Однако бортовые эфемериды, использованные в нашем исследовании в качестве “измерений”, были приняты на интервале времени, не превышающем 18 ч, в то время как для успешной работы алгоритма [3] требуется набор бортовых эфемерид, накопленный на временном промежутке до нескольких дней.

5.4. Зависимость коэффициента α от поколения блока КА

Важную роль в автономном определении и прогнозировании координат спутников играет коэффициент учета солнечного давления α , используемый в (24) и, в общем случае, индивидуальный для каждого КА. Как уже было сказано ранее, значения данного коэффициента для всех КА ГЛОНАСС и GPS определялись нами на двух независимых интервалах времени: 13–19.03.2015 и 19–26.01.2016. При этом значения коэффициентов, полученные в обоих случаях для каждого

Таблица 3. Максимальное значение SISRE при автономном прогнозировании КА GPS (PRN16), м

ΔT , сут	13–19.03.2015	19–26.01.2016
1	3.2	3.3
2	3.2	3.6
3	3.2	3.8
4	3.2	4.2
5	3.2	4.5

Примечание. ΔT – интервал прогноза в сутках.

конкретного КА, отличались между собой не более, чем на 1–2%. Также для более чем 20 спутников оказалось возможным сравнить определенные нами величины коэффициента α с его значениями, полученными в работе [2] на интервале с июля по декабрь 2010 г. Здесь также было отмечено очень хорошее совпадение результатов, несмотря на то, что этот интервал отстоит от используемых нами примерно на 5 лет. Значения коэффициентов α для одних и тех же КА, полученные в [2] и настоящей работе, отличаются между собой также не более чем на 1–2%. Таким образом, можно сделать вывод, что величина коэффициента α для каждого конкретного КА ГЛОНАСС и GPS практически не зависит от времени.

Рисунки 7, 8 содержат полученные нами значения α для всех рассмотренных КА GPS и ГЛОНАСС. Выявляется заметная зависимость величины данного коэффициента от типа блока КА. При этом данные рис. 7, 8 подтверждают вывод об отсутствии сколь-либо значимой зависимости величины коэффициента α от времени эксплуатации спутника. Также не обнаружено зависимости данного коэффициента от орбитальной плоскости КА и точки его положения на орбите. Таким образом, можно полагать, что величина коэффициента α практически полностью определяется типом блока КА.

Средние значения коэффициента учета солнечного давления α для различных блоков КА GPS и ГЛОНАСС приведены в табл. 4. Отметим, что эти величины должны использоваться одновременно со значениями массы КА и других параметров, условно принятыми в уравнении (24). Данные табл. 4 могут использоваться в качестве начального приближения коэффициента α для каждого вновь запускаемого КА известного типа. (В процессе эксплуатации спутника начальное значение коэффициента может быть уточнено и перезагружено в память приемника при очередном обновлении его программного обеспечения.)

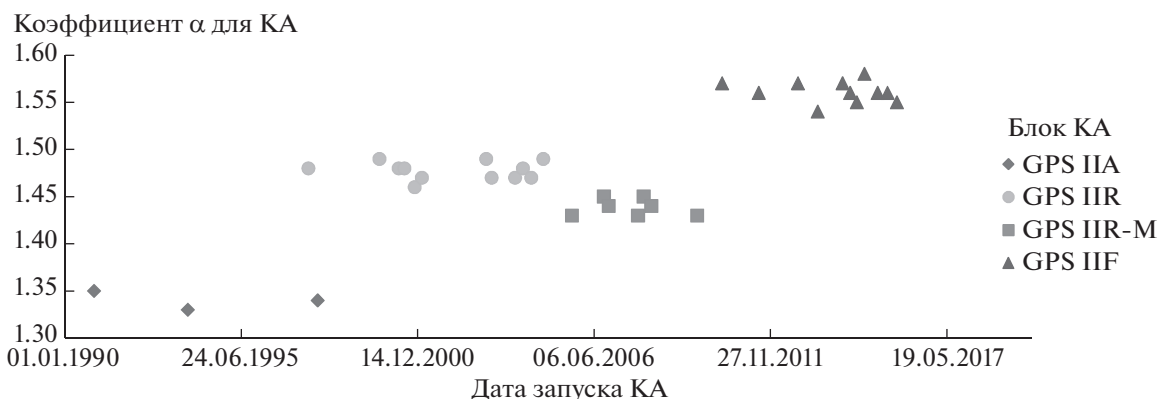


Рис. 7. Коэффициент учета солнечного давления α для различных КА GPS.

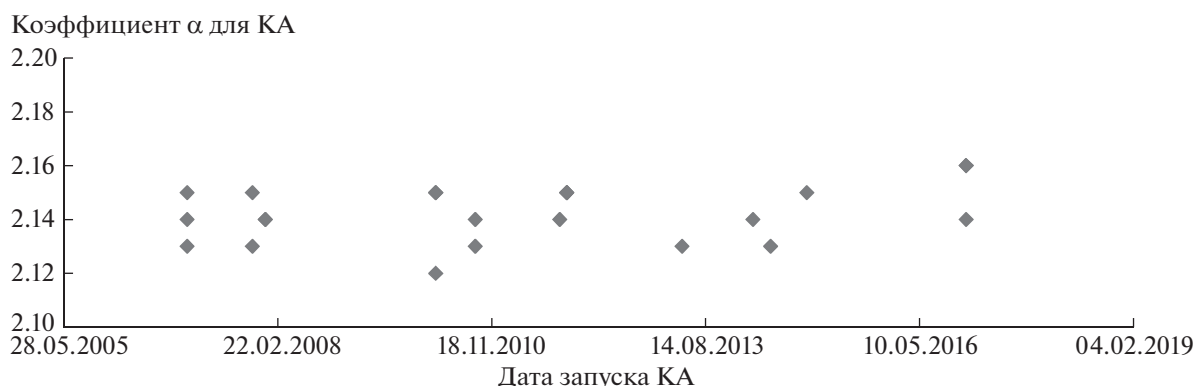


Рис. 8. Коэффициент учета солнечного давления α для различных КА ГЛОНАСС-М.

5.5. Определение координат полюса Земли

Как было отмечено ранее, в процессе автономного уточнения параметров орбиты КА необходимо одновременно определять координаты полюса Земли на дату начальных условий спутника. На рис. 9, 10 приведены результаты такого определения, полученные при решении задачи для каждого КА ГЛОНАСС и GPS на обоих рассмотренных в данном исследовании интервалах времени. Определение координат полюса в каждом решении проводилось в отсутствие какой-либо априорной информации о значениях этих параметров, т.е. начальные значения x_p, y_p полагались равными нулю. В табл. 5, 6 приведены значения координат полюса Земли x_p, y_p , полученные

осреднением соответствующих данных индивидуальных решений для каждого КА ГЛОНАСС и GPS. Также для сравнения в табл. 5, 6 указаны значения координат полюса по данным Международной службы вращения Земли (МСВЗ) [17].

По данным, приведенным на рис. 9, 10 и в табл. 5, 6, можно сделать вывод, что автономное определение координат полюса Земли по бортовым эфемеридам навигационных КА выполняется представляемым алгоритмом с точностью до нескольких единиц миллисекунд дуги.

6. ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАБОТЫ

1. Для долгосрочного автономного прогнозирования координат КА в навигационном прием-

Таблица 4. Средние значения коэффициента α для различных блоков КА

GPS IIA	GPS IIR	GPS IIR-M	GPS IIF	ГЛОНАСС-М
1.34 ± 0.01	1.48 ± 0.01	1.44 ± 0.01	1.56 ± 0.01	2.14 ± 0.01

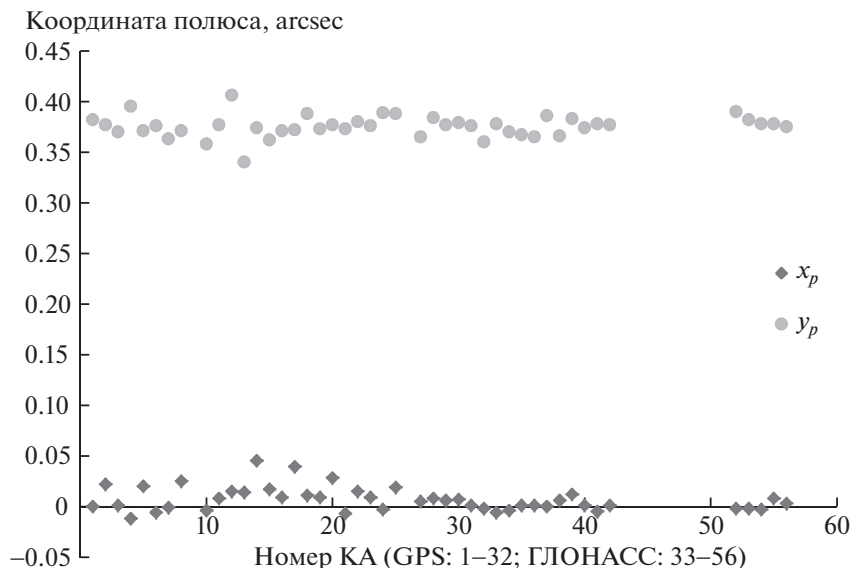


Рис. 9. Координаты полюса Земли на 15.03.2015 по данным автономных решений.

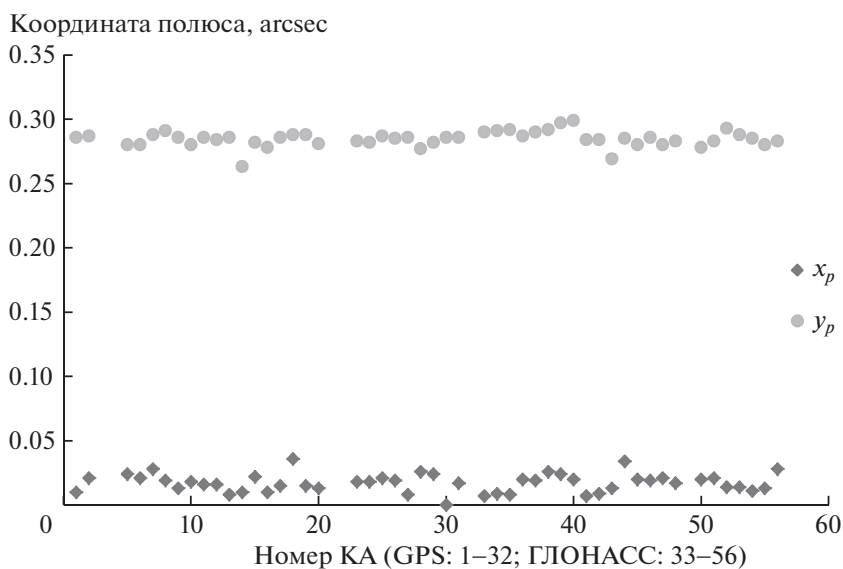


Рис. 10. Координаты полюса Земли на 21.01.2016 по данным автономных решений.

нике рекомендуется использовать в качестве “измерений” бортовые эфемериды спутников, принятые на двух прохождениях для КА GPS и трех прохождениях для КА ГЛОНАСС.

2. В этом случае с.к.о. прогнозирования положений КА ГЛОНАСС-М и КА GPS блок ПФ не превышает 5–6 м на интервале времени 2 сут, 10 м на интервале 3 сут и 15 м на интервале 4–5 сут. Для КА GPS блоки ПА, ПИР, ПИР-М данная погрешность увеличивается примерно в 2–3 раза. Это лучше аналогичных показателей автономного

прогнозирования координат КА в навигационных приемниках, опубликованных в литературе.

3. Коэффициент учета солнечного давления α практически полностью определяется типом блока КА GPS и ГЛОНАСС. Значение α для каждого индивидуального спутника лишь незначительно варьируется относительно некоторой средней величины коэффициента, специфичной для соответствующего блока КА. Не выявлено зависимости значения коэффициента α от плоскости орбиты КА, его положения на орбите и времени

Таблица 5. Средние координаты полюса Земли на 15.03.2015 по данным автономных решений

Система	$x_p, ''$	$y_p, ''$
ГЛОНАСС (15 КА)	0.001 ± 0.008	0.377 ± 0.007
GPS (30 КА)	0.010 ± 0.014	0.375 ± 0.017
ГЛОНАСС и GPS (45 КА)	0.007 ± 0.012	0.376 ± 0.011
МСВЗ [17]	0.00278	0.37459

Таблица 6. Средние координаты полюса Земли на 21.01.2016 по данным автономных решений

Система	$x_p, ''$	$y_p, ''$
ГЛОНАСС (23 КА)	0.017 ± 0.007	0.286 ± 0.007
GPS (27 КА)	0.017 ± 0.007	0.284 ± 0.005
ГЛОНАСС и GPS (50 КА)	0.017 ± 0.007	0.285 ± 0.006
МСВЗ [17]	0.01641	0.28647

эксплуатации спутника. В качестве продолжения работы планируется определение среднего значения коэффициента α для спутников новых поколений ГЛОНАСС-К и GPS блок IIIA (по накоплению необходимой статистической информации с нескольких КА каждого типа).

4. Улучшение начальных параметров движения КА в алгоритме автономного прогнозирования проводится с одновременным уточнением координат полюса Земли. При этом точность определения координат полюса в отсутствие априорной информации о значении этих параметров составляет несколько единиц миллисекунд дуги.

5. Предполагается расширить действие метода на автономное определение и прогнозирование движения КА навигационных систем Galileo и Beidou.

6. Возможно применение в автономном алгоритме аналитического метода прогнозирования параметров движения ИСЗ, например, разработанного на основе [18, 19].

7. Предложенный алгоритм автономного прогнозирования КА ГЛОНАСС и GPS может быть использован в перспективных навигационных приемниках.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен коллективу разработчиков отечественного навигационного приемника GeoS: А.А. Коркушу, В.П. Польшикову, А.И. Шилову и др. за постановку задачи и применение результатов настоящего исследования. Автор признателен М.В. Васильеву за полезные обсуждения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. В. Васильев, Н. В. Михайлов, Н. В. Васильева, в сб.: XVI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам, 2009 (С.-Петербург: ГНЦ РФ ЦНИИ “Электроприбор”, 2009), с. 283.
2. M. Seppänen, J. Ala-Luhtala, R. Piché, S. Martikainen, and S. Ali-Löyty, *Navigation* **59**, 119 (2012).
3. S. Rautalin, S. Ali-Löyty, and R. Piché, in *2017 International Conference on Localization and GNSS, Nottingham, UK* (IEEE, 2018).
4. Модуль GeoS (М.: ДЦ “ГеоСтар Навигация”), <http://geostar-navi.com/>
5. *Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90.11)* (М.: Военно-топографическое управление Генштаба ВС РФ, 2014).
6. Z. Altamimi, P. Rebischung, L. Métivier, and X. Collilieux, *IERS Tech. Note 38* (Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main, 2017).
7. D. D. McCarthy (ed.), *IERS Tech. Note 21* (Observatoire de Paris, 1996).
8. N. Capitaine, P. T. Wallace, and J. Chapront, *Astron. and Astrophys.* **412**, 567 (2003).
9. G. Petit and B. Luzum (eds.), *IERS Tech. Note 32* (Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main, 2004).
10. N. Capitaine, P. T. Wallace, and J. Chapront, *Astron. and Astrophys.* **432**, 355 (2005).
11. J. G. Williams, D. H. Boggs, and W. M. Folkner, *JPL IOM 335-JW,DB,WF-20080314-001* (Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, 2013).

12. *S. Aoki, B. Guinot, G. H. Kaplan, H. Kinoshita, D. D. McCarthy, and P. K. Seidelmann*, *Astron. and Astrophys.* **105**, 359 (1982).
13. *W. M. Kaula*, *Theory of satellite geodesy* (Massachusetts: Blaisdell Publ. Co., 1966).
14. *O. Montenbruck and E. Gill*, *Satellite Orbits* (Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2000).
15. IAU GA 2012 Resolution B2, Beijing, China, August 2012, http://www.iau.org/static/resolutions/IAU2012_English.pdf
16. Информационно-аналитический центр КВНО (Королев: АО “ЦНИИМАШ”), <https://www.glon-ass-iac.ru/>
17. IERS-Earth Orientation data, EOP 14 C04 (IAU2000A), <https://www.iers.org/IERS/EN/Data-Products/EarthOrientationData/eop.html>
18. *S. M. Kudryavtsev*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **61**, 207 (1995).
19. *S. M. Kudryavtsev*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **82**, 301 (2002).