УДК 524.3-17

# ВЛИЯНИЕ ОРИЕНТАЦИИ СОБСТВЕННОГО ДИПОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ГОРЯЧЕГО ЮПИТЕРА НА СТРУКТУРУ ТЕЧЕНИЯ В ЕГО ПРОТЯЖЕННОЙ ОБОЛОЧКЕ

© 2020 г. А. Г. Жилкин<sup>1,\*</sup>, Д. В. Бисикало<sup>1</sup>, П. В. Кайгородов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт астрономии РАН, Москва, Россия \*E-mail: zhilkin@inasan.ru Поступила в редакцию 01.11.2019 г.

После доработки 22.11.2019 г. Принята к публикации 22.11.2019 г.

В работе с помощью трехмерного численного моделирования исследовано влияние параметров ориентации собственного дипольного магнитного поля горячего юпитера на структуру течения в протяженной газовой (ионосферной) оболочке планеты. В качестве примера рассмотрен горячий юпитер HD 209458b. Величина магнитного момента планеты задавалась равной 0.1 от магнитного момента Юпитера. В расчетах также учитывалось магнитное поле звездного ветра, параметры которого соответствуют случаю сверх-альфвеновского режима обтекания атмосферы планеты. Наши расчеты показали, что в таких условиях вокруг горячего юпитера формируется квази-замкнутая газовая (ионосферная) оболочка с наведенной ударной магнитосферой, детальная структура которой определяется наклоном магнитного диполя. При этом темп потери массы зависит от ориентации дипольного магнитного поля планеты и возрастает с увеличением угла между направлением на звезду и направлением на ближайший к внутренней точке Лагранжа магнитный полюс. Это обусловлено ростом электромагнитных сил, препятствующих свободному движению вещества в формирующемся истечении, при приближении магнитного полюса к внутренней точке Лагранжа.

DOI: 10.31857/S0004629920030068

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных проблем современной астрофизики является исследование структуры газовых оболочек горячих юпитеров. Горячие юпитеры представляют собой экзопланеты с массой порядка массы Юпитера, расположенные в непосредственной близости от родительской звезды [1]. Первый горячий юпитер был открыт в 1995 г. [2]. Простые оценки показывают, что близкое расположение к родительской звезде, а также относительно большие размеры газовой оболочки горячих юпитеров могут приводить к переполнению полости Роша. Это, в свою очередь, должно порождать истечения из окрестностей точек Лагранжа  $L_1$  и  $L_2$  [3, 4], т.е. на дневной и ночной сторонах планеты. С наблюдательной точки зрения на формирование таких истечений косвенно указывает избыточное поглощение в ближнем ультрафиолетовом диапазоне, фиксируемое у некоторых горячих юпитеров [5-10]. С теоретической точки зрения эти выводы подтверждаются непосредственными расчетами в рамках одномерных аэрономических моделей [1, 11–14].

В серии работ (см., например, [15–21]) структура газовых оболочек горячих юпитеров исследовалась с помощью трехмерного численного моделирования. В численных моделях учитывался ветер от родительской звезды, который в этих процессах играет важную роль. Результаты расчетов показали [15], что в зависимости от параметров модели вокруг горячих юпитеров могут формироваться газовые оболочки трех основных типов. В случае закрытых оболочек атмосфера планеты полностью располагается внутри ее полости Роша. В случае, когда динамическое давление звездного ветра останавливает истечение из полости Роша в окрестности точки L, формируется квази-замкнутая оболочка. Наконец, в случае. когда динамического давления звездного ветра оказывается недостаточно для остановки истечения из точки Лагранжа L<sub>1</sub>, формируется открытая оболочка. Величина скорости потери массы существенно зависит от типа формируемой газовой оболочки. При этом в случаях замкнутых и квази-замкнутых оболочек темпы потери массы горячих юпитеров оказываются существенно меньше по сравнению со случаем открытой оболочки.

Оценки собственного магнитного поля горячих юпитеров показывают, что оно является достаточно слабым. Характерное значение магнитного момента горячих юпитеров, по-видимому, составляет величину  $0.1-0.2\mu_{jup}$ , где  $\mu_{jup} = 1.53 \times \times 10^{30}$  Гс см<sup>3</sup> — магнитный момент Юпитера. Это значение согласуется как с наблюдательными [22– 25], так и с теоретическими [26] оценками. Такое низкое значение дипольного момента объясняется неэффективной динамо генерацией магнитного поля. Это обусловлено тем, что из-за сильных приливных возмущений от родительской звезды собственное вращение типичного горячего юпитера должно синхронизироваться с его орбитальным движением в течение нескольких миллионов лет [27].

Интересно отметить, что магнитное поле горячих юпитеров может генерироваться не только в недрах, но и в верхних слоях атмосферы. Как показывают оценки [19] за счет процессов тепловой ионизации и жесткого излучения родительской звезды, верхняя атмосфера горячих юпитеров состоит из почти полностью ионизованного газа. Поэтому ее можно назвать ионосферной оболочкой. В работе [28] показано, что собственное магнитное поле горячего юпитера должно оказывать влияние на формирование крупномасштабных (зональных) течений в его атмосфере. Детальные трехмерные расчеты [29, 30] демонстрируют сложную картину распределения ветров в верхней атмосфере, в которой магнитные поля играют важную роль. В частности, электромагнитные силы могут смещать к западу горячее пятно, формирующееся в подсолнечной точке. Этот эффект может проявляться и на кривых блеска горячих юпитеров. Например, сравнение наблюдаемых кривых блеска с расчетными для планеты НАТ-Р-7 b позволяет оценить характерное магнитное поле в атмосфере величиной 6 Гс [31]. Скорее всего, эта оценка сильно завышена. Напомним, что на уровне облачного слоя Юпитера величина магнитного поля составляет 4-5 Гс. Правда, больших значений поле достигает на северном (14 Гс) и южном (11 Гс) магнитных полюсах диполя. Магнитное поле Юпитера не является чисто дипольным. Существенный вклад вносят также квадрупольная (22%) и октупольная (18%) компоненты. Результаты исследования сложного магнитного поля Юпитера с помощью космического аппарата "Юнона" представлены в недавней работе [32]. Однако в области магнитосферы доминирует дипольная компонента.

Процесс динамо-генерации магнитного поля планеты в существенной степени определяется ее внутренним строением (см., например, [33, 34]). Для планет-гигантов типа Юпитера необходимым условием осуществления механизма динамо (как ламинарного [35], так и турбулентного [36]) является отклонение от осевой симметрии [37], что может обеспечиваться силами Кориолиса во

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ том 97 № 3 2020

вращающихся системах. Это, в частности, проявляется в том, что ось магнитного диполя планеты должна быть наклонена к оси вращения на некоторый угол [26]. Например, угол наклона магнитного диполя Юпитера к оси его вращения составляет примерно 11°.

В наших недавних работах [38, 39] проводилось численное моделирование структуры течения в окрестности горячего юпитера WASP 12b с учетом влияния собственного магнитного поля планеты. На основе полученных результатов было показано, что наличие даже относительно слабого магнитного поля планеты (магнитный момент составлял 0.1µ<sub>iup</sub>) может приводить к заметному ослаблению темпа потери массы по сравнению с чисто газодинамическим случаем. Кроме того, было обнаружено, что магнитное поле может вызывать флуктуации во внешних частях ионосферной оболочки горячего юпитера [39]. Необходимо отметить, что магнитное поле учитывалось другими авторами в одномерных [40-42], в двумерных [43] и в трехмерных [41, 44, 45] численных аэрономических моделях атмосфер горячих юпитеров. Однако в этих работах рассматривалась лишь непосредственная окрестность планеты, а оценки темпов потери массы выполнялись без учета наличия протяженных оболочек. Исключением является работа [45], в которой авторы проводили трехмерное численное моделирование в широкой пространственной области и получили МГД решения для экзопланет с открытыми и квази-замкнутыми оболочками.

В работе [46] показано, что в процессе обтекания звездным ветром атмосферы горячего юпитера важную роль играет магнитное поле ветра. Это обусловлено тем, что практически все горячие юпитеры располагаются в суб-альфвеновской зоне звездного ветра, где скорость ветра меньше альфвеновской скорости. Скорость обтекания, учитывающая скорость орбитального движения планеты, при этом оказывается близкой к альфвеновской скорости. Это означает, что обтекание может происходить как в суб-альфвеновском режиме, так и в сверх-альфвеновском. В первом случае в структуре магнитосферы будет отсутствовать головная ударная волна [47]. Во втором случае магнитосфера горячего юпитера будет содержать все основные элементы, присутствующие в магнитосферах планет Солнечной системы [48, 49].

Взаимодействие магнитосферы горячего юпитера с магнитным звездным ветром может приводить к целому ряду следствий [50]. В частности, сильное магнитное поле ветра может создавать тормозящий момент и, следовательно, оказывать влияние на миграцию планеты [51]. Прохождение корональных выбросов массы вблизи горячего юпитера [17–20, 52] может приводить к переключению между суб-альфвеновским и сверх-альфвеновским режимами обтекания. В результате этого может происходить как исчезновение, так и появление отошедшей ударной волны вокруг горячего юпитера [53]. Этот эффект может оказывать влияние на наблюдательные проявления горячего юпитера [25], например, на поток электромагнитного излучения в ультрафиолетовой и рентгеновской областях спектра [54].

В данной работе с помощью трехмерного численного моделирования исследуется вопрос о влиянии ориентации оси магнитного диполя на структуру течения в окрестности горячего юпитера. При этом предполагается, что обтекание звездным ветром атмосферы горячего юпитера происходит в сверх-альфвеновском режиме. Структура статьи организована следующим образом. В разделе 2 описана численная модель. В разделе 3 представлены результаты расчетов. В последнем разделе сформулированы основные выводы по работе.

## 2. МОДЕЛЬ

Для описания структуры течения в окрестности горячего юпитера будем использовать приближение идеальной одножидкостной магнитной гидродинамики с явным выделением фонового магнитного поля [38, 46, 55, 56]. В таком подходе полное магнитное поле  $\vec{B}$  представляется в виде суперпозиции фонового магнитного поля  $\vec{H}$  и магнитного поля  $\vec{b}$ , индуцированного токами в самой плазме,  $\vec{B} = \vec{H} + \vec{b}$ . В рассматриваемой задаче фоновое поле создается источниками, находящимися за пределами расчетной области (внутри звезды или, точнее говоря, внутри короны, а также внутри планеты). Поэтому в расчетной области оно должно удовлетворять условию потенциальности,  $\nabla \times \vec{H} = 0$ . Это свойство фонового поля можно использовать для его частичного исключения из уравнений магнитной гидродинамики [57, 58]. Кроме того, в нашей модели предполагается, что фоновое магнитное поле является стационарным,  $\partial \vec{H} / \partial t = 0$ , что соответствует случаю, когда собственное вращение горячего юпитера синхронизировано с его орбитальным движением.

С учетом условий потенциальности и стационарности фонового магнитного поля уравнения идеальной магнитной гидродинамики могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \rho \vec{v} \right) = 0, \tag{1}$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right] =$$

$$= -\nabla P - \vec{b} \times \nabla \times \vec{b} - \vec{H} \times \nabla \times \vec{b} + \rho \vec{f},$$
(2)

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times \left( \vec{v} \times \vec{b} + \vec{v} \times \vec{H} \right),\tag{3}$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varepsilon \right] + P \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$
(4)

Здесь  $\rho$  – плотность,  $\vec{v}$  – скорость, P – давление,  $\epsilon$  – удельная внутренняя энергия. Для удобства численного моделирования в этих уравнениях использована система единиц, в которой множитель  $4\pi$  в выражении для электромагнитной силы не возникает. Предполагается, что вещество может рассматриваться как идеальный газ, для которого выполняется уравнение состояния

$$P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \tag{5}$$

где  $\gamma = 5/3$  — показатель адиабаты. Кроме того, в данной работе мы пренебрегаем эффектами магнитной вязкости. Отметим, что диффузия магнитного поля бомовского типа [59] может играть важную роль в областях магнитосферы, где происходят интенсивные процессы перезамыкания силовых линий. Эти области, в первую очередь, располагаются на магнитопаузе, а также в токовых слоях в магнитосферном хвосте [48]. Кроме того, по-видимому, магнитную вязкость необходимо учитывать при моделировании прохождения планеты через гелиосферный токовый слой, в процессе которого изменяется полярность магнитного поля ветра (см., например, [60]). В дальнейших работах мы предполагаем учесть магнитную вязкость в нашей численной модели.

В нашей модели предполагается, что планета движется по круговой орбите. Поэтому для расчетов удобно использовать неинерциальную систему отсчета, вращающуюся вместе с двойной системой "звезда-планета" вокруг их общего центра масс. В такой системе отсчета положения центров звезды и планеты не изменяются, а вектор угловой скорости вращения системы отсчета  $\vec{\Omega}$  совпадает с орбитальной угловой скоростью двойной системы "звезда—планета". В этой системе отсчета удельная внешняя сила определяется выражением

$$\vec{f} = -\nabla \Phi - 2(\vec{\Omega} \times \vec{v}). \tag{6}$$

Здесь первое слагаемое в правой части описывает силу, обусловленную градиентом потенциала Роша

$$\Phi = -\frac{GM_s}{|\vec{r} - \vec{r}_s|} - \frac{GM_p}{|\vec{r} - \vec{r}_p|} - \frac{1}{2} [\vec{\Omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_c)]^2, \qquad (7)$$

где  $M_s$  — масса звезды,  $M_p$  — масса планеты,  $\vec{r_s}$  — радиус-вектор центра звезды,  $\vec{r_p}$  — радиус-вектор центра планеты,  $\vec{r_c}$  — радиус-вектор центра масс системы. Второе слагаемое описывает силу Кориолиса.

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ том 97 № 3 2020

Фоновое магнитное поле задавалось в виде  $\vec{H} = \vec{H}_p + \vec{H}_s$ , где первое слагаемое  $\vec{H}_p$  описывает собственное магнитное поле планеты, а второе слагаемое  $\vec{H}_s$  соответствует радиальной компоненте магнитного поля звездного ветра  $B_r$ . В нашей модели предполагалось, что магнитное поле горячего юпитера является дипольным,

$$\vec{H}_{sp} = \frac{\mu}{\left|\vec{r} - \vec{r}_{p}\right|^{3}} [3(\vec{d} \cdot \vec{n}_{p})\vec{n}_{p} - \vec{d}], \qquad (8)$$

где  $\mu$  — магнитный момент,  $\vec{n}_p = (\vec{r} - \vec{r}_p)/|\vec{r} - \vec{r}_p|$ ,  $\vec{d}$  — единичный вектор, направленный вдоль магнитной оси, вектор магнитного момента  $\vec{\mu} = \mu \vec{d}$ . Радиальное магнитное поле звездного ветра можно найти из уравнения Максвелла  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ . С учетом сферической симметрии получаем [61]

$$\vec{H}_{s} = \frac{B_{s}R_{s}^{2}}{\left|\vec{r} - \vec{r}_{s}\right|^{2}}\vec{n}_{s},$$
(9)

где  $R_s$  — радиус звезды,  $H_s$  — среднее магнитное поле на поверхности звезды, а вектор  $\vec{n}_s = (\vec{r} - \vec{r}_s)/|\vec{r} - \vec{r}_s|$ . Нетрудно убедиться, что фоновое магнитное поле удовлетворяет условию потенциальности,  $\nabla \times \vec{H} = 0$ .

В начальный момент времени собственное магнитное поле плазмы  $\vec{b}$  будет определяться только азимутальной компонентой магнитного поля звездного ветра. В орбитальной плоскости планеты для описания азимутальных компонент скорости  $v_{\varphi}$  и магнитного поля  $b_{\varphi}$  можно использовать аналитическую МГД модель солнечного ветра из работы [62]. В этом случае

$$v_{\varphi} = \Omega_s r \frac{1 - \lambda^2 r_A^2 / r^2}{1 - \lambda^2},$$
 (10)

$$b_{\varphi} = \frac{B_r}{V_r} \Omega_s \lambda^2 \frac{1 - r_A^2 / r^2}{1 - \lambda^2}.$$
 (11)

Здесь  $v_r$  — радиальная скорость ветра, радиальная координата r определяет расстояние от центра звезды до данной точки,  $\Omega_s$  — угловая скорость собственного вращения звезды, а через  $\lambda$  обозначено альфвеновское число Маха для радиальных компонент скорости и магнитного поля,

$$\lambda = \frac{\sqrt{4\pi\rho}v_r}{B_r}.$$
 (12)

Альфвеновская точка соответствует расстоянию  $r = r_A$ , на котором радиальная скорость ветра  $v_r$  становится равной альфвеновской скорости  $u_A = |B_r|/\sqrt{4\pi\rho}$ , а параметр  $\lambda = 1$ . Область  $r < r_A$  определяет *суб-альфвеновскую* зону звездного вет-

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ том 97 № 3 2020

ра, а область  $r > r_A$  соответственно сверх-альфвеновскую зону. В работе [62] для солнечного ветра было получено значение альфвеновского радиуса  $r_A = 24.3 R_{\odot}$ . В более поздних работах эта величина оценивалась меньшими значениями (см., например, [63, 64]). В работе [65] на основе анализа солнечной активности за последние 250 лет был сделан вывод о том, что альфвеновский радиус может варьироваться в довольно широких пределах от 15  $R_{\odot}$  до 30  $R_{\odot}$ . С другой стороны, величина магнитного поля звезд солнечного типа может отличаться от поля Солнца. Средние поля на поверхности таких звезд лежат в диапазоне примерно от 0.1 до нескольких гаусс [66, 67]. Магнитные поля звезд других спектральных классов могут отличаться еще сильнее. Кроме того, азимутальная компонента магнитного поля звездного ветра (11) определяется угловой скоростью собственного вращения звезды, которая, в свою очередь, также зависит от спектрального класса [67]. Эти обстоятельства существенно расширяют набор возможных вариантов параметров моделей.

В качестве объекта исследования мы использовали горячий юпитер HD 209458b, который является первым транзиентным горячим юпитером, открытым в 1999 г. [68]. Основные параметры численной модели соответствовали значениям, использованным в наших предыдуших работах (см., например, [15]). Родительская звезда относится к спектральному классу G0, имеет массу  $M_s = 1.15 M_{\odot}$ , радиус  $R_s = 1.2 R_{\odot}$ . Собственное вращение звезды характеризуется периодом  $P_{\rm rot} = 14.4$  сут., что соответствует угловой скорости  $\Omega_s = 5.05 \times 10^{-6}$  с<sup>-1</sup> или линейной скорости на экваторе  $v_{\rm rot} = 4.2$  км/с. Планета характеризуется массой  $M_p = 0.71 M_{\text{jup}}$  и фотометрическим радиусом  $R_p = 1.38 R_{jup}$ , где  $M_{jup}$  и  $R_{jup}$  – масса и радиус Юпитера. Большая полуось орбиты планеты  $A = 10.2 R_{\odot}$ , что соответствует периоду обращения вокруг звезды  $P_{\rm orb} = 84.6$  ч.

В начальный момент времени вокруг планеты задавалась сферически-симметричная изотермическая атмосфера, распределение плотности в которой определялось выражением:

$$\rho = \rho_{\rm atm} \exp\left[-\frac{GM_p}{R_{\rm gas}T_{\rm atm}}\left(\frac{1}{R_p} - \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_p\right|}\right)\right],\tag{13}$$

где  $\rho_{atm}$  — плотность на фотометрическом радиусе,  $T_{atm}$  — температура атмосферы,  $R_{gas}$  — газовая постоянная. Начальный внешний радиус атмосферы определялся из условия равновесия по давлению с веществом звездного ветра. В расчетах использовались следующие параметры атмосферы: температура  $T_{\text{atm}} = 7500 \text{ K}$ , концентрация частиц на фотометрическом радиусе  $n_{\text{atm}} = 10^{11} \text{ см}^{-3}$ .

В качестве параметров звездного ветра были использованы соответствующие значения для солнечного ветра на расстоянии  $10.2R_{\odot}$  от центра Солнца [69]: температура  $T_w = 7.3 \times 10^5$  K, скорость  $v_w = 100$  км/с, концентрация  $n_w = 10^4$  см<sup>-3</sup>. Среднее магнитное поле на поверхности звезды задавалось равным  $B_s = 0.01$  Гс, что соответствует слабому полю ветра.

В наших расчетах мы принимали значение магнитного момента горячего юпитера HD 209458b равным  $\mu = 0.1 \mu_{jup}$ . Ориентация магнитного диполя определялась углами  $\theta$  и  $\varphi$ , которые использовались в качестве параметров модели. Компоненты единичного вектора  $\vec{d}$ , направленного вдоль магнитной оси, в декартовой системе координат описываются выражениями:

$$d_x = \sin\theta\cos\phi, \quad d_y = \sin\theta\sin\phi, \\ d_z = \cos\theta.$$
(14)

При этом мы считали, что собственное вращение планеты является синхронизованным с орбитальным вращением, а ось собственного вращения коллинеарна оси орбитального вращения.

Для численного решения уравнений магнитной гидродинамики, выписанных в предыдущем разделе, мы используем комбинацию разностных схем Роу [70] и Лакса-Фридрихса [71-73]. Алгоритм решения описан в нашей работе [46] и состоит из нескольких последовательных этапов. возникающих в результате применения метода расщепления по физическим процессам. На первом этапе численно решается подсистема уравнений, соответствующая идеальной магнитной гидродинамике с собственным магнитным полем плазмы  $\vec{b}$  без учета фонового магнитного поля  $\vec{H}$ . Для решения этой системы использовалась схема Роу [74, 75] (см. также монографию [55]) для уравнений магнитной гидродинамики с повышающей поправкой Ошера [76] на неоднородной сетке. Эта схема подробно описана в работе [77]. Заметим, что магнитогидродинамический вариант схемы Роу был представлен в коде таким образом, чтобы в отсутствие магнитного поля ( $\vec{b} = 0$ ) эта схема в точности переходила в схему Роу-Эйнфельдта-Ошера, использовавшуюся нами в чисто газодинамических расчетах [15]. Для быстрых магнитозвуковых характеристик в разностной схеме используется поправка Эйнфельдта [78]. В случае медленных магнитозвуковых характеристик исходная поправка Эйнфельдта не согласуется с чисто газодинамическим вариантом разностной схемы Роу. Поэтому для таких характеристик используется модифицированная энтропийная

поправка [77]. На втором этапе численно решается подсистема уравнений, соответствующая учету влияния фонового поля. Для ее решения использовалась схема Лакса–Фридрихса [71–73] с повышающими TVD (total variation diminishing) [79] поправками [55].

Для очистки дивергенции магнитного поля b мы использовали метод обобщенного множителя Лагранжа [80]. Выбор этого метода обусловлен тем, что течение в окрестности горячего юпитера является существенно нестационарным, особенно в спутном потоке, формирующем магнито-сферный хвост.

Вычисления проводились в декартовой системе координат, начало которой располагалось в центре планеты. Ось х проходила через центры звезды и планеты и при этом была направлена от звезды к планете. Ось у была направлена вдоль орбитального вращения планеты, а ось *z* – вдоль ее оси собственного вращения. Использовалась расчетная область с размерами  $-30 \le x/R_p \le 30$ ,  $-30 \le y/R_p \le 30, -15 \le z/R_p \le 15$  с числом ячеек  $N = 480 \times 480 \times 240$ . Для повышения пространственного разрешения в области атмосферы планеты мы использовали экспоненциально сгущающуюся к центру планеты сетку, структура которой описана в [77]. Характерный размер ячейки на фотометрическом радиусе планеты составлял величину  $0.02R_p$ , в то время как на внешнем краю расчетной области размер ячейки был равен примерно  $0.4R_n$ . Граничные условия задавались такие же, как и в работе [38].

#### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В данной работе мы провели численное моделирование структуры течения в окрестности горячего юпитера HD 209458b в сверх-альфвеновском режиме обтекания. Различные варианты расчета отличаются между собой только парамет-

**Таблица 1.** Значения углов  $\theta$  и  $\phi$ , определяющих ориентацию магнитного диполя соотношениями (14), угловое расстояние  $\chi$  между направлением на точку Лагранжа  $L_1$  и ближайшим к нему магнитным полюсом, а также темп потери массы M для различных моделей

Модель	θ	φ	χ	$\dot{M},10^{10}{ m r/c}$
1	0°	0°	90°	1.47
2	30°	0°	60°	1.48
3	60°	0°	30°	1.14
4	90°	0°	0°	1.13
5	90°	90°	90°	1.60
6	90°	180°	0°	1.13



**Рис. 1.** Распределение десятичного логарифма плотности (градация цвета), скорости (стрелки, верхняя диаграмма) и магнитного поля (трехмерные линии, нижняя диаграмма) в плоскости орбиты горячего юпитера для модели 1 ( $\theta = 0^{\circ}$ ,  $\phi = 0^{\circ}$ ). Решение представлено на момент времени  $0.26P_{orb}$  от начала счета. Светлыми линиями показаны эквипотенциальные поверхности потенциала Роша. Светлая окружность соответствует фотометрическому радиусу планеты. (Цветной вариант рисунка доступен в электронной версии журнала.)

рами ориентации магнитного диполя планеты. Соответствующие значения углов  $\theta$  и  $\phi$ , определяющих компоненты вектора  $\vec{d}$  в соотношениях (14), приведены в табл. 1. В моделях 1–4 наклон магнитного диполя варьировался, начиная от оси вращения (модель 1), и до плоскости орбиты (модель 4) в противоположную от звезды сторону. В модели 5 магнитный диполь был направлен в сторону звезды. В модели 6 магнитный диполь был направлен в сторону орбитального движения планеты.

Результаты численных расчетов демонстрируют рис. 1—6. На верхних диаграммах рисунков показаны распределения десятичного логарифма



**Рис. 2.** То же самое, что и на рис. 1, но для модели 2 ( $\theta = 30^{\circ}, \phi = 0^{\circ}$ ).

плотности (градация цвета) и скорости (стрелки) в орбитальной плоскости планеты. На шкале справа от диаграммы приведены соответствующие значения десятичного логарифма плотности

в г/см<sup>3</sup>. На нижних диаграммах показаны распределения десятичного логарифма плотности в орбитальной плоскости планеты (градация цвета) и трехмерные магнитные силовые линии. Представленные численные решения соответствуют моменту времени 0.26*P*<sub>orb</sub> от начала счета. Светлыми линиями на верхних диаграммах показаны эквипотенциальные поверхности потенциала Роша, проходящие вблизи точек Лагранжа  $L_1$  и  $L_2$ . Планета расположена в центре расчетной области и изображена светлой окружностью, радиус которой соответствует фотометрическому радиусу  $R_p$ . Значения декартовых координат по осям x и y в плоскости орбиты для наглядности выражены в радиусах планеты  $R_p$ .

Анализ этих рисунков позволяет заключить, что качественно картина течения в окрестности



**Рис. 3.** То же самое, что и на рис. 1, но для модели 3 ( $\theta = 60^{\circ}, \phi = 0^{\circ}$ ).

горячего юпитера во всех моделях выглядит примерно одинаково и вполне соответствует картине течения в чисто газодинамическом случае для квази-замкнутой оболочки [15]. Это обусловлено тем, что мы рассматриваем сверх-альфвеновский режим обтекания горячего юпитера звездным ветром, при котором магнитное поле ветра не является определяющим фактором. Собственное магнитное поле планеты в наших моделях является относительно слабым и поэтому также не оказывает какого-либо значительного влияния на динамику вещества.

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ том 97 № 3 2020

Рис. 1—6 показывают, что во всех моделях формируются два мощных истечения из окрестностей точек Лагранжа  $L_1$  и  $L_2$ . Первый поток формируется на дневной стороне и направлен в сторону родительской звезды. Вещество в нем движется против ветра под действием силы гравитации звезды. Второй поток формируется на ночной стороне и тянется за планетой в виде широкого турбулентного шлейфа.

В результате взаимодействия звездного ветра с оболочкой планеты формируется хорошо замет-



**Рис. 4.** То же самое, что и на рис. 1, но для модели 4 ( $\theta = 90^{\circ}, \phi = 0^{\circ}$ ).

ная отошедшая ударная волна. Можно сказать, что она состоит из двух или даже нескольких отдельных ударных волн. Одна из них (главная) возникает непосредственно вокруг атмосферы планеты. Остальные (вторичные) ударные волны формируются вокруг струи из внутренней точки Лагранжа  $L_1$ , а также ее выделяющихся фрагментов и выступов. По ходу орбитального движения планеты на границе, разделяющей плазму ветра и вещество оболочки, возникает тангенциальный разрыв, поскольку в этом месте плазма ветра движется вдоль поверхности оболочки. В результате развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца граница раздела сильно искажается, но вихри быстро сносятся потоком назад. Аналогичное явление наблюдается на задней (по ходу орбитального движения планеты) части струи из внутренней точки Лагранжа  $L_1$ . Движение вещества в ней останавливается динамическим давлением звездного ветра и отбрасывается назад. Формирующийся при этом поток вещества турбулизуется и фрагментирует на множество отдельных сгуст-



**Рис. 5.** То же самое, что и на рис. 1, но для модели 5 ( $\theta = 90^{\circ}, \phi = 90^{\circ}$ ).

ков. Большая часть этого вещества попадает в турбулентный шлейф, тянущийся за планетой.

В начальный момент времени в нашей численной модели в окрестности горячего юпитера магнитное поле представляет собой суперпозицию собственного дипольного магнитного поля планеты и магнитного поля звездного ветра. В нашей работе [46] была описана топология такого начального магнитного поля. Было показано, что эту область можно разделить на четыре магнитные зоны. В первой зоне силовые линии магнит-

магмагицию плаашей определяеты, они начинаются на поверхности звезды и планеты, они начинаются на поверхности звезды и заканчиваются на поверхности планеты. Наконец, четвертая зона определяется , что замкнутыми линиями планеты. В окрестности планеты выделяются нейтральные точки, в кототнитрых направление магнитного поля оказывается

ного поля начинаются на поверхности звезды

(точнее говоря, на границе короны) и уходят на бесконечность. Вторая зона определяется откры-



**Рис. 6.** То же самое, что и на рис. 1, но для модели 6 ( $\theta = 90^\circ$ ,  $\phi = 180^\circ$ ).

неопределенным, а индукция поля равна нулю. Множество этих точек формирует в пространстве замкнутую нейтральную линию, форма которой определяется параметрами ориентации магнитной оси планеты.

В дальнейшем эта топология в целом сохраняется, но форма силовых линий существенно искажается планетными истечениями. Рис. 1—6 показывают, что внутри полости Роша планеты магнитное поле остается близким к дипольному. Однако в струях, формирующихся на дневной и ночной сторонах, магнитные силовые линии вытягиваются потоками плазмы из ионосферной оболочки. Вдоль струи из внутренней точки Лагранжа  $L_1$  индукция магнитного поля остается практически постоянной и составляет примерно

10<sup>-3</sup> Гс. Обратим внимание на структуру магнитной зоны, состоящей из общих для звезды и планеты магнитных линий. Ее форма определяется ориентацией магнитного диполя планеты. Дело в том, что магнитные линии ветра, направленные от звезды, должны замыкаться на южном магнитном полюсе планеты, а не на северном. Поэтому если, например, северный магнитный полюс направлен к звезде, как в модели 6 (см. рис. 6), то соответствующим магнитным линиям ветра необходимо полностью обогнуть планету, чтобы замкнуться на южном полюсе. Наиболее простую форму эта магнитная зона имеет в случае модели 4 (см. рис. 4), в которой южный магнитный полюс ориентирован в направлении на звезду. В остальных вариантах реализуются промежуточные случаи.

В наших моделях магнитное поле звездного ветра является достаточно слабым и не играет существенной динамической роли. Формирующаяся магнитосфера, согласно классификации, описанной в работе [46], соответствует наведенной (индуцированной) ударной магнитосфере для случая открытой или квази-замкнутой ионосферной оболочки.

На фронте ударной волны магнитные линии испытывают излом согласно условиям Гюгонио. Вблизи границы ионосферной оболочки формируется магнитопауза, которая разделяет между собой магнитное поле ветра и собственное поле планеты. На дневной стороне на границе зон с открытыми и замкнутыми линиями поля планеты должны происходить процессы перезамыкания магнитных линий, как и в магнитосфере Земли [48]. Аналогичные процессы должны происходить и в магнитосферном хвосте на ночной стороне. Для более корректного учета этих явлений в нашей модели следует включить эффекты магнитной вязкости, обусловленные, например, бомовской диффузией [59]. В данных расчетах эти процессы происходят за счет численной вязкости, которая определяется используемой разностной схемой и структурой сетки.

В области магнитосферного каспа (области с открытыми силовыми линиями планеты) плазма ветра может свободно проникать в верхние слои атмосферы, вызывая авроральные свечения. Наиболее мощные потоки частиц из плазмы ветра должны были бы формироваться в моделях 4 и 6, в которых магнитные полюса ориентированы вдоль линии, соединяющей центры звезды и планеты. Однако свободному подходу частиц к магнитным полюсам в этих случаях препятствует вещество ионосферной оболочки. Поэтому получающиеся конечные потоки должны быть в существенной мере ослаблены. Заметим, что в случае суб-альфвеновского режима обтекания влияние собственного магнитного поля планеты оказывается еще меньше и поэтому область магнитосферного каспа будет располагаться в более глубоких слоях атмосферы. Это обстоятельство может объяснить неудачные до сегодняшнего дня попытки обнаружения наблюдательных проявлений авроральных свечений в горячих юпитерах. Например, в работе [81] предпринята попытка де-

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ том 97 № 3 2020

тектирования радиоизлучения из авроральных областей горячих юпитеров HD 114762, 70 Vir и т Воо с помощью радиотелескопа Very Large Array (VLA). Однако в предсказанном диапазоне частот какого-либо существенного потока радиоизлучения замечено не было. Другое объяснение этого факта предложено в работе [82].

### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты трехмерного численного моделирования структуры течения в окрестности горячего юпитера с параметрами, соответствующими HD 209458b. Было выполнено несколько расчетов, различающихся между собой ориентацией магнитной оси собственного дипольного магнитного поля горячего юпитера. Величина магнитного момента планеты задавалась равной 0.1 от магнитного момента Юпитера. Кроме того, в расчетах учитывалось магнитное поле звездного ветра. Среднее магнитное поле на поверхности звезлы было принято равным 0.01 Гс. Это соответствует относительно слабому полю ветра. Поэтому во всех рассмотренных в работе моделях в окрестности горячего юпитера обтекание атмосферы планеты звездным ветром происходило в сверх-альфвеновском режиме. Это формально соответствует как сверхзвуковому обтеканию в чисто газодинамическом случае [15], так и случаю МГД течения с учетом только собственного дипольного магнитного поля планеты [38].

В верхних частях атмосферы существенное влияние на динамику плазмы оказывает собственное магнитное поле планеты. В определенных случаях это обстоятельство может приводить к формированию так называемых "мертвых зон", где плазма удерживается магнитным полем. Такие образования наблюдались, например, в численном решении, полученном авторами работы [43]. Очевидно, что конфигурация этих "мертвых зон" также в существенной мере должна зависеть от ориентации оси симметрии дипольного магнитного поля планеты. В наших численных решениях реализуется высокая степень переполнения полости Роша горячего юпитера. При таких параметрах атмосферы "мертвые зоны" оказываются плохо выраженными. Истечения формируются вблизи точек Лагранжа  $L_1$  и  $L_2$ , где динамическое давление уже во много раз превосходит магнитное давление. По этой же причине в наших решениях не наблюдаются истечения из полярных областей [83] в тех случаях, когда магнитная ось планеты не совпадает с направлением на звезду.

Темп потери массы горячих юпитеров для различных типов газовых оболочек в чисто газодинамическом случае вычислялся в работе [16]. В работе [38] на основе трехмерных МГД расчетов был сделан вывод о том, что наличие даже сравнительно слабого магнитного поля у горячего юпитера может приводить к заметному ослаблению темпа потери массы  $\dot{M}$ . Это означает, что у таких планет могут формироваться замкнутые и квази-замкнутые ионосферные оболочки при больших степенях переполнения полости Роша, поскольку в этом случае веществу необходима дополнительная энергия для преодоления магнитного давления и натяжения магнитных линий.

Как показывают наши расчеты, темп потери массы зависит также и от ориентации дипольного магнитного поля планеты. В табл. 1 приведены полученные в расчетах значения темпа потери массы атмосферой горячего юпитера для различных моделей. Величина  $\dot{M}$  лежит в диапазоне от  $10^{10}$  г/с до  $2 \times 10^{10}$  г/с. Максимальное значение темпа потери массы (1.60×10<sup>10</sup> г/с, модель 5) отличается от минимального  $(1.13 \times 10^{10} \text{ г/с}, \text{ модели})$ 4 и 6) на 42%. Анализ показывает, что темп потери массы возрастает с увеличением угла у между направлением на звезду и направлением на ближайший к внутренней точке Лагранжа L<sub>1</sub> магнитный полюс. По результатам расчетов (см. таблицу 1) эту зависимость можно описать эмпирическим соотношением вида

$$\dot{M} = 1.1 \times 10^{10} + 4.9 \times 10^7 \chi \,[r/c],$$
 (15)

где величина угла  $\chi$  выражена в градусах. Полученную зависимость можно объяснить тем, что в верхних слоях атмосферы наибольшая индукция магнитного поля планеты достигается в магнитных полюсах. Следовательно, чем ближе магнитный полюс расположен к точке Лагранжа  $L_1$ , тем больше будет величина электромагнитной силы, препятствующей движению вещества в формирующемся истечении. Конечно, вдоль магнитных силовых линий вещество будет двигаться свободно. Однако из-за относительно большого диаметра струи (примерно  $3R_p$ ) в этом случае в ней будет присутствовать и поперечная компонента поля, которая будет препятствовать свободному истечению.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 18-12-00447). Работа была выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования "Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мегакласса" НИЦ "Курчатовский институт", http://ckp.nrcki.ru/, а также вычислительных средств МСЦ РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- R. A. Murray-Clay, E. I. Chiang, and N. Murray, Astrophys. J. 693, 23 (2009).
- 2. M. Mayor and D. Queloz, Nature 378, 355 (1995).
- 3. D. Lai, C. Helling, and E. P. J. van den Heuvel, Astrophys. J. **721**, 923 (2010).
- 4. S.-L. Li, N. Miller, D. N. C. Lin, and J. J. Fortney, Nature 463, 1054 (2010).
- 5. A. Vidal-Madjar, A. Lecavelier des Etangs, J.-M. Desert, G. E. Ballester, et al., Nature **422**, 143 (2003).
- 6. A. Vidal-Madjar, A. Lecavelier des Etangs, J.-M. Desert, G. E. Ballester, et al., Astrophys. J. 676, L57 (2008).
- 7. L. Ben-Jaffel, Astrophys. J. 671, L61 (2007).
- 8. *A. Vidal-Madjar, J.-M. Desert, A. Lecavelier des Etangs, G. Hebrard, et al.*, Astrophys. J. **604**, L69 (2004).
- 9. L. Ben-Jaffel and S. Sona Hosseini, Astrophys. J. 709, 1284 (2010).
- J. L. Linsky, H. Yang, K. France, C.S. Froning, et al., Astrophys. J. 717, 1291 (2010).
- 11. R. V. Yelle, Icarus 170, 167 (2004).
- 12. A. Garcia Munoz, Planet. Space Sci. 55, 1426 (2007).
- 13. T. T. Koskinen, M. J. Harris, R. V. Yelle, and P. Lavvas, Icarus 226, 1678 (2013).
- 14. Д. Э. Ионов, В. И. Шематович, Я. Н. Павлюченков, Астрон. журн. **94**, 381 (2017).
- 15. D. V. Bisikalo, P. V. Kaigorodov, D. E. Ionov, and V. I. Shematovich, Astronomy Reports 57, 715 (2013).
- 16. A. A. Cherenkov, D. V. Bisikalo, and P. V. Kaigorodov, Astronomy Reports 58, 679 (2014).
- 17. D. V. Bisikalo and A. A. Cherenkov, Astronomy Reports **60**, 183 (2016).
- 18. A. Cherenkov, D. Bisikalo, L. Fossati, and C. Möstl, Astrophys. J. 846, 31 (2017).
- 19. A. A. Cherenkov, D. V. Bisikalo, and A. G. Kosovichev, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 475, 605 (2018).
- D. V. Bisikalo, A. A. Cherenkov, V. I. Shematovich, L. Fossati, and C. Möstl, Astronomy Reports 62, 648 (2018).
- I. F. Shaikhislamov, M. L. Khodachenko, H. Lammer, A. G. Berezutsky, I. B. Miroshnichenko, and M. S. Rumenskikh, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 481, 5315 (2018).
- 22. *J.-M. Grieβmeier, A. Stadelmann, T. Penz, et al.*, Astron. Astrophys. **425**, 753 (2004).
- 23. A. Sanchez-Lavega, Astrophys. J. 609(2), L87 (2004).
- 24. A. A. Vidotto, M. Jardine, and Ch. Helling, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **411**, L46 (2011).
- 25. K. G. Kislyakova, M. Holmström, H. Lammer, et al., Science **346**, 981 (2014).
- 26. *D. J. Stevenson*, Reports on Progress in Physics **46**, 555 (1983).
- 27. A. P. Showman and T. Guillot, Astron. Astrophys. 385, 166 (2002).
- 28. K. Batygin, S. Stanley, and D. J. Stevenson, Astrophys. J. 776, 53 (2013).
- 29. T. M. Rogers and A. P. Showman, Astrophys. J. 782, L4 (2014).
- 30. *T. M. Rogers and T. D. Komacek*, Astrophys. J. **794**, 132 (2014).

- 31. T. M. Rogers, Nat. Astron. 1, 0131 (2017).
- 32. *K. M. Moore, R. K. Yadav, L. Kulowski, et al.*, Nature **561**, 76 (2018).
- 33. C. A. Jones, Annu. Rev. Fluid Mech. 43, 583 (2011).
- 34. C. A. Jones, Icarus 241, 148 (2014).
- 35. С. И. Брагинский, ЖЭТФ 47, 2178 (1964).
- 36. E. N. Parker, Cosmical Magnetic Fields: Their Origin and Their Activity (Oxford: Clarendon Press, 1979).
- 37. *T. G. Cowling*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **94** 39 (1933).
- A. S. Arakcheev, A. G. Zhilkin, P. V. Kaigorodov, D. V. Bisikalo, and A. G. Kosovichev, Astronomy Reports 61, 932 (2017).
- 39. D. V. Bisikalo, A. S. Arakcheev, and P. V. Kaigorodov, Astronomy Reports **61**, 925 (2017).
- 40. T. T. Koskinen, J. Y.-K. Cho, N. Achilleos, and A. D. Aylward, Astrophys. J. **722**, 178 (2010).
- 41. G. B. Trammell, P. Arras, and Z.-Y. Li, Astrophys. J. **728**, 152 (2011).
- 42. I. F. Shaikhislamov, M. L. Khodachenko, Y. L. Sasunov, H. Lammer, et al., Astrophys. J. **795**, 132 (2014).
- 43. M. L. Khodachenko, I. F. Shaikhislamov, H. Lammer, and P. A. Prokopov, Astrophys. J. 813, 50 (2015).
- 44. G. B. Trammell, Z.-Y. Li, and P. Arras, Astrophys. J. 788, 161 (2014).
- T. Matsakos, A. Uribe, and A. Königl, Astron. Astrophys. 578, A6 (2015).
- 46. *A. G. Zhilkin and D. V. Bisikalo*, Astronomy Reports **63**, 550 (2019).
- 47. *W.-H. Ip, A. Kopp, and J. H. Hu*, Astrophys. J. **602**, L53 (2004).
- 48. Е. С. Беленькая, Усп. физ. наук 179, 809 (2009).
- 49. C. T. Russell, Rep. Prog. Phys. 56, 687 (1993).
- 50. P. Zarka, Planetary and Space Science 55, 598 (2007).
- 51. A. Strugarek, A. S. Brun, S. P. Matt, and V. Réville, Astrophys. J. 815, 111 (2015).
- 52. П. В. Кайгородов, Е. А. Ильина, Д. В. Бисикало, Астрон. журн. 96, N5, 367 (2019).
- 53. А. Г. Жилкин, Д. В. Бисикало, П. В. Кайгородов, Астрон. журн. 97, (2020), в печати.
- 54. S. Czesla, P. C. Schneider, M. Salz, et al., Astron. Astrophys. **629**, A5 (2019).
- 55. Д. В. Бисикало, А. Г. Жилкин, А. А. Боярчук, Газодинамика тесных двойных звезд (М.: Физматлит, 2013).
- 56. А. Г. Жилкин, Д. В. Бисикало, А. А. Боярчук, Усп. физ. наук **182**, 121 (2012).
- 57. T. Tanaka, J. Comp. Phys. 111, 381 (1994).

- 58. K. G. Powell, P. L. Roe, T. J. Linde, T. I. Gombosi, and D. L. de Zeeuw, J. Comp. Phys. **154**, 284 (1999).
- 59. F. F. Chen, Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion, (Berlin: Springer, 1984).
- 60. *M. J. Owens, R. J. Forsyth*, Living Rev. Solar Phys. **10**, 5 (2013).
- 61. В. Б. Баранов, К. В. Краснобаев, Гидродинамическая теория космической плазмы (М.: Наука, 1977).
- 62. E. J. Weber and L. Davis Jr., Astrophys. J. 148, 217 (1967).
- 63. J. C. Brandt, C. Wolff, and J. P. Cassinelli, Astrophys. J. 156, 1117 (1969).
- 64. T. Sakurai, Solar Physics 76, 301 (1982).
- 65. M. L. Goelzer, N. A. Schwadron, and C. W. Smith, J. Geophys. Res. Space Physics 119, 115 (2014).
- 66. D. Fabbian, R. Simoniello, R. Collet, et al., Astron. Nachr. 338, 753 (2017).
- 67. H. Lammer, M. Gudel, Y. Kulikov, et al., Earth Planets Space 64, 179 (2012).
- 68. D. Charbonneau, T. M. Brown, D. W. Latham, and M. Mayor, Astrophys. J., L45 (2000).
- 69. G. L. Withbroe, Astrophys. J. 325, 442 (1988).
- 70. P. L. Roe, Lect. Notes Phys. 141, 354 (1980).
- 71. P. D. Lax, Commun. Pure Appl. Math. 7, 159 (1954).
- 72. *R. O. Friedrihs*, Commun. Pure Appl. Math. 7, 345 (1954).
- 73. В. В. Русанов, ЖЭТФ 1, 267 (1961).
- 74. P. Cargo and G. Gallice, J. Comp. Phys. 136, 446 (1997).
- А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов, Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений (М.: Физматлит, 2001).
- 76. S. R. Chakravarthy and S. Osher, AIAA Papers N 85-0363 (1985).
- 77. А. Г. Жилкин, А. В. Соболев, Д. В. Бисикало, М. М. Габдеев, Астрон. журн. **96** N9, 748 (2019).
- 78. *B. Einfeldt*, SIAM J. Numer. Anal. 25, 294 (1988).
- 79. A. Harten, J. Hyman, J. Comp. Phys. 50, 235 (1983).
- 80. A. Dedner, F. Kemm, D. Kroner, C.-D. Munz, T. Schnitzer, and M. Wesenberg, J. Comp. Phys. 175, 645 (2002).
- 81. W. M. Farrell, T. J. W. Lazio, M. D. Desch, T. S. Bastian, and P. Zarka, In R. Norris, F. Stootman (Eds.), Bioastronomy 2002: Life among the stars, Proceedings of IAU Symposium #213 (p. 73). San Francisco, CA: Astronomical Society of the Pacific (2004).
- 82. C. Weber, H. Lammer, I. F. Shaikhislamov, et al., Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 469, 3505 (2017).
- 83. J. E. Owen and F. C. Adams, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 444, 3761 (2014).