

УДК 521.1

НОРМА СМЕЩЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ НЕБЕСНОГО ТЕЛА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

© 2020 г. К. В. Холшевников^{1, 2, *}, Н. Батмунх^{3, **}, К. И. Оськина^{1, ***}, В. Б. Титов^{1, ****}

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

² Институт прикладной астрономии РАН, Санкт-Петербург, Россия

³ Институт астрономии и геофизики Монгольской Академии наук, Улан-Батор, Монголия

* e-mail: kvk@astro.spbu.ru

** e-mail: monastro@yandex.ru

*** e-mail: zegzithsa@gmail.com

**** e-mail: tit@astro.spbu.ru

Поступила в редакцию 29.10.2019 г.

После доработки 22.11.2019 г.

Принята к публикации 22.11.2019 г.

Широко применяющийся в небесной механике метод осреднения вводит среднюю орбиту, слабо отклоняющуюся от оскулирующей при условии малости возмущающих сил. Разность $\delta\mathbf{r}$ положений небесного тела на средней и оскулирующей орбите является квази-периодической функцией времени. Представляет интерес оценка нормы уклонения $\|\delta\mathbf{r}\|$. Ранее мы получили точное выражение среднеквадратической нормы для одной задачи небесной механики: точка нулевой массы движется под действием притяжения к центральному телу и малого возмущающего ускорения \mathbf{F} ; вектор \mathbf{F} постоянен в сопутствующей системе отсчета с осями, направленными по радиусу-вектору, трансверсали и вектору площадей. Здесь мы решили аналогичную задачу, предполагая вектор \mathbf{F} постоянным в системе отсчета с осями, направленными по касательной, главной нормали и вектору площадей. Оказалось, что $\|\delta\mathbf{r}\|^2$ пропорциональна a^6 , где a — большая полуось. Величина $\|\delta\mathbf{r}\|^2 a^{-6}$ является взвешенной суммой квадратов компонент \mathbf{F} . Коэффициенты квадратичной формы зависят лишь от эксцентриситета и представлены рядом Маклорена по четным степеням e , сходящимся, по крайней мере, при $e < 1$. Вычислены коэффициенты рядов до e^4 включительно, так что поправочные члены имеют порядок e^6 .

DOI: 10.31857/S0004629920040039

1. ВВЕДЕНИЕ

В методе осреднения важную роль играет переход от оскулирующих элементов к средним [1–5]. Оценка норм их разностей обычно не представляет труда, но и не представляет сколько-нибудь значительного интереса. В самом деле, нас интересуют отклонения не элементов, а координат и/или скоростей. Формулы для нормы разностей координат, выраженных через разности элементов, приведены в [6]. Там же они применены к задаче о движении с возмущающим ускорением, постоянным в системе отсчета \mathbb{O}_1 , связанной с радиусом-вектором.

Здесь мы выведем аналогичные формулы в задаче о движении с возмущающим ускорением \mathbf{F} , постоянным в системе отсчета \mathbb{O}_2 , связанной с вектором скорости. В этой системе ось x направлена по вектору скорости частицы, ось y — по

главной нормали к оскулирующей орбите, ось z — по бинормали. Компоненты \mathbf{F} обозначим через $\kappa^2\mathfrak{T}$, $\kappa^2\mathfrak{N}$, $\kappa^2\mathfrak{W}$, где κ^2 — гравитационный параметр. Постоянные \mathfrak{T} , \mathfrak{N} , \mathfrak{W} имеют размерность длины в степени -2 . Умноженные на a^2 , они предполагаются малыми первого порядка. Величинами второго порядка малости мы пренебрегаем.

2. РАЗНОСТИ ОСКУЛИРУЮЩИХ И СРЕДНИХ ЭЛЕМЕНТОВ И КООРДИНАТ

Ограничиваясь первым порядком, заменим разности координат $\delta\mathbf{r}$ и элементов $\delta\epsilon_k$ дифференциалами. С такой точностью они приведены в [6]:

$$(\delta\mathbf{r})^2 = \delta r^2 + r^2(\delta u + c\delta\Omega)^2 + r^2(\sin u\delta i - s \cos u\delta\Omega)^2. \quad (1)$$

Здесь и ниже в качестве элементов ϵ_k выбраны $a, e, i, \Omega, g, M, \theta, E, u$ – большая полуось, эксцентриситет, наклон, долгота восходящего узла, аргумент перицентра, средняя, истинная и эксцентрическая аномалии, аргумент широты соответственно; $c = \cos i, s = \sin i, \eta = \sqrt{1 - e^2}$. Независимы первые 6 элементов.

Выразим первые два слагаемых справа в (1) через приращения независимых элементов [6]:

$$\delta r = \frac{r}{a} \delta a + \frac{a^2}{r} (e - \cos E) \delta e + \frac{a^2 e \sin E}{r} \delta M, \quad (2)$$

$$r(\delta u + c \delta \Omega) = \frac{a^2 \sin E}{r \eta} (2 - e^2 - e \cos E) \delta e + r(\delta g + c \delta \Omega) + \frac{a^2 \eta}{r} \delta M. \quad (3)$$

Что касается третьего слагаемого справа в (1), то оно совпадает с найденным в [6]:

$$r(\sin u \delta i - \sin i \cos u \delta \Omega) = a^3 \Phi_1(e, E) W, \quad (4)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{1}{4} (4 - 3e^2 - 3e \cos E + 2e^2 \cos 2E).$$

Приращения других элементов представлены в [7] в виде сложных функций от эксцентриситета и в виде рядов по степеням эксцентриситета. Коэффициенты рядов приведены до пятой степени включительно. Здесь мы остановимся на представлении в виде ряда с той же точностью. Разложения для $\delta a, \delta e$ начинаются с e^0 , тогда как для $\delta g + c \delta \Omega$ и δM – с e^{-1} . Однако отрицательные степени эксцентриситета в сумме двух последних слагаемых (3) сокращаются, и результат представляет собой ряд Маклорена по степеням e . Для коэффициента при $\delta g + c \delta \Omega$ имеем точное выражение $r = a(1 - e \cos E)$. А в коэффициенте при δM необходимо сохранить члены до e^6 :

$$\begin{aligned} \frac{a}{r} \eta = & 1 + \left(e + \frac{1}{4} e^3 + \frac{1}{8} e^5 \right) \cos E + \\ & + \left(\frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{4} e^4 + \frac{5}{32} e^6 \right) \cos 2E + \\ & + \left(\frac{1}{4} e^3 + \frac{3}{16} e^5 \right) \cos 3E + \left(\frac{1}{8} e^4 + \frac{1}{8} e^6 \right) \cos 4E + \\ & + \frac{1}{16} e^5 \cos 5E + \frac{1}{32} e^6 \cos 6E. \end{aligned}$$

Опираясь на структуру рядов для приращений элементов [7] и соотношения (2), (3), получим

$$\begin{aligned} \delta r = & a^3 [\Phi_2(e, E) \mathfrak{X} + \Phi_3(e, E) \mathfrak{Y}], \\ r(\delta u + c \delta \Omega) = & a^3 [\Phi_5(e, E) \mathfrak{X} + \Phi_4(e, E) \mathfrak{Y}], \quad (5) \end{aligned}$$

где функции Φ_n ($n = 1, \dots, 5$) обладают свойствами

$$\begin{aligned} \Phi_n(e, -E) &= (-1)^{n-1} \Phi_n(e, E), \\ \Phi_n(-e, E + \pi) &= \Phi_n(e, E). \end{aligned} \quad (6)$$

Поэтому их ряды Фурье имеют вид

$$\Phi_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(e) \sin kE, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}(e) \cos kE, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Функции $a_{nk}(e)$ представлены рядами Маклорена с рациональными коэффициентами и содержат только степени e , четность которых совпадает с четностью k . Нетрудно показать также, что ряд Маклорена для $a_{nk}(e)$ начинается с члена порядка e^{k-2} , так что при сохранении членов до определенной степени эксцентриситета в рядах Фурье остается лишь конечное число слагаемых.

Средствами компьютерной алгебры получим значения a_{nk} с точностью до e^5 :

$$\begin{aligned} a_{10} &= 1 - \frac{3}{4} e^2, & a_{11} &= -\frac{3}{4} e, & a_{12} &= \frac{e^2}{2}; \\ a_{21} &= \frac{11}{2} e + \frac{155}{96} e^3 + \frac{403}{384} e^5, \\ a_{22} &= \frac{8}{3} e^2 + \frac{331}{192} e^4, \\ a_{23} &= \frac{31}{24} e^3 + \frac{11387}{10240} e^5, \\ a_{24} &= \frac{1297}{1920} e^4, & a_{25} &= \frac{10199}{30720} e^5; \\ a_{30} &= -1 + \frac{1}{4} e^2 + \frac{25}{64} e^4, & a_{31} &= \frac{3}{16} e^3 + \frac{83}{384} e^5, \\ a_{32} &= -\frac{1}{4} e^2 - \frac{19}{192} e^4, & a_{33} &= -\frac{7}{32} e^3 - \frac{19}{160} e^5, \\ a_{34} &= -\frac{11}{120} e^4, & a_{35} &= -\frac{97}{1920} e^5; \\ a_{41} &= e + \frac{1}{2} e^3 - \frac{13}{64} e^5, & a_{42} &= \frac{1}{4} e^2 - \frac{31}{64} e^4, \\ a_{43} &= -\frac{11}{48} e^3 + \frac{19}{960} e^5, \\ a_{44} &= \frac{21}{640} e^4, & a_{45} &= -\frac{1}{160} e^5; \\ a_{50} &= 4 - \frac{7}{4} e^2 - \frac{5}{16} e^4, \\ a_{51} &= 2e - \frac{53}{48} e^3 - \frac{59}{192} e^5, \end{aligned}$$

$$a_{52} = -\frac{1}{48}e^2, \quad a_{53} = -\frac{1}{8}e^3 + \frac{163}{2560}e^5,$$

$$a_{54} = -\frac{317}{15360}e^4, \quad a_{55} = \frac{13}{2560}e^5.$$

Замечание 1. Коэффициенты a_{1k} точны. Ряд для каждого из остальных выписанных a_{nk} начинается с члена порядка e^k . Весьма вероятно, что это справедливо и в общем случае. Но доказать это нам пока не удалось.

Замечание 2. Функции Φ_n представлены рядами Фурье по эксцентрической аномалии, коэффициенты которых – ряды Маклорена по степеням эксцентриситета. Можно представить Φ_n рядами Маклорена по степеням e , коэффициенты которых – тригонометрические многочлены от E . Нетрудно перейти к тригонометрическим многочленам от средней аномалии. Но этого ни в коем случае делать не надо. Радиус сходимости рядов в первом случае равен единице, а во втором – пределу Лапласа 0.662743 [8, 9].

Замечание 3. К сожалению, в статье [7] допущена опечатка. В формулах (9) и (11) для u_1 и $\mathcal{F}u_1$ следует изменить знак. Опечатка повлекла ошибку в формуле (11) для v . Следует читать:

$$v = \frac{1}{\omega^2 a} \left\{ \left(\frac{2}{e} \cos E + \frac{1}{2} (2 - \cos 2E) + \frac{e}{12} (39 \cos E + \cos 3E) + \frac{e^2}{32} (52 - 50 \cos 2E - \cos 4E) + \frac{e^3}{960} (30 \cos E + 265 \cos 3E + 9 \cos 5E) + \frac{e^4}{1024} (16 - 44 \cos 2E - 59 \cos 4E - 4 \cos 6E) + \frac{e^5}{3584} (287 \cos E + 392 \cos 3E + 84 \cos 5E + 5 \cos 7E) \right) \mathfrak{Z} - \left(\frac{1}{e} \sin E - \frac{1}{2} \sin 2E + \frac{e}{8} (5 \sin E + \sin 3E) - \frac{e^2}{32} (12 \sin 2E + \sin 4E) - \frac{e^3}{1920} (990 \sin E - 215 \sin 3E - 21 \sin 5E) - \frac{e^4}{256} (5 \sin 2E + 12 \sin 4E + \sin 6E) - \frac{e^5}{107520} (735 \sin E - 5425 \sin 3E - 2037 \sin 5E - 165 \sin 7E) \right) \mathfrak{N} \right\}.$$

Смысл величин u_1 , $\mathcal{F}u_1$ и v см. в [7]. В настоящей статье, естественно, мы используем правильные формулы.

3. НОРМА СМЕЩЕНИЯ

Стандартной нормой для функций небесной механики служит среднеквадратичная норма по средней аномалии

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dM = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - e \cos E) f^2 dE. \quad (7)$$

Нормировка в (7) выбрана из условия $\|C\| = |C|$ для любой постоянной.

Из соотношений (1), (4), (5) следует

$$a^{-6}(\delta\mathbf{r})^2 = (\Phi_2^2 + \Phi_3^2)\mathfrak{Z}^2 + (\Phi_3^2 + \Phi_4^2)\mathfrak{N}^2 + \Phi_1^2 W^2 + 2(\Phi_2\Phi_3 + \Phi_4\Phi_5)\mathfrak{Z}\mathfrak{N}. \quad (8)$$

Интегрируя, получим

$$\varrho^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|\delta\mathbf{r}\|^2 = a^6 (A_1 \mathfrak{Z}^2 + A_2 \mathfrak{N}^2 + A_3 W^2). \quad (9)$$

Здесь

$$A_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\Phi_2^2 + \Phi_3^2) (1 - e \cos E) dE,$$

$$A_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\Phi_3^2 + \Phi_4^2) (1 - e \cos E) dE,$$

$$A_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1^2 (1 - e \cos E) dE.$$

Последнее слагаемое в (8) – нечетная функция E и исчезло после интегрирования. Величина A_3 вычислена в [6]. Найдем оставшиеся интегралы. При нечетном n

$$\begin{aligned} \Phi_n^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nk} a_{nm} \cos kE \cos mE = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nk} a_{nm} [\cos(k-m)E + \cos(k+m)E], \\ &\quad (1 - e \cos E) \Phi_n^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nk} a_{nm} [\cos(k-m)E + \cos(k+m)E] - \\ &\quad - \frac{e}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nk} a_{nm} [\cos(k-m-1)E + \cos(k-m+1)E + \\ &\quad + \cos(k+m-1)E + \cos(k+m+1)E]. \end{aligned} \quad (10)$$

Взятие интеграла равносильно оставлению в сумме (10) только постоянных слагаемых:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - e \cos E) \Phi_n^2 dE = \\ & = a_{n0}^2 - ea_{n0}a_{n1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk}^2 - ea_{nk}a_{n,k+1}). \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично при четном n

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - e \cos E) \Phi_n^2 dE = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk}^2 - ea_{nk}a_{n,k+1}). \quad (12)$$

Выведенные в предыдущем разделе свойства четности a_{nk} показывают, что величины A_n раскладываются по четным степеням e .

С помощью средств компьютерной алгебры получим

$$\begin{aligned} A_1 &= 16 - \frac{39}{8}e^2 + \frac{52505}{4608}e^4, \\ A_2 &= 1 - \frac{3}{32}e^4, \\ A_3 &= 1 - \frac{15}{32}e^2 + \frac{5}{16}e^4. \end{aligned} \quad (13)$$

Поправочные члены для A_1, A_2 имеют порядок e^6 , а формула для A_3 точна.

Установим некоторые свойства функций $A_n(e)$. Вычислим производные:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{de} &= \frac{52505}{1152}e \left(e^2 - \frac{39 \times 288}{52505} \right), \\ \frac{dA_2}{de} &= -\frac{3}{8}e^3, \\ \frac{dA_3}{de} &= \frac{5}{4}e \left(e^2 - \frac{3}{4} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

С помощью (13), (14) находим экстремумы $A_n(e)$ на отрезке $0 \leq e \leq 1$:

$$\begin{aligned} \min A_1(e) &= A_1 \left(\sqrt{\frac{11232}{52505}} \right) = 16 - \frac{27378}{52505} = 15.478564, \\ \min A_2(e) &= A_2(1) = \frac{29}{32} = 0.90625, \\ \min A_3(e) &= A_3 \left(\sqrt{\frac{3}{4}} \right) = \frac{211}{256} = 0.824219, \\ \max A_1(e) &= A_1(1) = 22 \frac{2393}{4608} = 22.519314, \\ \max A_2(e) &= A_2(0) = 1, \\ \max A_3(e) &= A_3(0) = 1. \end{aligned} \quad (15)$$

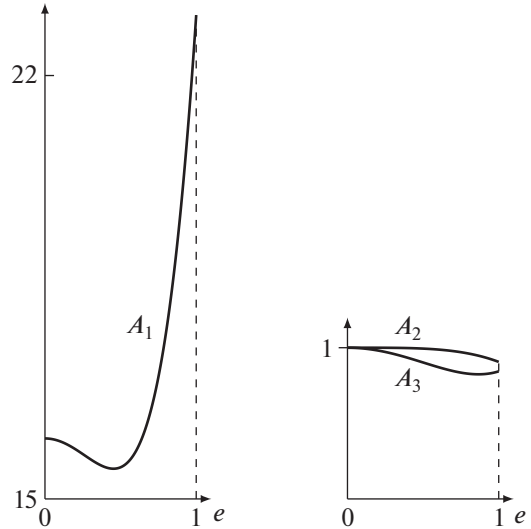


Рис. 1. Величины A_1, A_2, A_3 в зависимости от эксцентриситета e .

Из (15) следует, что $A_n(e)$ отделены от нуля. Легко показать также, что

$$A_1 > A_2 \geq A_3, \quad (16)$$

причем равенство достигается только при $e = 0$. Графики функций $A_n(e)$ приведены на рис. 1.

Отметим, что, как и в системе \mathbb{O}_1 [6], ϱ зависит только от компонент вектора возмущающего ускорения, большой полуоси и эксцентриситета оскулирующего эллипса. От ориентации орбиты ϱ не зависит. Сингулярности при $e = 0$ и $\sin i = 0$ отсутствуют.

Простая формула (9) позволяет легко найти наибольшее значение ϱ для данной орбиты, если о возмущающем ускорении известно лишь, что вектор \mathbf{F} находится внутри некоторого эллипсоида, ориентированного вдоль осей сопутствующей системы координат \mathbb{O}_2 ,

$$\frac{\mathfrak{X}^2}{b_1^2} + \frac{\mathfrak{Y}^2}{b_2^2} + \frac{W^2}{b_3^2} \leq 1, \quad (17)$$

при некоторых неотрицательных b_n . Действительно, квадратичная форма (9) при условии (17) экстремальна при обращении в нуль двух из трех компонент вектора $\mathbf{F}(\chi^2 \mathfrak{X}, \chi^2 \mathfrak{Y}, \chi^2 W)$. Поэтому

$$\max \varrho^2 = a^6 \max_n \{A_n b_n^2\}. \quad (18)$$

Пусть одна из величин b_n равна нулю. Например, пусть $b_1 = 0$. Это означает, что эллипсоид вырождается в эллипс, то есть $\mathfrak{X} = 0$. Формула (18) сохраняет силу, причем наибольшее значение ищется на множестве $n \in \{2, 3\}$.

Пусть две из величин b_n равны нулю. Например, пусть $b_1 = b_2 = 0$. Это означает, что эллипсоид вырождается в отрезок, то есть $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = 0$. Формула (18) переходит в

$$\varrho^2 = a^6 A_3 b_3^2.$$

Пусть $b_1 = b_2 = b_3 = b \neq 0$. Это равносильно фиксации модуля возмущающего ускорения $F = \kappa^2 b = \kappa^2 \sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + W^2}$. Формула (18) принимает вид

$$\max \varrho^2 = a^6 b^2 \max \{A_1, A_2, A_3\}. \quad (19)$$

Из (16), (19) следует

$$\max \varrho = a^3 b \sqrt{A_1(e)} \leq a^3 b \sqrt{A_1(1)} = 4.745452 a^3 b.$$

В заключение сравним полученные результаты с аналогичными для нормы смещения в задаче с возмущающим ускорением, постоянным в системе отсчета \mathbb{O}_1 , связанной с радиусом-вектором [6]. Как уже отмечалось, формулы главного результата (9) идентичны с точностью до замены компонент возмущающего ускорения. Функции $A_n(e)$ в обоих случаях – ряды по четным степеням эксцентриситета. При $n = 3$ они совпадают, являясь многочленами четвертой степени. Так и должно быть, поскольку они отвечают одинаковой компоненте W возмущающего ускорения. При $n = 1$ и $n = 2$ в системе \mathbb{O}_1 функции $A_n(e)$ являются многочленами шестой степени, тогда как в системе \mathbb{O}_2 – бесконечными рядами. Одинаковы лишь их свободные члены, как и должно быть, поскольку при нулевом эксцентриситете триэдры

систем \mathbb{O}_1 и \mathbb{O}_2 совпадают с точностью до направлений и нумерации.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 18-12-00050).

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны анонимному рецензенту за ценные замечания, учтенные в окончательной редакции рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д. Брауер, Дж. Клеменс, *Методы небесной механики* (М.: Мир, 1964).
2. В. М. Волосов, Б. И. Моргунов, *Методы осреднения в теории нелинейных колебательных систем* (М.: Наука, 1971).
3. Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов, *Новые качественные методы небесной механики* (М.: Наука, 1971).
4. Г. Е. О. Джакаля, *Методы теории возмущений для нелинейных систем* (М.: Наука, 1979).
5. А. Морбиделли, *Современная небесная механика* (Москва, Ижевск: ИКИ, 2014).
6. Н. Батмунх, Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников, В. Ш. Шайдулин, *Астрон. журн.* **93**, 331 (2016).
7. Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников, *Астрон. журн.* **91**, 1060 (2014).
8. М. Ф. Субботин, *Введение в теоретическую астрономию* (М.: Наука, 1968).
9. А. Уинтнер, *Аналитические основы небесной механики* (М.: Наука, 1967).