

УДК 521.1

УВОД АСТЕРОИДА С ПОМОЩЬЮ ДВИГАТЕЛЯ МАЛОЙ ТЯГИ, НАПРАВЛЕННОЙ ПО КАСАТЕЛЬНОЙ К ОРБИТЕ

© 2020 г. К. В. Холшевников^{1,2,*}, Д. В. Миланов^{1,**}, К. И. Оськина^{1,***}, В. Б. Титов^{1,****}

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

² Институт прикладной астрономии РАН, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: kvk@astro.spbu.ru

**E-mail: danila.milanov@gmail.com

***E-mail: zegzithsa@gmail.com

****E-mail: tit@astro.spbu.ru

Поступила в редакцию 08.05.2020 г.

После доработки 30.05.2020 г.

Принята к публикации 30.05.2020 г.

Рассмотрена задача увода опасного астероида с орбиты столкновения с Землей с помощью двигателя малой тяги, направленной по касательной к траектории. Двигатель может быть смонтирован на астероиде, или на “гравитационном тягаче”. Целью статьи является установление принципиальной возможности увода астероида на безопасное расстояние за время порядка месяца и года. Это приемлемо, поскольку падение астероида диаметром порядка 100 м сразу после его открытия маловероятно. Мы ограничились модельной постановкой задачи: двигатель обеспечивает постоянное касательное ускорение. Соответствующие уравнения типа Эйлера были нами преобразованы методом осреднения ранее. Здесь мы решили их методом рядов по степеням “медленного времени” и показали адекватность решения на временах в десятки лет. Оказалось, что астероиды до 55 м в диаметре можно увести за год при тяге двигателя в 1 Н. При тяге в 20 Н астероиды до 50 м в диаметре можно увести за месяц, а с диаметром до 150 м — за год. Увод более крупных астероидов требует больше времени или более мощных двигателей. Результаты сравнены с полученными ранее аналогичными данными для случая, когда возмущающее ускорение направлено по трансверсали. Во всех случаях касательная тяга приводит к лучшим результатам. Однако для орбит с эксцентриситетами до 0.4 оба варианта практически совпадают. Различие становится значимым при $e > 0.5$.

DOI: 10.31857/S0004629920100035

1. ВВЕДЕНИЕ

В статьях [1, 2] сформулирована задача о движении точки \mathcal{A} нулевой массы под действием притяжения к центральному телу \mathcal{S} и возмущающего ускорения \mathbf{P} , постоянного в одной из привилегированных системах отсчета. Здесь мы рассматриваем орбитальную систему \mathcal{O}_2 с ортами \mathbf{i}_2 , \mathbf{j}_2 , \mathbf{k}_2 . Орты направлены по касательной, главной нормали к оскулирующей орбите и бинормали (направленной по вектору площадей) соответственно. Отношение модулей возмущающего ускорения P и вызванного притяжением к центральному телу основного ускорения κ^2/r^2 считается малым, квадратом этой величины пренебрегается. Здесь κ^2 — произведение постоянной тяготения на массу \mathcal{S} , $r = |\mathbf{r}|$, $r = \mathcal{S}\mathcal{A}$. К уравнениям движения применено осредняющее преобразование. Найдены уравнения движения в средних

элементах и формулы перехода от оскулирующих элементов к средним.

В статье [3] осредненные уравнения проинтегрированы в квадратурах, если хотя бы один из трех компонентов $\mathfrak{Z} = P\mathbf{i}_2$, $\mathfrak{Y} = P\mathbf{j}_2$, $\mathfrak{W} = P\mathbf{k}_2$ вектора возмущающего ускорения \mathbf{P} равен нулю. Здесь мы применим эти результаты к задаче об уводе опасного астероида с орбиты столкновения с Землей с помощью двигателя малой тяги. Последний может быть установлен на астероиде, или на “гравитационном тягаче” [4]. Малая тяга позволяет сдвинуть астероид на приемлемое расстояние лишь за длительное время (годы, в лучшем случае месяцы). Это приемлемо, поскольку падение астероида диаметром порядка 100 м сразу после его открытия маловероятно. Заметим, что, к счастью, маловероятно само столкновение с Землей. Частота оценивается в одно событие за 200 лет [5–7]. Вероятность же столкновения сразу после открытия опасного объекта еще существен-

но ниже¹. В общем случае он несколько раз пролетает мимо Земли на близком расстоянии (и тогда обнаруживается), прежде чем столкнуться с ней [8].

Направим тягу двигателя коллинеарно вектору скорости. Такой выбор направления локально оптимален для разгона или торможения объекта [9, 10]. В предыдущей статье [11] мы рассмотрели математически более простой случай возмущающего ускорения, направленного вдоль трансверсали. Для круговых орбит оба варианта совпадают. Для эллиптических первый случай предпочтительнее, как будет показано ниже.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через ω , e , i , Ω , g , M , a угловую скорость (среднее движение по астрономической терминологии), эксцентриситет, наклон к основной неподвижной плоскости с ортами \mathbf{i} , \mathbf{j} , долготу восходящего узла, аргумент перигентра, среднюю аномалию и большую полуось. Независимы первые 6 элементов, параметр

$$a = \kappa^{2/3} \omega^{-2/3} \quad (1)$$

считается функцией от ω . Выбор угловой скорости вместо большой полуоси в качестве независимой переменной упрощает операции осреднения, поскольку скорость изменения M в невозмущенном движении линейно зависит от ω , но существенно нелинейно от a .

Пусть компоненты возмущающего ускорения \mathbf{P} в системе \mathcal{O}_2 равны $(\mathfrak{X}, 0, 0)$, $\mathfrak{X} = \text{const}$. В статье [2] выполнено осредняющее преобразование [12–14] уравнений Эйлера [13, 15] для изменения оскулирующих элементов с точностью до первого порядка относительно отношения $|\mathbf{P}|$ к основному ускорению κ^2/r^2 . Переход от оскулирующих элементов к средним выполняется по формулам

$$\epsilon_n = \bar{\epsilon}_n + u_n. \quad (2)$$

Здесь ϵ_n – семь оскулирующих элементов, взятых в указанном выше порядке; $\bar{\epsilon}_n$ – семь средних элементов. Величины u_n считаются функциями средних элементов $\bar{\epsilon}_k$. Впрочем, в первом приближении безразлично, считать ли аргументы u_n средними или оскулирующими.

Замкнутые выражения u_n содержат неполные эллиптические интегралы [2]. Предпочтительнее

пользоваться приведенными там же рядами по степеням эксцентриситета:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{3}{\omega a} \left[\left(e - \frac{1}{4} e^3 - \frac{3}{64} e^5 \right) \sin E - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{8} e^2 + \frac{1}{32} e^4 \right) \sin 2E - \frac{1}{256} e^4 \sin 4E \right] \mathfrak{X}, \\ u_2 &= \frac{1}{\omega^2 a} \left[\left(2 - \frac{9}{4} e^2 + \frac{11}{32} e^4 \right) \sin E + \right. \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2} e + \frac{1}{4} e^3 + \frac{19}{256} e^5 \right) \sin 2E + \\ &\quad + \left(\frac{1}{12} e^2 - \frac{1}{192} e^4 \right) \sin 3E - \\ &\quad - \left(\frac{1}{32} e^3 + \frac{1}{256} e^5 \right) \sin 4E + \\ &\quad \left. + \frac{3}{320} e^5 \sin 5E - \frac{1}{256} e^5 \sin 6E \right] \mathfrak{X}, \\ u_3 &= u_4 = 0, \\ u_5 &= \frac{1}{\omega^2 a} \left[\left(-1 + \frac{3}{8} e^2 + \frac{9}{64} e^4 \right) + \left(-\frac{2}{e} + \frac{3}{4} e + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{9}{32} e^3 + \frac{79}{512} e^5 \right) \cos E + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} e^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{17}{256} e^4 \right) \cos 2E + \left(-\frac{1}{12} e - \frac{1}{192} e^3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{7}{1536} e^5 \right) \cos 3E + \left(\frac{1}{32} e^2 + \frac{1}{128} e^4 \right) \cos 4E - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{3}{320} e^3 + \frac{13}{2560} e^5 \right) \cos 5E + \frac{1}{256} e^4 \cos 6E - \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{3584} e^5 \cos 7E \right] \mathfrak{X}, \\ u_6 &= \frac{1}{\omega^2 a} \left[\left(1 + \frac{13}{8} e^2 + \frac{1}{64} e^4 \right) + \left(2 + \frac{13}{4} e + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{32} e^3 + \frac{41}{512} e^5 \right) \cos E - \left(\frac{1}{2} + \frac{25}{16} e^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{11}{256} e^4 \right) \cos 2E + \left(\frac{1}{12} e + \frac{53}{192} e^3 + \frac{7}{64} e^5 \right) \cos 3E - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{32} e^2 + \frac{59}{1024} e^4 \right) \cos 4E + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{3}{320} e^3 + \frac{3}{128} e^5 \right) \cos 5E - \frac{1}{256} e^4 \cos 6E + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{3584} e^5 \cos 7E \right] \mathfrak{X}, \\ u_7 &= \frac{2}{\omega^2} \left[\left(e - \frac{1}{4} e^3 - \frac{3}{64} e^5 \right) \sin E - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{8} e^2 + \frac{1}{32} e^4 \right) \sin 2E - \frac{1}{256} e^4 \sin 4E \right] \mathfrak{X}. \end{aligned} \quad (3)$$

¹ Это не так для тел метрового и декаметрового размера, открываемых только в непосредственной близости от Земли. Но столь малые тела отклонять не нужно. Достаточно оповещения населения.

Здесь E – эксцентрисическая аномалия. Ряды сходятся при $e < 1$. Мы сохраняем члены до e^5 включительно. Важно, что соотношения (3) не содержат малых знаменателей, поскольку имеется лишь одна быстрая переменная M и резонанс невозможен.

Замечание 1. В статье [2] содержится досадная опечатка. В формулах (9) и (11) следует поменять знак в выражениях для u_1 , $\mathcal{F}u_1$. В формуле (11) выражение для ν ошибочно. Однако все коэффициенты при компонентах \mathcal{N} и W в [2] верны. В приведенных формулах выше (в которых u_6 соответствует ν из [2]) погрешность устранена.

Замечание 2. Метод осреднения определяет u_n с точностью до слагаемого, не зависящего от быстрой переменной. В (3) оно выбрано из условия нулевого среднего u_n по переменной M .

Замечание 3. Мы считаем разложения типа (3) рядами по степеням эксцентриситета, но для удобства группируем слагаемые при косинусах и синусах одинаковой кратности.

Замечание 4. В статье [2] аналогичные (3) выражения представляли собой многочлены невысокой степени от e . Переход к средней аномалии от эксцентрисической превращал бы их в бесконечные ряды. Переход же к средней аномалии в рядах (3) кажется на первый взгляд разумным. Это не так, поскольку радиус сходимости в этом случае понизился бы от единицы до предела Лапласа $e_L = 0.6627$.

Дифференциальные уравнения для средних элементов просты [2]:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= -\frac{3}{a} F_1(x) \mathfrak{T}, & \dot{e} &= -\frac{e}{\omega a} F_2(x) \mathfrak{T}, \\ \dot{M} &= \omega, & \dot{i} &= \dot{\Omega} = \dot{g} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и ниже \mathfrak{T} – отличная от нуля постоянная, $x = e^2$,

$$F_1(x) = 1 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{64}x^2 + \dots,$$

$$F_2(x) = 1 - \frac{5}{8}x - \frac{9}{64}x^2 + \dots,$$

$$F_3(x) := \frac{F_1(x) - F_2(x)}{x} = \frac{3}{8} + \frac{3}{32}x + \dots;$$

точка (жирная точка для i) отмечает дифференцирование по времени t .

Мы опустили черту над средними элементами, поскольку это не приводит к недоразумениям.

Найдем решение уравнений (4) и оценим вклад периодических возмущений (3).

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В СРЕДНИХ ЭЛЕМЕНТАХ

Описывающие ориентацию эллипса элементы i , Ω , g постоянны. Уравнения (4) автономны, поэтому за начальную эпоху удобно принять $t = 0$. Начальные значения переменных будем снабжать индексом 0. Далее следует рассмотреть два случая в зависимости от начального значения эксцентриситета.

3.1. Круговая начальная орбита

Пусть $e_0 = 0$. В этом случае касательное ускорение \mathfrak{T} совпадает с трансверсальным T и мы можем воспользоваться точным решением, полученным в статье [3]:

$$\begin{aligned} e = 0, \quad \omega &= \omega_0(1 - \tau)^3, \quad a = \frac{a_0}{(1 - \tau)^2}, \\ M &= M_0 + \frac{\omega_0 t^*}{4} [1 - (1 - \tau)^4] = \\ &= M_0 + \omega_0 t \left(1 - \frac{3}{2}\tau + \tau^2 - \frac{1}{4}\tau^3 \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь введены обозначения

$$t^* = \frac{a_0 \omega_0}{\mathfrak{T}} = \frac{\varkappa^{2/3} \omega_0^{1/3}}{\mathfrak{T}}, \quad \tau = \frac{t}{t^*}. \quad (6)$$

Величина t^* имеет размерность времени, τ – безразмерное “медленное время”.

Пусть $\mathfrak{T} > 0 \Rightarrow t^* > 0$. Решение (5) существует при $-\infty < \tau < 1$, $-\infty < t < t^*$. Поведение решения на концах интервала тривиально: $a \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow +\infty$ при $\tau \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow -\infty$; $a \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 1$, $t \rightarrow t^*$. Что касается средней аномалии, то $M \rightarrow -\infty$ при $\tau \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow -\infty$; $M \rightarrow M_0 + \omega_0 t^*/4$ при $\tau \rightarrow 1$, $t \rightarrow t^*$. При нулевом эксцентриситете истинная аномалия совпадает со средней. Поэтому орбита \mathcal{A} представляет собой спираль, делающую бесконечное число витков в прошлом (намотывается на притягивающий центр), и конечное число витков в будущем (уходя на бесконечность за конечное время).

Пусть $\mathfrak{T} < 0 \Rightarrow t^* < 0$. Критическое значение $\tau = 1$, $t = t^*$ теперь в прошлом, с ростом τ время уменьшается. Решение существует при $-\infty < \tau < 1$, $t^* < t < +\infty$, и его поведение аналогично описанному выше при перестановке прошлого и будущего.

Замечание 1. Уход на бесконечность за конечное время не имеет физического смысла. Такое поведение решения говорит лишь о том, что метод осреднения применим только при τ , не слиш-

ком близком к единице: например, при $\tau < 1/2$, т.е. $t < t^*/2$. Действительно, метод предполагает малость величин u_n . Между тем при $e_0 = 0$ согласно (3)

$$u_2 = \frac{2\mathfrak{I}}{\omega^2 a} \sin E = \frac{2\mathfrak{I}}{\omega_0^2 a_0 (1 - \tau)^4} \sin E, \quad (7)$$

что не ограничено при $\tau \rightarrow 1$.

Замечание 2. Согласно (7) на половине каждого оборота $\pi(2k - 1) < E < 2\pi k$ оскулирующий эксцентриситет отрицателен. Это нормально, т.к. отрицательность эксцентриситета меняет местами перигентр и апоцентр.

3.2. Некруговая начальная орбита

Уравнения (4) при $0 < e_0 < 1$ проинтегрированы в [3] в квадратурах, приводящих к неполным эллиптическим интегралам. Здесь мы рассматриваем случай малого \mathfrak{I} (оценки см. ниже), так что гораздо проще использовать ряды по степеням медленного времени. Получим решение методом рядов Ли [16–19]. Первые два уравнения (4) не зависят от остальных. Запишем их решение в виде ряда Ли

$$\epsilon_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D^k \epsilon_n, \quad n = 1, 2. \quad (8)$$

Здесь D – оператор дифференцирования вдоль траекторий системы (4):

$$D = -3\mathfrak{I} \chi^{-2/3} \omega^{2/3} F_1(x) \frac{\partial}{\partial \omega} - \mathfrak{I} \chi^{-2/3} \omega^{-1/3} e F_2(x) \frac{\partial}{\partial e}.$$

В правые части (8) после дифференцирования следует подставить начальные значения элементов.

Легко доказать, что

$$D^k \omega = \left(\frac{\mathfrak{I}}{\chi^{2/3}} \right)^k \omega^{(3-k)/3} A_k(x). \quad (9)$$

Здесь A_k определяются индуктивно:

$$A_0 = 1, \quad A_{k+1} = (k - 3)F_1 A_k - 2xF_2 A_k'. \quad (10)$$

Ряды для $F_1(x)$, $F_2(x)$ мы привели с точностью до x^σ при $\sigma = 2$. Из (10) вытекает, что все $A_k(x)$ также точны до x^σ .

Аналогично для эксцентриситета

$$D^k e = \left(\frac{\mathfrak{I}}{\chi^{2/3}} \right)^k \omega^{-k/3} e B_k(x), \quad (11)$$

$$B_0 = 1, \quad B_{k+1} = (kF_1 - F_2)B_k - 2xF_2 B_k'. \quad (12)$$

Из (12) вытекает, что $B_k(x)$ точны до x^σ .

Таким образом, потери точности не происходит: все $D^k \omega$ точны до $e^{2\sigma}$, а все $D^k e$ точны до $e^{2\sigma+1}$.

Замечание. Множитель $(k - 3)$ в (10) приводит к тому, что $A_k(x)$ при $k \geq 4$ содержат x множителем. Множитель $(kF_1 - F_2)$ в (12) при $k = 1$ равен $x F_3$. Это приводит к тому, что $B_k(x)$ при $k \geq 2$ содержат x множителем.

Согласно (6)

$$\frac{\mathfrak{I} t}{\chi^{2/3} \omega^{1/3}} = \tau.$$

Поэтому ряды (8) с учетом (9, 11) становятся рядами по степеням τ :

$$\omega = \omega_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{k!} \tau^k, \quad e = e_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \tau^k. \quad (13)$$

С точностью до второй степени медленного времени

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 \left[1 - 3 \left(1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 \right) \tau + \right. \\ &\quad \left. + 3 \left(1 - \frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{32} e^4 \right) \tau^2 + \dots \right], \\ e &= e_0 \left[1 - \left(1 - \frac{5}{8} e^2 - \frac{9}{64} e^4 \right) \tau - \right. \\ &\quad \left. - \frac{13}{16} e^2 \left(1 + \frac{19}{104} e^2 \right) \tau^2 + \dots \right], \\ a &= a_0 \left[1 + 2 \left(1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 \right) \tau + \right. \\ &\quad \left. + 3 \left(1 - \frac{1}{3} e^2 - \frac{7}{96} e^4 \right) \tau^2 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Первые два равенства (14) получены из (13), последнее выведено из первого в силу (1). Интегрируя первое соотношение (14), получим

$$\begin{aligned} \delta M &= \omega_0 t^* \tau^2 \left[-\frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{32} e^4 \right) \tau + \dots \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь введено обозначение

$$\delta M = M - M_0 - \omega_0 t.$$

Напомним, что в квадратных скобках удерживаются члены до четвертой степени эксцентриситета, и что под e справа в (14), (15) следует понимать e_0 . Как и должно быть, вековые возмущения позиционных элементов пропорциональны времени. Вековые возмущения средней аномалии пропорциональны квадрату времени, ибо в третьем уравнении (4) отсутствует слагаемое, пропорциональное \mathfrak{I} .

Замечание. При $e_0 = 0$ решение (14), (15) совпадает с (5) с принятой точностью рядов по степеням τ .

3.3. Сходимость рядов

1. Пусть $e_0 = 0$.

Элементы ω, M являются согласно (5) многочленами по времени, и вопрос о сходимости не стоит.

Для большой полуоси имеется замкнутое выражение, см. (5). Его можно разложить в ряд

$$a = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\tau^n,$$

радиус сходимости τ^* которого равен единице.

2. Пусть $0 < e_0 < 1$.

Воспользуемся точными выражениями для первых двух уравнений (4) [2], переходя к медленному времени в качестве независимой переменной:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} &= -\frac{6\omega_0^{1/3}}{\pi} \mathbf{E}(e)\omega^{2/3}, \\ \frac{de}{d\tau} &= -\frac{4\omega_0^{1/3}}{\pi} e(1-e^2)\mathbf{D}(e)\omega^{-1/3}. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $\mathbf{E}(e)$, $\mathbf{D}(e)$ – эллиптические интегралы в форме Лежандра.

Оценим радиус сходимости τ^* решений (16) с помощью теоремы Коши [19, теорема 8.2.2]):

$$\tau^* \geq \frac{1}{3\mathfrak{M}}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \max \left\{ \frac{\mathfrak{M}_1}{r_\omega}, \frac{\mathfrak{M}_2}{r_e} \right\}, \\ \mathfrak{M}_1 &= \max |f_1|, \quad \mathfrak{M}_2 = \max |f_2|, \end{aligned} \tag{17}$$

функции f_1 и f_2 – правые части уравнений (16), а величины r_ω и r_e задают их область определения:

$$|\omega - \omega_0| < r_\omega, \quad |e - e_0| < r_e.$$

Положим $r_e = 1 - e_0$, $r_\omega = \gamma\omega_0$, $0 < \gamma < 1$. Выбор γ , разумеется, не влияет на значение радиуса сходимости, но определяет величину оценки τ^* снизу, которую дает теорема Коши. Мы подберем γ так, чтобы оценка $\tau_*(\gamma, e_0)$ была бы максимальной.

По принципу максимума модуля, для вычисления \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{M}_2 достаточно рассмотреть лишь точки граничных окружностей:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0(1 + \gamma \operatorname{Exp} \xi), \quad e = e_0 + (1 - e_0) \operatorname{Exp} \psi, \\ 0 &\leq \xi, \psi < 2\pi. \end{aligned}$$

Здесь $\operatorname{Exp} x := \exp ix$, i – мнимая единица. Очевидно,

$$|f_1| \leq \frac{6\omega_0^{1/3}}{\pi} L_1 \omega_0^{2/3} |1 + \gamma \operatorname{Exp} \xi|^{2/3} \leq \frac{6\omega_0 L_1}{\pi} (1 + \gamma)^{2/3}, \tag{18}$$

Таблица 1. Значения γ и τ_* в зависимости от e_0

e_0	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
γ	0.9619	0.9556	0.9468	0.9342	0.9155	0.8867	0.8405
τ_*	0.0561	0.0558	0.0555	0.0550	0.0542	0.0531	0.0511
e_0	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99	0.999	0.9999
γ	0.7627	0.6385	0.4512	0.3131	0.1344	0.0413	0.0130
τ_*	0.0478	0.042	0.0322	0.0239	0.0113	0.0037	0.0012

$$|f_2| \leq \frac{4\omega_0^{1/3}}{\pi} L_2 \omega_0^{-1/3} |1 + \gamma \operatorname{Exp} \xi|^{-1/3} \leq \frac{4L_2}{\pi} (1 - \gamma)^{-1/3}. \tag{19}$$

За L_1, L_2 можно взять числа, большие или равные $\max_e |\mathbf{E}(e)|$, $\max_e |e(1 - e^2)\mathbf{D}(e)|$ соответственно.

Поскольку $\max_e |\mathbf{E}(e)| \leq \mathbf{E}(i)$, можно положить

$$\begin{aligned} L_1 = \mathbf{E}(i) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin^2 x} dx = \\ &= \sqrt{2} \mathbf{E}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1.910099. \end{aligned}$$

За L_2 примем зависящую от e_0 правую часть формулы (41) из Приложения: $L_2(e_0) = \pi\sqrt{g_4(e_0)}/8$. Теперь формулы (18), (19) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{M}_1}{r_\omega} &\leq \frac{6L_1(1 + \gamma)^{2/3}}{\pi \gamma}, \\ \frac{\mathfrak{M}_2}{r_e} &\leq \frac{4L_2(e_0)}{\pi(1 - e_0)(1 - \gamma)^{1/3}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Наилучшая нижняя оценка $\tau_*(e_0)$ величины τ^* получится при совпадении правых частей соотношений (20):

$$\frac{(1 - \gamma)^{1/3}(1 + \gamma)^{2/3}}{\gamma} = L_3(e_0). \tag{21}$$

Здесь

$$L_3 = \frac{2L_2}{3L_1(1 - e_0)}.$$

Производная от левой части (21),

$$\frac{\gamma - 3}{3\gamma^2(1 - \gamma)^{2/3}(1 + \gamma)^{1/3}},$$

отрицательна. Поэтому левая часть (21) убывает от ∞ до 0 с ростом γ от 0 до 1, и каждому e_0 отвечает единственное значение $\gamma \in (0, 1)$.

Решая уравнение (21) численно, представим γ и τ_* в табл. 1 и на рис. 1. Заметим, что полученные по теореме Коши оценки существенно занижают

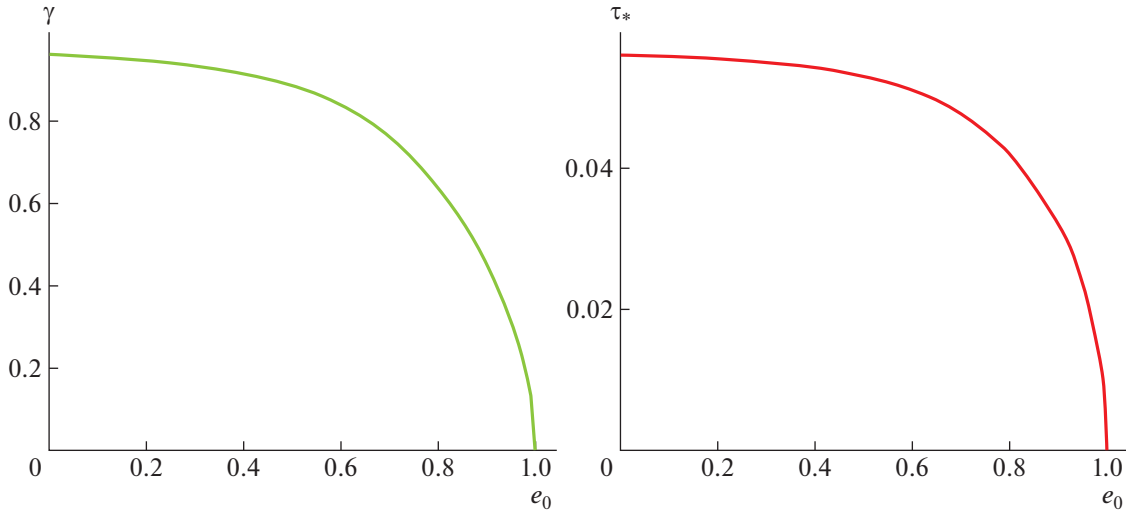


Рис. 1. Графики γ и τ_* в зависимости от e_0 .

область сходимости. Так, $\tau_*(0) = 0.056$, тогда как $\tau^*(0) = 1$.

4. НОРМА СМЕЩЕНИЯ

Пусть ϵ_n , $n = 1, \dots, 5$ – первые пять оскулирующих элементов, постоянных в невозмущенном движении (медленные переменные); $\epsilon_6 = M$ – средняя аномалия (быстрая переменная). Восстановим черту над средними элементами. Нас интересует смещение $\Delta \mathbf{r}$ положения \mathcal{A} за время t , вызванное возмущающим ускорением \mathfrak{Z} . По определению

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(\epsilon_n, M) - \mathbf{r}(\bar{\epsilon}_n(0), M_0 + \omega_0 t). \quad (22)$$

Напомним, что разности оскулирующих и средних элементов u_n обладают нулевым средним по средней аномалии. Полезно наряду с u_n ввести величины $\tilde{u}_n = u_n - v_n$ при $v_n = u_n(0)$.

Заменим (2) соотношением

$$\epsilon_n = \bar{\epsilon}_n + \tilde{u}_n. \quad (23)$$

Теперь в начальную эпоху $\tilde{u}_n(0) = 0$, $\epsilon_n(0) = \bar{\epsilon}_n(0)$.

Соотношение (22) представим в форме

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r}_2 + \Delta \mathbf{r}_3, \quad (24)$$

где

$$\Delta \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(\bar{\epsilon}_n + \tilde{u}_n, \bar{M}_0 + \bar{\omega}_0 t + \delta M + \tilde{u}_6) - \mathbf{r}(\bar{\epsilon}_n + u_n, \bar{M}_0 + \bar{\omega}_0 t + \delta M + u_6), \quad (25)$$

$$\Delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(\bar{\epsilon}_n + u_n, \bar{M}_0 + \bar{\omega}_0 t + \delta M + u_6) - \mathbf{r}(\bar{\epsilon}_n, \bar{M}_0 + \bar{\omega}_0 t + \delta M), \quad (26)$$

$$\Delta \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}(\bar{\epsilon}_n, \bar{M}_0 + \bar{\omega}_0 t + \delta M) - \mathbf{r}(\epsilon_n(0), M_0 + \omega_0 t). \quad (27)$$

Смещения $\Delta \mathbf{r}_1$, $\Delta \mathbf{r}_2$ вызваны отличием оскулирующих элементов от средних. Смещение $\Delta \mathbf{r}_3$ вызвано дрейфом средних элементов.

4.1. Влияние отличия оскулирующих элементов от средних

Оценим смещения $\Delta \mathbf{r}_1$, $\Delta \mathbf{r}_2$. Поскольку \tilde{u}_n , u_n малы и периодически зависят от M , разности (25), (26) также малы и периодичны, так что вековой тренд отсутствует. Для оценки достаточно вычислить среднеквадратические нормы

$$\varrho_k := \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\Delta \mathbf{r}_k)^2 dM}, \quad k = 1, 2. \quad (28)$$

Норма ϱ_2 приведена в [20, формулы (9), (13)]:

$$\varrho_2 = \frac{4|\mathfrak{Z}|}{\omega^2} \sqrt{1 - \frac{39}{128} e^2 + \frac{52505}{73728} e^4}. \quad (29)$$

Замечательно, что ϱ_2 зависит только от двух элементов орбиты ω и e (или, что то же самое, от a и e).

Заметим, что при $e = 0$ и замене \mathfrak{Z} на T формула (29) совпадает с формулой (16) из [11], как и должно быть.

Величина $\Delta \mathbf{r}_2^2$ является квадратичной формой от u_n . Величина $\Delta \mathbf{r}_1^2$ отличается от $\Delta \mathbf{r}_2^2$ заменой u_n на $\tilde{u}_n - u_n$, или, что то же самое, на v_n . Она неудобна тем, что зависит от всех начальных данных. Для оценки примем, что интегралы (28) от них равны, так что $\varrho_1 = \varrho_2$.

4.2. Влияние дрейфа средних элементов

В этом разделе все элементы считаются средними. При $\mathfrak{L} = 0$ пять из них $\epsilon_1, \dots, \epsilon_5$ постоянны, а шестой $\epsilon_6 = M$ линейно зависит от времени. Поскольку $\delta i = \delta \Omega = \delta g = 0$, с точностью до второго порядка малости смещение (27) согласно [21] равно

$$(\Delta \mathbf{r}_3)^2 = \delta r^2 + r^2 \delta u^2,$$

где u – аргумент широты. Вычислим среднеквадратичную норму:

$$\varrho_3^2 := \|\Delta \mathbf{r}_3\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Delta \mathbf{r}_3)^2 dM. \quad (30)$$

Приращения δr и δu – линейные функции от δa , δe , δM . Последние согласно (14), (15) зависят лишь от начальных данных a_0 , e_0 и времени, но не зависят от положения на орбите M . Условимся в интеграле (30) считать t независимым от M . Тогда при интегрировании приращения δa , δe , δM ведут себя как постоянные, и мы можем воспользоваться результатами статьи [21]:

$$\begin{aligned} \frac{2}{a^2} \varrho_3^2 = & \frac{2 + 3e^2}{a^2} \delta a^2 + \frac{5 - 4e^2}{\eta^2} \delta e^2 + \\ & + 2\delta M^2 + 6 \frac{e}{a} \delta a \delta e. \end{aligned} \quad (31)$$

Значения коэффициентов при приращениях вычисляются на начальную эпоху $t = 0$. Подставляя (14), (15) в (31), получим

$$\frac{2}{a^2} \varrho_3^2(\tau) = Q_1(\tau) + Q_2(\tau) \quad (32)$$

при

$$\begin{aligned} Q_1(\tau) &= \frac{2 + 3e^2}{a^2} \delta a^2 + \frac{5 - 4e^2}{\eta^2} \delta e^2 + 6 \frac{e}{a} \delta a \delta e = \\ &= (8 + e^2 - e^4) \tau^2 + \left(24 + 4e^2 - \frac{25}{4} e^4\right) \tau^3 + \dots, \\ Q_2(\tau) &= 2\delta M^2 = \frac{9}{2} (\omega_0 t^*)^2 \tau^4 \left[\left(1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{32} e^4\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{3} \left(1 - e^2 + \frac{11}{64} e^4\right) \tau + \dots \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь Q_1 отвечает смещению поперек орбиты, а Q_2 – вдоль орбиты.

Обратим внимание, что $Q_2 \ll Q_1$, если t отвечает дуге в несколько градусов; Q_2 и Q_1 сопоставимы по величине на дуге порядка полуоборота; $Q_2 \gg Q_1$ на дуге в один и более оборотов. Действительно,

$$\frac{Q_2(\tau)}{Q_1(\tau)} \sim \frac{9}{16} (\omega_0 t)^2 \left(1 - \frac{5}{8} e^2 + \frac{11}{64} e^4\right) \quad (34)$$

согласуется со сказанным в начале параграфа: одному обороту отвечает $\omega t = 2\pi$.

Замечание 1. Правая часть (29) инвариантна относительно замены $T \mapsto -T$, $\tau \mapsto -\tau$. Это не так для правой части (32). Однако она становится инвариантной, если пренебречь нечетными (поправочными) степенями τ .

Замечание 2. Формулы (29), (32) оценивают периодическое и вековое смещения \mathcal{A} в системе отсчета \mathbb{O}_2 . По инвариантности расстояний относительно сдвигов и вращений оба соотношения остаются справедливыми в любой декартовой системе отсчета.

4.3. Сравнение со случаем возмущающего ускорения, направленного вдоль трансверсали

Сравним полученные результаты с приведенными в [11], где рассматривался случай постоянства возмущающего ускорения в системе отсчета \mathbb{O}_1 , орты которой \mathbf{i}_1 , \mathbf{j}_1 , \mathbf{k}_1 направлены по радиус-вектору, трансверсали (перпендикуляр к радиус-вектору в плоскости оскулирующей орбиты в сторону движения) и бинормали (направленной по вектору площадей). Считалось $\mathbf{P} = (0, T, 0)$, $T = \text{const}$.

Пусть $\mathfrak{L} = T$.

При $e_0 = 0$ результаты совпадают, как и должно быть: трансверсаль в этом случае служит касательной.

Считаем далее $e_0 > 0$. Величины, описывающие случай постоянства \mathbf{P} в системе \mathbb{O}_2 , снабдим символом (*).

Опираясь на (33) и аналогичные формулы из [11], образуем отношения

$$\begin{aligned} \frac{Q_1^*}{Q_1} &\sim 1 + \frac{15}{32} e^2 + \frac{421}{1024} e^4, \\ \frac{Q_2^*}{Q_2} &\sim 1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{15}{32} e^4, \end{aligned} \quad (35)$$

где мы пренебрегли величинами порядка τ и, как всегда, величинами порядка e^6 .

Формулы (35) показывают, что как смещение поперек орбиты, так и смещение вдоль орбиты больше в системе отсчета \mathbb{O}_2 . Различие увеличивается с ростом эксцентриситета. При малых e различие незначительно. При $e = 0.3$ различие достигает 5%, а при $e = 0.8$ достигает 50%.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

А. Выберем то же подсемейство \mathcal{F} семейства потенциально опасных астероидов с известными элементами и диаметром d , использованное в

Таблица 2. Параметры 14 астероидов в верхней части списка и 4 – в нижней

Объект	d	m $\times 10^{-7}$	a , au	e	ω^2 $\times 10^{14}$	\mathfrak{D} $\times 10^8$	t^* $\times 10^{-12}$	τ_1 $\times 10^6$	τ_2 $\times 10^5$	ρ_2 $\times 10^{-6}$	$\rho_3(\tau_1)$ $\times 10^{-5}$	$\rho_3(\tau_2)$ $\times 10^{-6}$
2010 YD	26	2.30	2.04	0.538	0.466	4.35	0.480	5.40	6.58	36.8	33.7	74.5
2002 JR100	28	2.87	0.924	0.299	5.03	3.48	0.890	2.91	3.54	2.74	8.78	52.3
1998 KY26	30	3.53	1.23	0.202	2.12	2.83	0.948	2.73	3.33	5.32	10.5	43.8
2010 FX9	30	3.53	1.13	0.367	2.74	2.83	0.990	2.62	3.19	4.08	9.35	42.9
2010 HA	32	4.29	0.960	0.196	4.48	2.33	1.30	1.99	2.42	2.07	6.18	35.3
2010 JJ3	32	4.29	2.23	0.578	0.356	2.33	0.855	3.03	3.69	25.9	20.7	41.6
2010 CO44	34	5.14	1.07	0.231	3.23	1.94	1.48	1.75	2.13	2.39	5.95	29.6
2010 JO71	37	6.63	1.17	0.387	2.46	1.51	1.82	1.42	1.73	2.41	5.23	22.9
2010 QG2	38	7.18	1.67	0.517	0.846	1.39	1.65	1.57	1.91	6.48	8.05	22.3
2010 JH3	39	7.76	1.76	0.470	0.731	1.29	1.74	1.49	1.81	6.93	7.99	21.0
2010 JW39	39	7.76	1.64	0.390	0.903	1.29	1.81	1.43	1.75	5.62	7.19	20.7
2010 EX11	40	8.38	0.956	0.110	4.54	1.19	2.55	1.02	1.24	1.05	3.15	18.2
2010 MY1	43	10.4	1.21	0.211	2.21	0.961	2.81	0.921	1.12	1.73	3.49	14.8
2010 UC7	43	10.4	1.88	0.567	0.593	0.961	2.26	1.15	1.40	6.40	6.62	15.9
2004 KH17	197	1000	0.712	0.499	11.0	0.00999	353	0.00734	0.00893	0.00358	0.0184	0.146
2010 CB55	198	1020	1.13	0.148	2.72	0.00984	284	0.00912	0.0111	0.0144	0.0325	0.151
2010 FH81	200	1050	1.23	0.210	2.15	0.00955	282	0.00920	0.0112	0.0176	0.0351	0.148
Aphophis	325	4490	0.922	0.191	5.06	0.00223	1390	0.00186	0.00226	0.00175	0.0056	0.0337

Примечание. Объект 2004 KH17 ≡ 468468; Объект 2010 FH81 ≡ 510055; Aphophis ≡ 99942.

статье [11]. Считаем, что на каждый из этих 66 астероидов действует возмущающая сила² в 1 Н, вызывающая возмущающее ускорение $\mathfrak{D} = 1/m$.

В табл. 2 представлены следующие сведения: номер (предварительное обозначение) астероида; диаметр d ; масса m ; элементы a , e , ω^2 ; ускорение \mathfrak{D} ; критическое время t^* ; безразмерные времена $\tau_1 = t_1/t^*$ и $\tau_2 = t_2/t^*$, отвечающие $t_1 = 30^d$, $t_2 = 1$ тропический год; норма периодического смещения ρ_2 ; вековые смещения $\rho_3(\tau_1)$, $\rho_3(\tau_2)$. Данные упорядочены по возрастанию d . Приведены значения для первых 14 и последних 4 астероидов.

Масса m известна с точностью, на несколько порядков худшей по сравнению с точностью остальных исходных данных. Но наша задача на данном этапе – оценить возможности метода, а для этого имеющейся точности вполне хватает.

Вычисленные характеристики 66 астероидов из семейства \mathcal{F} показали следующее.

² Все значения приводим в системе СИ, если не указано противное.

1. Для всех астероидов

$$\tau_1 < \tau_2 < 6.6 \times 10^{-5},$$

так что τ_1 , τ_2 лежат глубоко внутри круга сходимости. Более того, квадратичного по τ приближения в (14) и кубичного в (15) более чем достаточно. С принятой точностью в формуле (33) можно считать

$$\begin{aligned} Q_1(\tau) &= (8 + e^2 - e^4 + \dots)\tau^2, \\ Q_2(\tau) &= \frac{9}{2}(\omega_0 t^*)^2 \tau^4 \left(1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{32}e^4 + \dots\right). \end{aligned} \quad (36)$$

2. На месячном интервале $Q_2(\tau)$ в несколько раз меньше $Q_1(\tau)$: сдвиг вдоль орбиты меньше сдвига поперек орбиты. Противоположная ситуация на годичном интервале за одним исключением для 130-м астероида 2002 CX58. На обоих интервалах различия доходят до двух–трех порядков.

3. На месячном интервале $\rho_2 > \rho_3(\tau_1)$: периодические возмущения превосходят вековые. Противоположная ситуация на годичном интервале $\rho_2 < \rho_3(\tau_2)$ за одним исключением для того же 130-м астероида 2002 CX58.

4. Величина ϱ_2 для большинства астероидов оказалась меньше радиуса Земли R_\oplus . Лишь для четырех астероидов $\varrho_2 > R_\oplus$. Мы приняли $R_\oplus = 6.5 \times 10^6$ с учетом атмосферы.

5. Величина $\varrho_3(\tau_1)$ для всех астероидов оказалась меньше радиуса Земли. Увод астероидов за месяц невозможен. Правда, возможно тонкое маневрирование с привлечением периодических возмущений для упомянутых четырех астероидов. Но это слишком опасно.

6. Для всех 19 астероидов с диаметром до 55 м включительно $\varrho_3(\tau_2)$ превысило радиус Земли. Для таких опасных астероидов увод возможен за время около года. Учет периодических возмущений необходим.

7. Увод астероидов крупнее 55 м за год невозможен.

Б. Увеличим возмущающую силу в N раз, сохраняя остальные предположения п. А. При расчетах положим $N = 20$.

1. Значения \mathfrak{D} , $1/t^*$, τ_1 , τ_2 , ϱ_2 увеличиваются в N раз. В частности, при $N = 20$

$$\tau_1 < \tau_2 < 1.3 \times 10^{-3}.$$

По-прежнему τ_1 и τ_2 находятся глубоко внутри круга сходимости; квадратичного по τ приближения в (13) и кубичного в (14) достаточно, и можно пользоваться формулой (36). Поэтому значения $Q_s(\tau_k)$ увеличиваются в N^2 раз, а $\varrho_3(\tau_k)$ — в N раз.

2. Соотношения между $Q_2(\tau)$ и $Q_1(\tau)$ не изменяются.

3. Соотношения между ϱ_2 и $\varrho_3(\tau)$ не изменяются.

4. Для всех 18 астероидов с диаметром, меньшим 54 м, и еще для 11 астероидов с диаметром до 130 м ϱ_2 превысило радиус Земли. Учет периодических возмущений для таких астероидов обязателен.

5. Для всех 11 астероидов с диаметром, меньшим 40 м, и еще для 5 астероидов с диаметром до 53 м $\varrho_3(\tau_1)$ превысило радиус Земли. Таким образом, для небольших опасных астероидов увод возможен за время около месяца. Учет периодических возмущений обязателен.

6. Для всех 55 астероидов с диаметром до 152 м включительно $\varrho_3(\tau_2)$ превысило радиус Земли. Для таких астероидов увод возможен за время около года. Учет периодических возмущений также необходим.

7. Увод астероидов крупнее 150 м, в частности, увод Апофиса, за год невозможен.

В. При каких условиях становится возможным увод более крупных астероидов? Очевидно, следует либо увеличить тягу двигателя, либо время

Таблица 3. Сравнение эффективности касательного и трансверсального ускорений

Объект	e	β_1	β_2	β_3
2009 UY19	0.03	1.00	1.00	1.00
2010 FK	0.10	1.00	1.00	1.00
1998 KY26	0.20	1.00	1.01	1.01
2002 JR100	0.30	1.00	1.02	1.04
2010 JO71	0.39	1.01	1.04	1.06
2002 LT24	0.50	1.03	1.07	1.11
2010 EC43	0.60	1.09	1.12	1.16
2004 FG11	0.72	1.22	1.20	1.31
2010 DO	0.75	1.26	1.22	1.35
2010 LK34	0.81	1.41	1.29	1.46

Примечание. Объект 2002 LT24 \equiv 469 445; Объект 2004 FG11 \equiv 363 599.

маневра, либо и то, и другое. Для Апофиса нужно увеличить отвечающее $N = 1$ значение $\varrho_3(\tau_2)$ примерно в 200 раз, чтобы оно превысило R_\oplus .

1. Добьемся этого за счет тяги. Полагая $N = 200$, получим $\tau_2 = 4.53 \times 10^{-6}$, что по-прежнему позволяет пользоваться упрощенной формулой (36). Норма уклонения возрастет в те же 200 раз. Более точный расчет показывает, что Апофис можно увести с орбиты соударения за 0.98 года при тяге в 200 Н.

2. Добьемся этого за счет продолжительности маневра. Величина $Q_2(\tau_2)$ в 28 раз превышает $Q_1(\tau_2)$. Поэтому $\varrho_3(\tau)$ в этом диапазоне приблизительно пропорциональна τ^2 . Таким образом, Апофис можно увести с орбиты соударения за $\sqrt{10}$ лет при тяге в 20 Н. Более точный расчет дает для этого 3.14 года.

Столь большая тяга, или столь большое время не позволяют сейчас передвинуть Апофис на безопасную орбиту. Но в не очень далекой перспективе это представляется вполне реальным.

Г. Сравним данные табл. 2 с данными аналогичной таблицы из [11]. Результат соберем в табл. 3. В ней представлены следующие сведения для 10 астероидов: номер (предварительное обозначение); эксцентриситет e ; отношения β_1 , β_2 , β_3 , где

$$\beta_1 = \frac{\varrho_2^*}{\varrho_2}, \quad \beta_2 = \frac{\varrho_3^*(\tau_1)}{\varrho_3(\tau_1)}, \quad \beta_3 = \frac{\varrho_3^*(\tau_2)}{\varrho_3(\tau_2)}.$$

Данные упорядочены по возрастанию e . Как и в разделе 4.3, символ (*) указывает на касательное ускорение \mathfrak{L} , а его отсутствие – на трансверсальное T при $\mathfrak{L} = T = 1$ Н.

Теоретические выводы раздела 4.3 подтверждаются полностью. Во всех случаях тяга по касательной дает лучшие результаты по сравнению с тягой по трансверсали. Различие пренебрежимо мало при малых и даже умеренных эксцентриситетах и возрастает вместе с e . Различие становится заметным, начиная с $e = 0.5$, достигая 45% при $e = 0.8$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 18-12-00050).

Приложение

ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть $0 < e_0 < 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \psi < 2\pi$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$,

$$\begin{aligned} e(\psi) &= e_0 + (1 - e_0) \text{Exp } \psi, \\ g_1(\alpha, z) &= \frac{1 - z}{1 - \alpha z}, \\ g_2(e) &= e(1 - e^2) \mathbf{D}(e). \end{aligned} \tag{37}$$

Оценим модули функций (37). Очевидно, $|e(\psi)| \leq 1$,

$$\begin{aligned} 1 - e^2(\psi) &= (1 - e_0) \{1 + e_0 - 2e_0 \cos \psi - \\ &- (1 - e_0) \cos 2\psi - i[2e_0 \sin \psi + (1 - e_0) \sin 2\psi]\}, \\ |1 - e^2|^2 &= 2(1 - e_0)^2 g_3(e_0, \psi), \\ g_3 &= 1 + 3e_0^2 - 4e_0^2 \cos \psi - (1 - e_0^2) \cos 2\psi. \end{aligned}$$

Производная

$$\frac{\partial g_3}{\partial \psi} = 4 \sin \psi [e_0^2 + (1 - e_0^2) \cos \psi]$$

обращается в нуль при

$$\psi = 0, \quad \psi = \pi,$$

а при $e_0 < 1/\sqrt{2}$ также при

$$\cos \psi = -\frac{e_0^2}{1 - e_0^2}, \quad \cos 2\psi = -\frac{1 - 2e_0^2 - e_0^4}{(1 - e_0^2)^2}.$$

Отсюда без труда выводим

$$\max_{\psi} |1 - e^2(\psi)| = g_4(e_0), \tag{38}$$

где

$$g_4(e_0) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{1 - e_0}{1 + e_0}}, & \text{если } e_0 \leq 1/\sqrt{2}, \\ 4e_0(1 - e_0), & \text{если } e_0 \geq 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Аксиома треугольника для точек $1, z, \alpha z$ комплексной плоскости дает

$$|1 - z| \leq |1 - \alpha z| + |z - \alpha z|. \tag{39}$$

Далее,

$$|z - \alpha z|^2 \leq |1 - \alpha z|^2. \tag{40}$$

Действительно, (40) вытекает из очевидного неравенства

$$1 - 2\alpha \leq 1 - \alpha(z + \bar{z}).$$

Соотношения (39, 40) влекут неравенство

$$|g_1(\alpha, z)| \leq 2.$$

Отсюда получаем оценку $g_2(e)$:

$$\begin{aligned} |g_2(e)| &\leq \left| e\sqrt{1 - e^2} \int_0^{\pi/2} \left| \sqrt{g_1(\sin^2 x, e^2)} \right| \sin^2 x dx \right| \leq \\ &\leq \sqrt{2g_4(e_0)} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{\sqrt{8}} \sqrt{g_4(e_0)}. \end{aligned} \tag{41}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников, Вестн. СПбГУ. Сер. 1: Математика. Механика. Астрономия, Вып. 4. 134 (2013).
2. Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников, Астрон. журн. **91**(12), 1060 (2014).
3. Н. Батмунх, Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников, Астрон. журн. **95**(4), 307 (2018).
4. E. T. Lu and S. G. Love, Nature **438**(11), 177 (2005).
5. Ю. Д. Медведев, М. Л. Свешников, А. Г. Сокольский, Е. И. Тимошкова, Ю. А. Чернетенко, Н. С. Черных, В. А. Шор, Астероидно-кометная опасность, под ред. А. Г. Сокольского (СПб: ИПА РАН, 1996).
6. А. М. Микиша, М. А. Смирнов, в Угроза с неба: рок или случайность?, под ред. А. А. Боярчука (М.: Космоинформ, 1999).
7. Н. Н. Горькавый, А. Е. Дудоров (ред.), Челябинский суперболид (Челябинск: Челябинский ГУ, 2016).
8. А. В. Елькин, Л. Л. Соколов, в Астероидная опасность-95. 23–25 мая 1995 г. С.-Петербург. Тезисы докладов (СПб.: Изд-во МИПАО и ИТА РАН, 1995) **2**, 41.
9. Г. Л. Гродзовский, Ю. Н. Иванов, В. В. Токарев, Механика космического полета (проблемы оптимизации) (М.: Наука, 1975).
10. В. Н. Лебедев, Расчет движения космического аппарата с малой тягой (М.: ВЦ АН СССР, 1968).

11. *Н. Батмунх, К. И. Оськина, Т. Н. Санникова, В. Б. Титов, К. В. Холшевников*, Астрон. журн. **96**(11), 961 (2019).
12. *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский*, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний (М.: ФМ, 1963).
13. *Д. Брауер, Дж. Клеменс*, Методы небесной механики (М.: Мир, 1964).
14. *А. Пуанкаре*, Лекции по небесной механике (М.: Наука, 1965).
15. *М. Ф. Субботин*, Введение в теоретическую астрономию (М.: Наука, 1968).
16. *W. Gröbner*, *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen* (Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1967).
17. *Г. Е. О. Джакаля*, Методы теории возмущений для нелинейных систем (М.: Наука, 1979).
18. *А. Х. Найфе*, Методы возмущений (М.: Наука, 1976).
19. *К. В. Холшевников*, Асимптотические методы небесной механики (Л.: Изд-во ЛГУ, 1985).
20. *К. В. Холшевников, Н. Батмунх, К. И. Оськина, В. Б. Титов*, Астрон. журн. **97**(4), 348 (2020).
21. *Н. Батмунх, Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников, В. Ш. Шайдулин*, Астрон. журн. **93**(3), 331 (2016).