

УДК 524.882

НАБЛЮДЕНИЯ ТЕНЕЙ ЧЕРНЫХ ДЫР С ПОМОЩЬЮ НАЗЕМНО-КОСМИЧЕСКИХ ИНТЕРФЕРОМЕТРОВ

© 2020 г. Е. В. Михеева^{1,*}, С. В. Репин^{1,**}, В. Н. Лукаш^{1,***}

¹ Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

*E-mail: helen@asc.rssi.ru

**E-mail: sergerepin1@gmail.com

***E-mail: lukash@asc.rssi.ru

Поступила в редакцию 25.12.2019 г.

После доработки 12.03.2020 г.

Принята к публикации 30.03.2020 г.

В статье рассматриваются изображения теней черных дыр (ЧД), которые могут быть восстановлены путем обработки наблюдательных данных планируемых проектов по радиоинтерферометрии со сверхбольшими базами (РСДБ). Для радиоисточников — керровских ЧД с массами и координатами SgrA*, M87* и M31*, подсвеченных находящимися за ними источниками света, мы рассмотрели три типа наблюдений: наземный интерферометр (подобный Телескопу Горизонта Событий), наземно-космический интерферометр, космическое плечо которого обеспечено искусственным спутником Земли на геоцентрической орбите, и наземно-космический интерферометр со спутником в точке Лагранжа L_2 . Значительное различие между восстановленными изображениями для наземного и наземно-космического радиоинтерферометра со спутником на геоцентрической орбите обусловлено как увеличением проекции базы, так и улучшением покрытия (u, v) -плоскости. Околоземные конфигурации радиоинтерферометра для наблюдения теней ЧД являются наиболее предпочтительными среди рассмотренных случаев. При дальнейшем увеличении высоты орбиты до точки L_2 плотность заполнения (u, v) -плоскости понижается, и результаты становятся менее представительными. Представлены модельные изображения для всех рассмотренных случаев.

DOI: 10.31857/S000462992008006X

1. ВВЕДЕНИЕ

В наше время наблюдения теней ЧД являются одной из самых острых проблем астрофизики (см. [1–3]). Успехом стали недавно проведенные Телескопом Горизонт Событий (ТГС)¹ наблюдения тени ЧД, расположенной в ядре галактики M87 [4–9]. Полученные изображения наглядно демонстрируют исключительные возможности современных инструментов. Вместе с тем прогресс в области изучения ЧД и их ближайших окрестностей требует продолжения работ — наблюдений ЧД в других радиоисточниках и на других (более высоких) частотах.

В настоящее время, когда интерферометрия ЧД развивается очень быстро, для обозначения изображения ЧД используют термины “тень”, “силуэт” и “фотонное кольцо” (впервые термин был использован в [10]). Иногда их смысл разделяют, но часто смешивают. Так, в [11] используется термин “силуэт”, под которым понимается изображение горизонта событий ЧД, в [12] ис-

пользуется термин “тень”, которым обозначается изображение фотонной сферы ($r = 3GM$ для невращающейся ЧД). В англоязычной литературе эти термины зачастую смешиваются. Авторы следуют этой практике и называют тенью ЧД ее изображение для конкретной используемой модели, не детализируя, что является границей тени. Изображение ЧД зависит как от ее массы и вращения, так и от свойств источника, подсвечивающего ЧД (диск, джет, яркое пятно и др.). Некоторые аспекты определения тени ЧД в Общей теории относительности (ОТО) и расширенных теориях гравитации были затронуты в [13] (см. также ссылки в этой работе), а также в статьях [14–18].

Однако независимо от определения тени ЧД имеют очень малые угловые размеры даже для самых близких ЧД. Это означает, что методы РСДБ должны играть ключевую роль в наблюдении этих теней. Важными параметрами также являются величина проекции базы и частота, на которой работает приемная аппаратура. Наземные интерферометры ограничены диаметром Земли, так что проекция базы не может превышать 12 800 км.

¹ <http://eventhorizontelescope.org>

Однако интерферометр, расположенный на Земле, относительно прост в контроле, ремонте, обслуживании и сборе/передаче данных. Идея большого наземного интерферометра была реализована в виде ТГС, которому удалось провести первые наблюдения тени ЧД на частоте 230 ГГц.

Угловое разрешение интерферометра может быть улучшено как увеличением базы, так и переходом к более высоким частотам наблюдений. Таким образом, представляется весьма продуктивной идея построить интерферометр с экстремально большой базой [19–21]. С более детальным рассмотрением возможных орбит спутников можно ознакомиться в [22–24]. Угловое разрешение такого интерферометра может в тысячи раз превысить разрешение самых больших наземных интерферометров. Однако в случае если такая миссия и будет когда-либо реализована, она окажется очень дорогостоящей, а ее техническое обеспечение едва ли может быть реализовано так же просто, как в случае наземных антенн. В дополнение к техническим и финансовым проблемам ожидаются большие сложности с заполнением (u, v) -плоскости. В наземных наблюдениях можно достичь относительно однородного покрытия (u, v) -плоскости, потому что общая конфигурация треков индивидуальных телескопов интерферометра практически повторяется каждые сутки, в то время как при наблюдениях на наземно-космическом интерферометре, особенно при больших проекциях базы, охват, как ожидается, будет довольно неоднородным. Это приводит к дополнительным трудностям при обработке наблюдательных данных.

Тем не менее идея наземно-космического интерферометра очень заманчива, и в последний год особенно широко обсуждается (см., напр., [22–24]). Она может быть реализована в будущих космических проектах. Один из них – космический проект “Миллиметронтрон” [25] с охлаждаемым 10-м зеркалом, который предназначен для работы в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах, и запуск которого запланирован на конец 20-х годов. Угловое разрешение этого прибора в режиме интерферометра, как ожидается, должно быть настолько высоким, что мы, в принципе, сможем наблюдать тени ЧД во многих галактиках. Однако есть причины, которые могут заметно сказаться на этой идеальной картине. Это могут быть ограничения по чувствительности прибора, эффекты рассеяния излучения вследствие неоднородностей плазмы и т.д. Кроме того, все эти эффекты сильно зависят от частоты. В данной статье мы сосредоточимся на фундаментальной возможности наблюдения за тенью ЧД и пренебрегаем нюансами, связанными с характеристиками конкретных инструментов и/или объектов. Предварительный каталог сверхмассивных ЧД, в

котором учтены предполагаемые наблюдательные возможности “Миллиметронтрона”, можно найти в работе [26], которая, в свою очередь, основана на расширенном каталоге, опубликованном в [27].

Интерпретация интерферометрических наблюдений тени ЧД требует моделирования ожидаемого изображения. Эта проблема, в свою очередь, требует больших усилий по разработке моделей источника излучения. Как показано во многих работах [2, 28–36], изображение в значительной степени зависит от окружения ЧД, т.е. от структуры аккреционного диска, зависимости его температуры от радиальной координаты, от существования релятивистского плазменного джета и др. Также необходимо учитывать излучение короны, геометрию магнитного поля, присутствие синхротронного излучения и многое другое. Кроме того, изображение зависит и от межзвездного рассеяния [37, 38]. В нашем моделировании мы не принимаем во внимание все эти эффекты и используем самую простую модель изображения тени, которая зависит только от массы и спина ЧД и источника фотонов – яркой плоскости, находящейся за ЧД. Тем не менее это позволяет нам выявить характерные черты существующих и ожидаемых результатов наблюдений наземного и наземно-космического интерферометров. Мы рассматриваем не изображение реального источника, SgrA* (или M87*, M31*), а модель тени ЧД того же углового масштаба.

Недавнее наблюдение тени ЧД было получено с помощью наземного интерферометра. Это означает, что нам необходимо изучить перспективы будущих исследований ЧД. Наиболее очевидный способ сделать это – объединить опыт ТГС и проекта “РадиоАстрон” [39] в будущих космических экспериментах. В работе мы сравниваем изображения теней ЧД, которые могут быть получены интерферометрами в различных конфигурациях.

Основной целью этой работы является обсуждение предпочтительной спутниковой орбиты, которая позволит быстро получить изображение тени ЧД с высоким разрешением. Такое высококачественное изображение способно дать важную информацию о физических процессах в непосредственной близости от сверхмассивных ЧД (по строению внутренней части диска и основанию джета), расположенных в центрах галактик. Изображение тени также может быть использовано для проверки ОТО в сильном гравитационном поле. Мы не обсуждаем технические проблемы интерферометрии и оставляем их решение на усмотрение специалистов по РСДБ.

2. МОДЕЛЬ ТЕНИ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Мы рассматриваем вращающуюся ЧД и ее тень, или силуэт, с простой геометрией источника фотонов. Мы предполагаем, что ЧД описывается метрикой Керра и ее спин близок к максимальному, $a = 0.9981$ (безразмерный параметр, описывающий отношение момента вращения ЧД к ее массе). Ось вращения перпендикулярна лучу зрения (см. рис. 1). За ЧД расположен яркий плоский экран, который равномерно излучает кванты в полусферу (в телесный угол 2π). Если плоскость экрана перпендикулярна лучу зрения, то силуэт ЧД выглядит так, как показано² на рис. 2. Похожее изображение может появиться, если ЧД звездной массы вращается вокруг звезды — красного гиганта и проходит перед звездой.

Для построения фотонных траекторий были решены уравнения движения в рамках ОТО для каждого фотона. С системой из шести обычных дифференциальных уравнений можно ознакомиться в [40, 41]. Программы, позволяющие решать такие системы дифференциальных уравнений, входят во многие стандартные пакеты и общедоступны³ [42, 43]. Полученное изображение учитывает траектории примерно 10 млн квантов.

Это изображение имеет ряд характерных особенностей: оно асимметрично, его яркость неоднородна, и оно включает тонкие дуги, образованные фотонами, которые пришли к наблюдателю после нескольких оборотов вокруг ЧД. На рисунке ясно видны фотонные дуги справа, дуги слева также присутствуют, однако они не могут быть адекватно отображены, так как их ширина намного меньше, чем размер пикселя. Ширина дуг справа всего в 17–18 раз меньше диаметра тени. Таким образом, мы рассматриваем изображение тени ЧД, которое имеет достаточно мелкие детали. Конечно, изображение таких маленьких и тусклых деталей будет, по-видимому, размыто рассеянием, но этот факт будет рассмотрен ниже (см. раздел “Выводы”).

Мы полагаем, что ось вращения ЧД в центре Млечного Пути перпендикулярна галактической плоскости и совпадает с осью вращения галактики. Это значит, что мы знаем ее ориентацию на небесной сфере. Что касается M87 и M31, то их оси вращения и оси вращения ЧД пока известны с большой неопределенностью, поэтому мы предположили, что их оси вращения ориентированы вдоль оси склонений. Наконец, мы считаем источники стационарными.

² Если бы ЧД облучалась с телесного угла 4π , изображение тени выглядело бы иначе: широкое темное кольцо между узкими фотонными дугами и контрастным краем (красное кольцо в цветовой системе рис. 2) было бы светлым.

³ <https://www.mcs.anl.gov/petsc/>

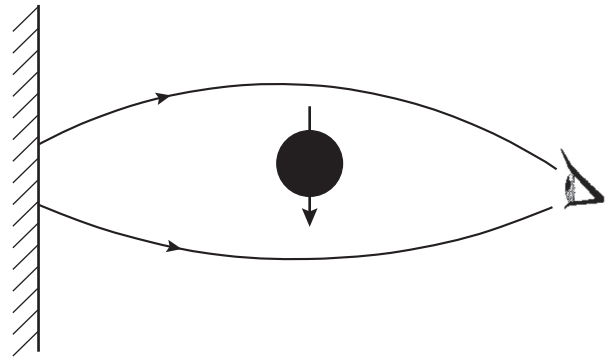


Рис. 1. Взаимное расположение излучающей поверхности, ЧД и наблюдателя. Луч зрения перпендикулярен плоскости излучающего экрана и оси вращения ЧД.

3. ИЗОБРАЖЕНИЯ ТЕНЕЙ ЧЕРНЫХ ДЫР

Для реконструкции изображений мы использовали хорошо известный метод CLEAN [44, 45]. Этот алгоритм широко используется в астрофизике и позволяет извлекать изображение из коэффициентов Фурье, определенных на конечном числе точек (u, v) -плоскости (что подразумевает процедуру сглаживания). С математической точки зрения, мы имеем дело с некорректной задачей, так как покрытие (u, v) -плоскости является неполным. Как было показано, например, в [7], изображения теней ЧД имеют некоторые различия при использовании разных методов восстановления изображений и их реализаций. Тем не менее морфология изображений остается неизменной. В данной работе мы также сфокусируемся на морфологии изображений и не рассматриваем особенности, которые могут быть связаны с использованием конкретной процедуры восстановления изображения или с его исходной моделью. Мы полагаем, что метод CLEAN действительно дает общее представление об изображении тени ЧД.

3.1. Наземный интерферометр

Прежде всего рассмотрим реконструированное изображение, которое может быть получено при наземных интерферометрических наблюдениях, подобных тем, что проводятся на ТГС. Сутьное покрытие (u, v) -плоскости для SgrA* показано на верхней панели слева на рис. 3. Покрытие, показанное на рисунке, является примером и не совпадает с реальным наблюдательным сетом ТГС. Максимальное значение проекции базы здесь порядка $0.8R_{\oplus}$. Для других объектов (u, v) -плоскости выглядят иначе из-за других координат

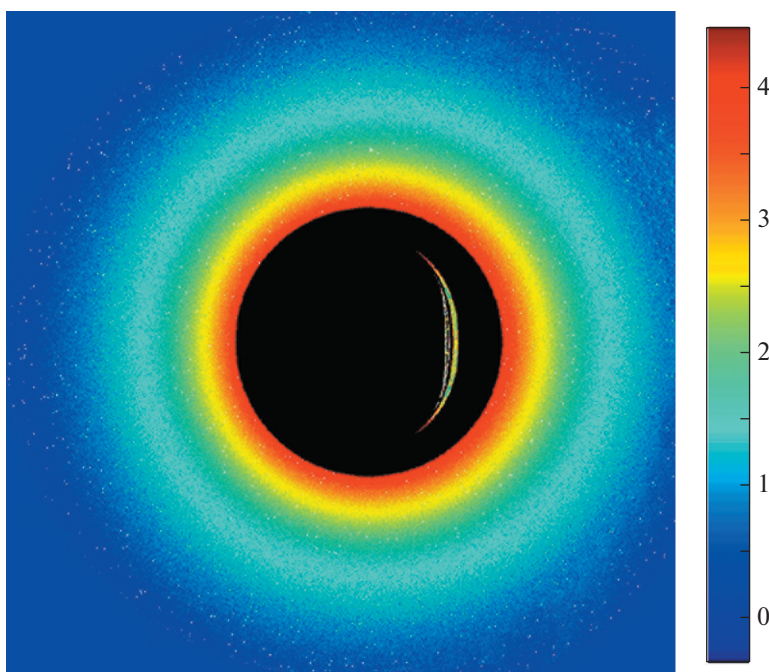


Рис. 2. Тень кервской ЧД на фоне плоского светящегося экрана, перпендикулярного лучу зрения удаленного наблюдателя. Ось вращения ЧД также перпендикулярна лучу зрения. Интенсивность представлена в логарифмической шкале и нормирована на яркость излучающего фотоны экрана.

нат ЧД, но общий вид покрытия остается. Как видно из рисунка, покрытие достаточно плотное и однородное.

Три другие части рис. 3 представляют собой изображения тени ЧД, представленной на рис. 2, как она наблюдается на частоте 240 GHz и реконструируется при помощи процедуры CLEAN для положений и масс SgrA*, M87* и M31*. Как видно из рисунка, разрешение изображений невысокое, но можно выделить некоторые характерные детали, особенно для SgrA*. Например, в правом верхнем углу есть яркая деталь, которая может быть интерпретирована как узкий полумесяц, который также можно найти на первичном изображении. На восстановленных изображениях других моделей ЧД (нижняя панель рис. 3) тень не видна. Асимметрия и неоднородность изображения являются артефактом процедуры обработки данных.

3.2. Интерферометр со спутником на низкой орбите

Низкоорбитальный интерферометр подразумевает, что спутник находится на геоцентрической орбите высотой от 200–300 км до геостационарной. Средний радиус, таким образом, составляет $(2-3)R_{\oplus}$. В зависимости от радиуса спутник будет совершать от 1 до 16 оборотов вокруг Земли за сутки. В нашем моделировании радиус орбиты

близок к $2R_{\oplus}$. Суточное покрытие (u, v) -плоскости для SgrA* показано на верхней панели слева на рис. 4. Треки наземных телескопов представлены также на рис. 4, они такие же, как на рис. 3, но в уменьшенном масштабе. Как уже было сказано выше, общий вид покрытия примерно одинаков для M87* и M31*.

Изображения объектов, восстановленных методом CLEAN, представлены на трех остальных частях рис. 4. На верхней панели справа расположено изображение SgrA*. По сравнению с рис. 3 оно содержит много ранее отсутствовавших деталей. Вверху справа во внутренней темной области можно увидеть яркую дугу, соответствующую аналогичной детали исходного изображения на рис. 2. Более того, мы даже можем предположить, что это изображение повернуто под некоторым углом по сравнению с рис. 2, и измерить этот угол, определив ориентацию оси вращения ЧД. Это значит, что угловое разрешение в данном случае настолько высоко, что после обработки изображения можно детально изучить параметры ЧД и его окружения. Яркий круг также имеет неоднородное распределение интенсивности, и положение его максимума совпадает с максимумом внутреннего полумесяца.

Изображения теней M87* и M31* в нижней части рис. 4 также имеют дополнительные характерные особенности. Ясно видно, что интенсивность яркого кольца неоднородна, и эта неодно-

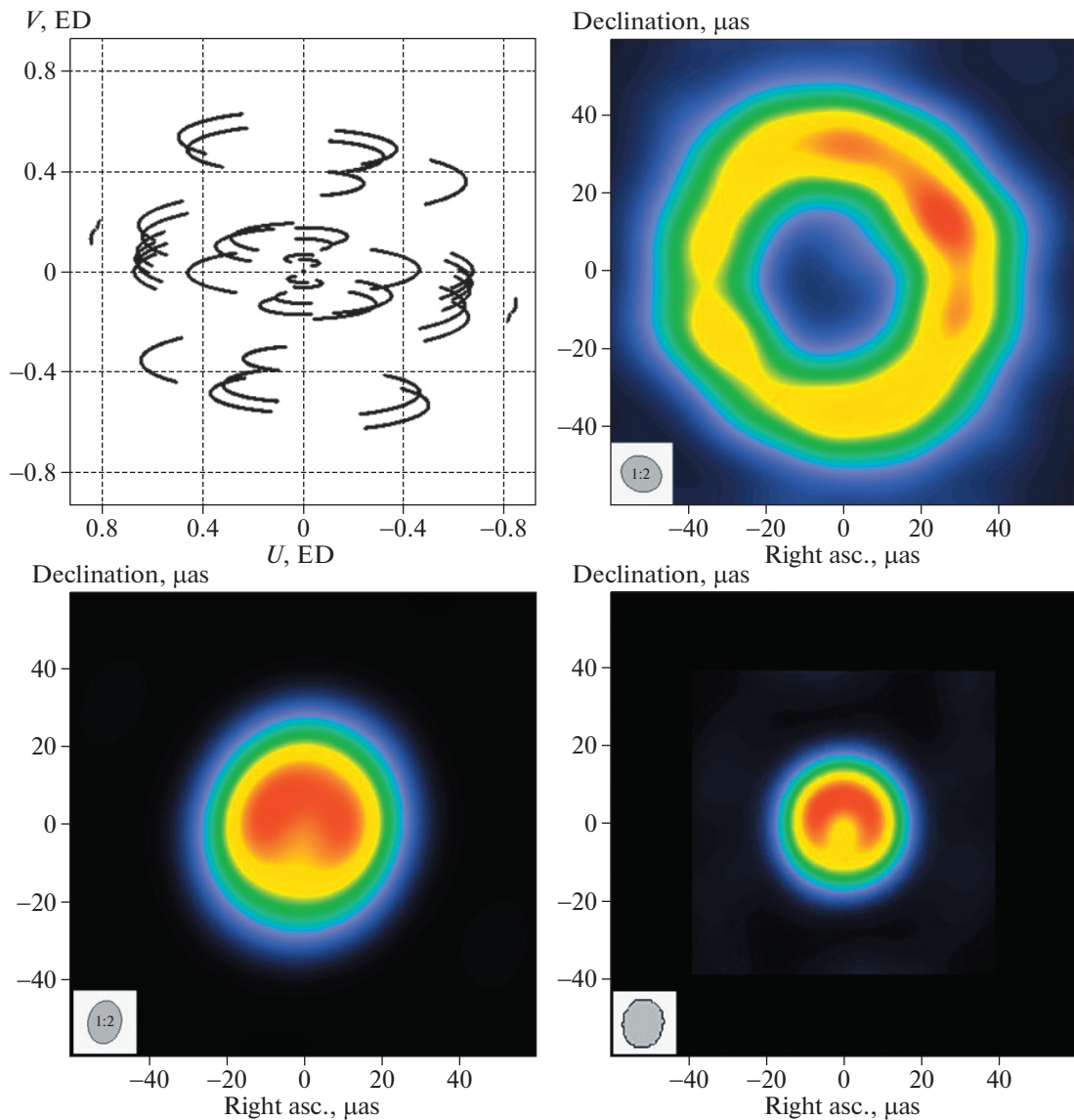


Рис. 3. Модельное изображение тени ЧД с массой SgrA* (вверху справа), M87* (внизу слева) и M31* (внизу справа), восстановленные при обработке данных наземных интерферометрических наблюдений. Соответствующее покрытие (u, v) -плоскости (вверху слева) представлено для SgrA*. Изображения даны в условных цветах.

родность (согласно модели) несет в себе важную информацию об ориентации оси вращения ЧД. Более высокое угловое разрешение приводит к тому, что и диапазон интенсивности в изображениях, и градиенты интенсивности значительно выше, чем на рис. 3.

Сравнение изображений на рис. 3 и 4 позволяет сделать вывод, что реализуемый низкоорбитальный космический наземный интерферометр может дать нам гораздо больше информации о ЧД, чем наблюдения только на наземных интерферометрах.

3.3. Интерферометр со спутником в точке Лагранже L_2

Следующим шагом в увеличении базы может быть размещение спутника с радиотелескопом в точке Лагранжа L_2 , как это планируется в космической обсерватории “Миллиметрон”. Предположим, что после того, как спутник достигнет этой точки, он будет оставаться там в течение всего времени проведения эксперимента. С локализацией в точке L_2 база интерферометра может быть действительно огромной, а ее проекция для наблюдения некоторых источников может превысить $100R_{\oplus}$. Однако покрытие (u, v) -плоскости

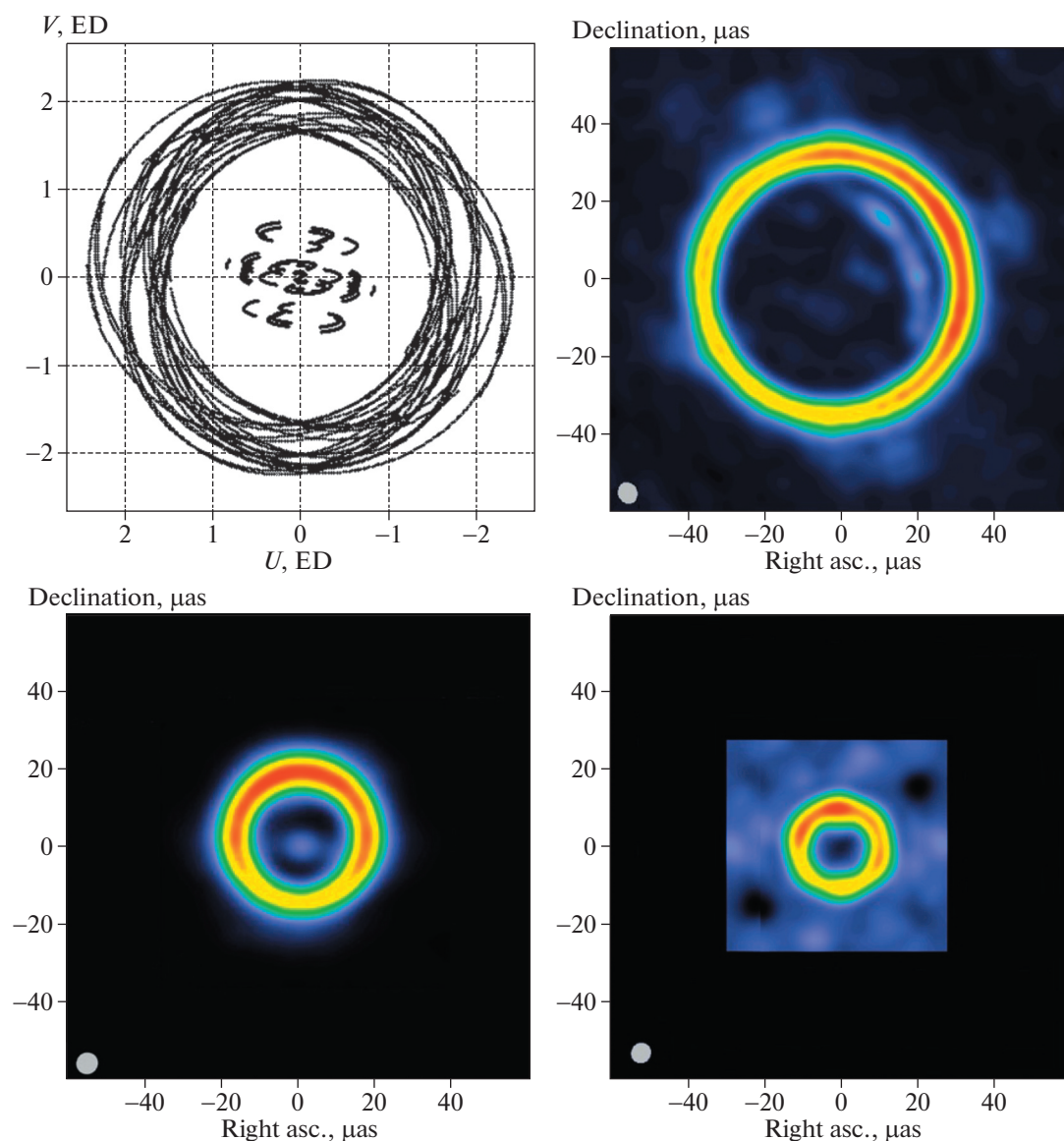


Рис. 4. Модельное изображение тени ЧД для SgrA* (вверху справа), M87* (внизу слева) и M31* (внизу справа), восстановленные по наблюдательным данным, полученным на наземно-космическом интерферометре со спутником на низкой геоцентрической орбите. Покрытие (u, v) -плоскости (вверху слева) представлено для SgrA*. Изображения даны в условных цветах.

становится вырожденным. Кроме того, за пять лет эксперимента можно надеяться только на единичное наблюдение за конкретным объектом.

Как и ранее, покрытие (u, v) -плоскости в данном случае для Sgr A* показано на верхней панели слева на рис. 5. Треки наземных антенн не могут быть показаны надлежащим образом из-за масштаба рис. 5, хотя они там действительно присутствуют. Также они показаны на вставке. Необходимо отметить, что низкоорбитальный – второй – спутник здесь отсутствует. Другие части

рис. 5 демонстрируют восстановленные изображения ЧД с координатами SgrA*, M87* и M31*.

Угловое разрешение в случае такой конфигурации интерферометра очень высокое, но из-за очень плохого покрытия (u, v) -плоскости восстановленное изображение тени ЧД выглядит хуже, чем на рис. 4. Основная причина заключается в том, что такое покрытие (u, v) -плоскости не позволяет надежно восстановить исходное изображение.

Яркое фотонное кольцо легко различить на изображении модели тени ЧД с координатами

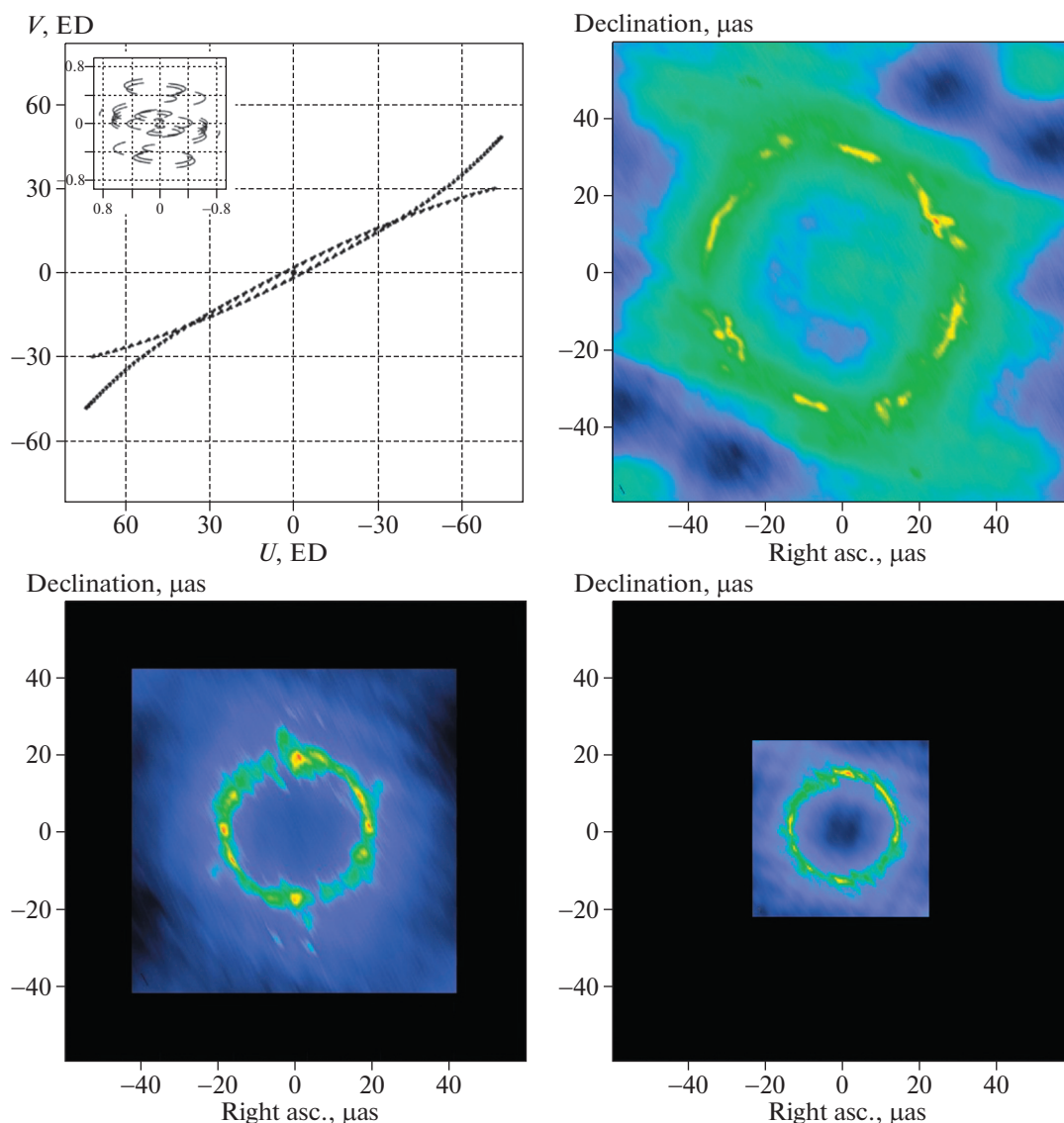


Рис. 5. Модельные изображения теней черных дыр для SgrA* (сверху справа), M87* (снизу слева) и M31* (снизу справа), восстановленные из интерферометрических наблюдений с участием спутника на высокой орбите (расположенного в точке Лагранжа L_2). Покрытие (u, v) -плоскости (вверху слева) представлено только для SgrA*. Изображения даны в условных цветах.

SgrA*, но, несмотря на очень высокое угловое разрешение, узкие детали внутреннего полумесяца полностью потеряны, поэтому любая информация об ориентации оси вращения ЧД также теряется. Распределение интенсивности вдоль кольца выглядит равномерно, в отличие от рис. 4.

Анализ изображений рассмотренной модели тени ЧД с координатами M87* и M31* демонстрирует те же особенности. Можно сделать вывод только о том, что определенно наблюдается некая кольцевидная структура. Край тени в M87* также не раскрывает никаких характерных деталей, которые позволили бы установить направление углового момента.

4. ВЫВОДЫ

По результатам работы мы можем сделать вывод, что интерферометр, который включает в себя как наземные телескопы, так и низкоорбитальный спутник, имеет преимущество по сравнению с другими рассмотренными случаями. Ключевую роль здесь играет способность заполнить (u, v) -плоскость достаточно плотно за относительно короткое время (день или неделю). Интерферометр с низко-орбитальным спутником действительно способен успешно решить эту задачу, потому что достаточное покрытие (u, v) -плоскости можно получить менее, чем за неделю. Более то-

го, если орбита имеет высоту 300–400 км, то полный оборот совершается примерно за 1.5 часа, и после 5–7 витков покрытие (u, v) -плоскости становится достаточно плотным. В этом случае процедура наблюдения может длиться всего около 10 ч и, в принципе, мы можем получать изображения тени ЧД удовлетворительного качества и с хорошим разрешением дважды в сутки. Спутник на орбите с $R \sim 2R_{\odot}$ имеет примерно в три раза больший орбитальный период, поэтому аналогичное покрытие (u, v) -плоскости будет достигнуто примерно через день (см. рис. 4). Одновременное использование двух или трех спутников может дополнительно уменьшить это время.

Наземные интерферометры имеют достаточное покрытие (u, v) -плоскости, однако большая часть объектов не может наблюдаться целый день, потому что в течение некоторого времени они находятся под горизонтом. В эти периоды покрытие, безусловно, останавливается, и, таким образом, мы получаем треки, похожие на половину эллипса (см. рис. 3). Очевидно, однако, что большое преимущество наземных приборов — это их более низкая стоимость.

Чем больше база интерферометра, тем сложнее корреляционный процесс. В частности, это связано с трудностями синхронизации наземных и бортовых часов. Это значит, что наземно-космический интерферометр должен иметь гораздо более сложное оборудование, чем наземный инструмент.

Случай интерферометра со спутником на высокой орбите отличается от других. Действительно, его угловое разрешение невероятно высокое. Теоретически, оно настолько высоко, что мы сможем увидеть фотонные дуги внутри изображения тени на рис. 2 по отдельности, т.е. разрешение может быть даже лучше, чем на нашей иллюстрации. Однако здесь мы сталкиваемся с проблемой плохого покрытия (u, v) -плоскости. Дело в том, что информация, полученная при интерферометрическом наблюдении, не является изображением самого объекта. Это Фурье-образ истинного изображения, измеренный на ограниченном числе точек (u, v) -плоскости. Надежное восстановление изображения возможно только при достаточно плотном покрытии (u, v) -плоскости. Один оборот вокруг Земли спутника, находящегося в L_2 , занимает целый год. И даже увеличение продолжительности наблюдений не окажет радикального влияния на покрытие (u, v) -плоскости. Спутник, движущийся на орбите вблизи точки L_2 , каждый год почти повторяет свой трек на (u, v) -плоскости. Его смещение выше и ниже плоскости эклиптики лишь незначительно увеличивает зону покрытия.

Другая интересная идея состоит в том, чтобы построить радиотелескоп на Луне [21]. Орбитальный период естественного спутника Земли составляет около месяца, поэтому трети или половины года (несколько оборотов) достаточно, чтобы покрыть (u, v) -плоскость. В любом случае, это намного меньше, чем требуется для спутника, расположенного в L_2 . Однако для реализации такого грандиозного проекта еще предстоит решить множество технических проблем.

В настоящее время осуществлены только два успешных проекта с использованием космического РСДБ: VSOP [46] и “Радиоастрон” [39]. Оба были оснащены приемниками в сантиметровом диапазоне длин волн, это означает, что у нас еще не хватает опыта реализации таких проектов.

Долгожданное наблюдение тени ЧД с помощью ТГС является первым шагом к тестированию ОТО в сильных гравитационных полях. Тем не менее было установлено, что количественные характеристики полученного изображения недостаточны для того, чтобы различать свойства ЧД в разных теориях гравитации. Таким образом, необходима большая осторожность при интерпретации изображений ЧД при тестировании ОТО [47]. И так как тень ЧД может быть измерена точнее с помощью наземно-космического интерферометра, чем при помощи наземного, космические миссии РСДБ действительно позволят провести более сильные тесты ОТО и моделей аккреции.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа была выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 19-02-00199) и проекта КП 19-270 РАН “Вопросы происхождения и эволюции Вселенной с использованием методов наземных наблюдений и космических исследований”.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность А. Андреанову за любезную помощь в подготовке изображений теней ЧД и многочисленные полезные обсуждения. Мы благодарны В.Н. Строкову, И.Н. Пашенко за помощь с подготовкой рукописи. Мы также благодарны В.И. Костенко и С.Ф. Лихачеву за их помощь и дискуссии. Один из авторов (С.Р.) выражает особую благодарность О. Суменковой, Р. Бересневой и О. Косаревой за возможность плодотворной работы над этой задачей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *H. Falcke*, *J. Physics: Conference Series* **942**, id. 012001 (2017).
2. *J.-P. Luminet*, arXiv:1804.03909v1 (2018).

3. *S. Nampalliwar and C. Bambi*, Tutorial Guide to X-ray and Gamma-ray Astronomy: Data Reduction and Analysis, edited by C. Bambi (Singapore: Springer, 2019) (arXiv:1810.07041v3).
4. *Event Horizon Telescope Collaboration: K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef, K. Asada, et al.*, *Astrophys. J.* **875**, id. L1 (2019).
5. *Event Horizon Telescope Collaboration: K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef, K. Asada, et al.*, *Astrophys. J.* **875**, id. L2 (2019).
6. *Event Horizon Telescope Collaboration: K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef, K. Asada, et al.*, *Astrophys. J.* **875**, id. L3 (2019).
7. *Event Horizon Telescope Collaboration: K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef, K. Asada, et al.*, *Astrophys. J.* **875**, id. L4 (2019).
8. *Event Horizon Telescope Collaboration: K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef, K. Asada, et al.*, *Astrophys. J.* **875**, id. L5 (2019).
9. *Event Horizon Telescope Collaboration: K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef, K. Asada, et al.*, *Astrophys. J.* **875**, id. L6 (2019).
10. *M. D. Johnson, A. Lupsasca, A. Strominger, G. N. Wong, et al.*, arXiv:1907.04329v2.
11. *V. I. Dokuchaev, N. O. Nazarova, and V. P. Smirnov*, *General Relativ. and Gravit.* **51**, id. 81 (2019).
12. *V. Perlick, O. Yu. Tsupko, and G. S. Bisnovatyi-Kogan*, *Phys. Rev. D* **92**, id. 104031 (2015).
13. *A. F. Zakharov*, *Phys. Rev. D* **90**, id. 062007 (2014).
14. *A. F. Zakharov*, *Intern. J. Modern Physics D* **27**, id. 1841009 (2018).
15. *V. Perlick, O. Yu. Tsupko, and G. S. Bisnovatyi-Kogan*, *Phys. Rev. D* **97**, id. 104062 (2018).
16. *C. O. Алексеев, Б. Н. Латош, В. А. Прокопов, Е. Д. Емцова*, *ЖЭТФ* **155**(5), 847 (2019).
17. *V. I. Dokuchaev and N. O. Nazarova*, arXiv:1911.07695v2 (2020).
18. *S. O. Alexeyev and V. A. Prokopov*, arXiv:2001.09272 [gr-qc] (2020).
19. *L. I. Matveenko, N. S. Kardashev, and G. B. Sholomitskii*, *Radiophysics and Quantum Electronics* **8**, 461 (1965).
20. *F. Roelofs, H. Falcke, C. Brinkerink, and M. Moscibrodzka*, *Astron. and Astrophys.* **625**, id. A124 (2019).
21. *T. An, X. Hong, W. Zheng, S. Ye, et al.*, *Adv. Space Res.* **65**(2), 850 (2020).
22. *V. L. Fish, M. Shea, and K. Akiyama*, *Adv. Space Res.* **65**(2), 821 (2020).
23. *T. Kawashima, M. Kino, and K. Akiyama*, *Astrophys. J.* **878**(1), id. 27 (2019).
24. *D. C. M. Palumbo, S. S. Doeleman, M. D. Johnson, K. L. Bouman, and A. A. Chael*, *Astrophys. J.* **881**(1), id. 62 (2019).
25. *Н. С. Кардашев, И. Д. Новиков, В. Н. Лукаш, С. В. Пулипенко и др.*, *Успехи физ. наук* **184**, 1319 (2014).
26. *П. Б. Иванов, Е. В. Михеева, В. Н. Лукаш, А. М. Малиновский, С. В. Чернов, А. С. Андрианов, В. И. Костенко, С. Ф. Лихачёв*, *Успехи физ. наук* **189**, 449 (2019).
27. *Е. В. Михеева, В. Н. Лукаш, С. В. Репин, А. М. Малиновский*, *Астрон. журн.* **96**(4), 339 (2019) (arXiv:1811.00808).
28. *J.-P. Luminet*, *Astron. and Astrophys.* **75**, 228 (1979).
29. *H. Falcke, F. Melia, and E. Agol*, *Astrophys. J.* **528**, L13 (2000).
30. *J. Dexter, J.C. McKinney, and E. Agol*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **421**, 1517 (2012).
31. *L. Amarilla and E. F. Eiroa*, *14 Marcel Grossman Meeting* (Singapore: World Scientific, 2017), 3543.
32. *A. Abdujabbarov, M. Amir, B. Ahmedov, and S. G. Ghosh*, *Phys. Rev. D* **93**, id. 104004 (2016).
33. *A. E. Broderick, V. L. Fish, M. D. Johnson, K. Rosenfeld, et al.*, *Astrophys. J.* **820**(2), id. 137B (2016).
34. *M. Moscibrodzka, H. Falcke, and H. Shiokawa*, *Astron. and Astrophys.* **586**, id. A38 (2016).
35. *A. Neronov and I. Vovk*, *Phys. Rev. D* **93**, id. 023006 (2016).
36. *T. Johannsen, A. E. Broderick, P. M. Plewa, S. Chatzopoulos, et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **116**, id. 031101 (2016).
37. *Z. Zhu, M. D. Johnson, and R. Narayan*, *Astrophys. J.* **870**, id. 6 (2019).
38. *M. D. Johnson, R. Narayan, D. Psaltis, L. Blackburn, et al.*, *Astrophys. J.* **865**(2), id. 104 (2018).
39. *N. Kardashev, V. Khartov, V. Abramov, V. Yu. Avdeev, et al.*, *Astron. Rep.* **57**(3), 153 (2013).
40. *A. F. Zakharov and S. V. Repin*, *Astron. Rep.* **43**(11), 705 (1999).
41. *S. V. Repin, D. A. Kompaneets, I. D. Novikov, and V. A. Mityagina*, arXiv:1802.04667 [gr-qc] (2018).
42. *L. R. Petzold*, *SIAM J. Sci. Comp.* **4**(1), 136 (1983).
43. *S. Abhyankar, J. Brown, E. M. Constantinescu, D. Ghosh, B. F. Smith, and H. Zhang*, arXiv:1806.01437 [math.NA] (2018).
44. *J. A. Hogbom*, *Astron. and Astrophys. Suppl. Ser.* **15**, 417 (1974).
45. *U. J. Schwarz*, *Astron. and Astrophys.* **65**, 345 (1978).
46. *H. Hirabayashi, H. Hirosawa, H. Kobayashi, Y. Murata, et al.*, *Science* **281**(5384), 1825 (1998).
47. *Y. Mizuno, Z. Younsi, C. M. Fromm, and O. Porth*, *Nature Astron.* **2**, 585 (2018).