АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2020, том 97, № 9, с. 707–713

УДК 521.328/524.8

ДВИЖЕНИЕ ПАРЫ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ В ПРИСУТСТВИИ ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ: МАЛЫЕ ОТКЛОНЕНИЯ ОТ КЕПЛЕРОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

© 2020 г. А. И. Нейштадт[1, 2,*], Г. С. Бисноватый-Коган[1,**]

[1] Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

[2] Университет Лафборо, Лафборо, Великобритания

*E-mail: aneishta@iki.rssi.ru

**E-mail: gkogan@iki.rssi.ru

Поступила в редакцию 30.04.2020 г.
После доработки 28.05.2020 г.
Принята к публикации 30.05.2020 г.

Исследована задача о движении двух гравитирующих тел при наличии темной энергии (ТЭ), рассматриваемой как возмущающий фактор. В дополнение к частоте прецессии орбиты, полученной в предыдущих работах, вычислена поправка к частоте орбитального движения и исследованы колебания большой полуоси и эксцентриситета орбиты, вызванные влиянием ТЭ.

DOI: 10.31857/S0004629920100060

1. ВВЕДЕНИЕ

Открытие темной энергии (ТЭ) в современной вселенной было сделано на основе наблюдения сверхновых типа Ia при красных смещениях $z \le 1$ [1, 2] и измерения спектра флуктуаций космического микроволнового фонового излучения (КМФ) [3, 4]. Эти наблюдения привели к определению величины космологической постоянной $\Lambda \approx 10^{-56}$ см$^{-2}$, отождествленной с ТЭ. Влияние ТЭ на свойства космологического расширения в современную эпоху рассматривалось в обзорах [5–12].

В более раннюю эпоху наблюдательные ограничения на величину космологической постоянной Λ и плотности темной энергии $\rho_{\rm DE} = \dfrac{\Lambda c^2}{8\pi G}$ были получены на основе прецизионных наблюдений тайминга двойных радиопульсаров и движения планет Солнечной системы. Анализ данных о прецессии перигелия Меркурия для получения ограничений на величину Λ проводился различными авторами [13–15], вычисленные ими значения этих ограничений сильно различаются. В работе [15] был получен верхний предел $\Lambda < 4\times 10^{-45}$ см$^{-2}$, упомянутый в последующих работах [16–19]. Таким образом, измеренное значение Λ оказалось более чем на 10 порядков меньше этого верхнего предела.

Гравитомагнитный эффект хода часов при их движении по орбите вокруг вращающегося тела состоит в разности скорости хода часов при их вращении по противоположно направленным орбитам [20, 21]. Влияние космологической постоянной на этот эффект, а также влияние Λ на релятивистскую прецессию перигелия, исследовались в работе [22]. Влияние космологической постоянной на прецессию перигелия Земли и Марса, исследованное в работах [15, 23], привело к ограничению на значение Λ в виде $\Lambda < 1 \cdot 10^{-46}$ см$^{-2}$. Различные релятивистские эффекты в Солнечной системе на основе метрики Шварцшильда-де Ситтера были рассмотрены в работе [24]. Влияние малой дополнительной центрально-симметричной силы и космологического расширения вселенной на движение по кеплеровским орбитам исследовалось в работах [25–28].

В работах [29–31] было показано, что влияние ТЭ на динамику во внешних областях скоплений галактик может быть достаточно сильным. При рассмотрении относительного движения двух богатых скоплений влияние космологической постоянной может быть определяющим [32]. Оценка влияния измеренной космологической постоянной $\Lambda \approx 10^{-56}$ см$^{-2}$ на прецессию орбиты планет вокруг Солнца сделана в [22]. Было показано, что для Солнечной системы это влияние очень мало, и частота прецессии орбиты Земли составляет величину $\sim 10^{-14}$ от эйнштейновского значения. В [22] показано, что отношение этих частот пропорционально 4-й степени размера большей полуоси орбиты, $\sim a^4$, т.е. зависимость от периода обращения $\sim T^{8/3}$. Таким образом для Меркурия эта величина меньше в $(T_{\oplus}/T_{\mathrm{Mercury}})^{8/3} \approx 365/88 \approx$ ≈ 44 раза. Относительное влияние ТЭ на частоту прецессии уменьшается с приближением орбиты планеты к Солнцу, т.к. роль гравитации Солнца растет, а вклад ТЭ падает ввиду постоянной плотности ее энергии.

Гораздо сильнее влияние ТЭ на относительное движение галактик, когда роль ТЭ может стать сравнимой с притяжением между галактиками [29–31]. Временные масштабы при этом столь велики, что наблюдать можно только результаты длительного действия различных факторов.

Решение задачи Кеплера в присутствии ТЭ было получено в квазиньютоновском приближении в работе [33]. Общее аналитическое решение, справедливое для произвольных Λ, было записано через различные эллиптические интегралы с использованием табличных формул [34]. Это громоздкое решение не очень удобно для анализа различных физических эффектов в задаче Кеплера, связанных с наличием ТЭ. В настоящей работе, в задаче о движении двух гравитирующих тел, наличие ТЭ рассматривается как возмущающий фактор, аналогично [22]. При этом используется несколько отличающийся метод усреднения по траектории. В дополнение к частоте прецессии орбиты, полученной в [22], вычисляется поправка к частоте орбитального движения (или, эквивалентно, к интервалу времени между двумя прохождениями через перицентр) за счет ТЭ. Эта поправка имеет тот же порядок, что и частота вращения перицентра, и потребовала более точного рассмотрения по сравнению с [22]. На основе используемого метода можно получить следующие по порядку приближения и исследовать отличия от усредненного движения.

2. КЕПЛЕРОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ В ВАКУУМЕ

Движение двух гравитирующих тел с массами m_1, m_2 относительно друг друга сводится к уравнению Кеплера, которое описывает движение тела с приведенной массой $m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ вокруг неподвижного тела с массой $M = m_1 + m_2$. Система уравнений для компонент (r, ϕ) вектора расстояния $\mathbf{r}$ между гравитирующими телами m и M имеет интегралы энергии E и углового момента L [35]

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}, \quad L = mv_\phi r, \qquad v = \frac{dr}{dt}, \quad v_\phi = r\frac{d\phi}{dt}. \tag{1}$$

Решение этой системы при $E < 0$ описывает замкнутые эллиптические траектории вида [35]

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos(\phi - g)}. \tag{2}$$

Большая полуось a и эксцентриситет ϵ эллипса равны

$$a = \frac{GM}{2|E|}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3(GM)^2}}, \tag{3}$$

долгота перицентра g определяет направление линии апсид, истинная аномалия $\phi - g$ определяет положение точки на орбите, ϕ – долгота.

3. ПРЕЦЕССИЯ ОРБИТ В ПРИСУТСТВИИ ТЭ

Присутствие темной энергии в квазиньютоновском приближении учитывается дополнительной радиальной силой отталкивания, что приводит к изменению интеграла энергии, который принимает следующий вид

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} - \frac{\Lambda mc^2}{6}r^2. \tag{4}$$

Как и во всяком центральном поле, движение происходит в плоскости. Орбиты в этой плоскости становятся незамкнутыми. Если влияние темной энергии считать малым возмущающим фактором, то орбита может быть представлена в виде медленно прецессирующей кеплеровской орбиты. В [22] скорости изменения оскулирующих элементов в этой задаче усреднены по периоду кеплеровского движения. В результате получены следующие усредненные уравнения:

$$\left\langle\frac{da}{dt}\right\rangle = 0, \quad \left\langle\frac{d\epsilon}{dt}\right\rangle = 0, \qquad \left\langle\frac{dg}{dt}\right\rangle = \frac{\Lambda c^2}{2\omega}\sqrt{1-\epsilon^2}. \tag{5}$$

Последнее соотношение в (5) дает частоту прецессии перицентра.

4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ГАМИЛЬТОНОВОЙ ФОРМЕ

Движение происходит в плоскости и описывается гамильтоновой системой с двумя степенями свободы. Будем использовать канонические переменные Делоне $(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2)$ [36]:

$$I_1 = \sqrt{\mu a}, \quad \varphi_1 = l, \qquad I_2 = \sqrt{\mu a(1-\epsilon^2)}, \quad \varphi_2 = g. \tag{6}$$

Здесь $\mu = GM$, а l – средняя аномалия в задаче Кеплера. Напомним, что в задаче Кеплера средняя аномалия – это угловая переменная, которая равномерно изменяется при движении тел по орбите. Скорость ее изменения (среднее движение) $\omega = \sqrt{GM}/a^{3/2}$. Средняя аномалия выражается через эксцентрическую аномалию ξ с помощью уравнения Кеплера [35, 36]

$$l = \xi - \epsilon \sin \xi. \tag{7}$$

Гамильтониан задачи H пропорционален полной энергии, $H = E/m$. В переменных Делоне гамильтониан записывается в виде:

$$\begin{gathered} H = H_0(I_1) + \varepsilon H_1(I_1, I_2, \varphi_1), \\ H_0 = -\frac{\mu^2}{2I_1^2}, \quad H_1 = -r^2. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь r^2 должно быть выражено через I_1, I_2, φ_1. Величина $\varepsilon = \frac{\Lambda c^2}{6}$ будет считаться малым параметром задачи, по которому проводятся разложения (это не безразмерная величина, но ее удобно использовать в разложениях, чтобы не вводить дополнительно безразмерный малый параметр). Этому гамильтониану соответствуют уравнения движения

$$\begin{gathered} \dot{I}_1 = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_1}, \quad \dot{\varphi}_1 = \frac{\partial H_0}{\partial I_1} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I_1}, \\ \dot{I}_2 = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_2} = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I_2}. \end{gathered} \tag{9}$$

В этой записи учтено, что H_0 зависит только от I_1, и поэтому частные производные H_0 по остальным переменным обращаются в 0.

Величина I_2 пропорциональна угловому моменту, $I_2 = L/m$, и является первым интегралом задачи, $I_2 = \mathrm{const}$. В терминах уравнений (9) это связано с тем, что гамильтониан не зависит от угла φ_2. Соответственно частная производная гамильтониана по φ_2 тождественно обращается в 0, а канонически сопряженная к φ_2 переменная I_2 является первым интегралом.

Задача имеет также интеграл энергии $H = H_0(I_1) + \varepsilon H_1(I_1, I_2, \varphi_1) = h = \mathrm{const}$, так как гамильтониан не зависит явно от времени.

Рассматриваемая задача интегрируема: для I_1 и φ_1 получается гамильтонова система с одной степенью свободы, зависящая от I_2 как от параметра. По найденным решениям этой системы можно затем получить зависимость φ_2 от времени квадратурой [33].

5. ПРИМЕНЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

5.1. Общее описание процедуры Делоне–Цейпеля

Мы будем строить приближенные решения при малых ε. В рассматриваемой задаче одна быстро меняющаяся угловая переменная, угол φ_1, и две медленно меняющиеся переменные, I_1 и φ_2 (переменную I_2 можно рассматривать как параметр задачи). Для описания динамики будем использовать процедуру канонической теории возмущений в форме[1] Делоне–Цейпеля [36]. Эта процедура применительно к рассматриваемой задаче состоит в том, что делается каноническая 2π-периодическая по φ_1, φ_2, близкая к тождественной (отличающаяся от тождественной величинами порядка ε) замена переменных I_1, I_2, φ_1, $\varphi_2 \mapsto J_1$, J_2, ψ_1, ψ_2 такая, что гамильтониан в новых переменных зависит от быстрой угловой переменной ψ_1 лишь в членах выше заданного порядка. Если мы хотим исключить ψ_1 из гамильтониана вплоть до членов порядка ε^n включительно в разложении по малому параметру ε, то производящая функция нужной замены переменных ищется в виде многочлена степени n по ε. Отбрасывая в гамильтониане малый член порядка ε^{n+1}, получаем гамильтониан, не зависящий от переменной ψ_1. В полученной гамильтоновой системе величина J_1 является первым интегралом, $J_1 = \mathrm{const}$, в соответствии с гамильтоновыми уравнениями движения. Для остальных переменных получается система с меньшим на единицу числом степеней свободы, зависящая от J_1 как от параметра, причем все переменные в этой системе меняются медленно. После решения этой системы приближенное решение исходной системы получается с помощью обращения построенной замены переменных.

Для рассматриваемой задачи описанная процедура еще более упрощается из-за того, что гамильтониан не зависит от φ_2. Тогда процедура организуется так, что новый гамильтониан не зависит от ψ_2, и $J_2 = I_2 = \mathrm{const}$. Получается, что величины $\dot{\psi}_1$, $\dot{\psi}_2$ постоянны. Это средние частоты изменения углов φ_1, φ_2.

Мы ограничимся первым приближением описанной процедуры: возьмем $n = 1$. Делаем кано-

[1] Эта процедура была предложена для неинтегрируемых задач, но она полезна и при построении приближенных решений в более простых случаях, когда рассматриваемая задача интегрируема и имеет точное решение. К тем же теоретическим результатам привело бы и использование более приспособленной для компьютерной реализации процедуры Хори–Деприта [37]. В первом приближении процедуры Делоне–Цейпеля и Хори–Деприта эквивалентны.

ническую замену переменных $(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \mapsto$ $\mapsto (J_1, J_2, \psi_1, \psi_2)$ с производящей функцией

$$W = J_1\varphi_1 + J_2\varphi_2 + \varepsilon S(J_1, J_2, \varphi_1),$$

где S – пока не определенная 2π-периодическая по φ_1 функция (производящая функция зависит от старых координат φ_1, φ_2 и новых импульсов J_1, J_2).

Старые и новые переменные связаны соотношениями

$$I_1 = J_1 + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial \varphi_1}, \quad I_2 = J_2 + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial \varphi_2} = J_2,$$
$$\psi_1 = \varphi_1 + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial J_1}, \quad \psi_2 = \varphi_1 + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial J_2}. \tag{10}$$

Замена переменных (10) близка к тождественной.

Подставляя в гамильтониан выражение для I_1 через J_1, φ_1, I_2 из (10), получаем

$$H = H_0\left(J_1 + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial \varphi_1}\right) + \varepsilon H_1\left(J_1 + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial \varphi_1}, I_2, \varphi_1\right) =$$
$$= H_0(J_1) + \varepsilon\left[\frac{\partial H_0(J_1)}{\partial J_1}\frac{\partial S}{\partial \varphi_1} + H_1(J_1, I_2, \varphi_1)\right] + O(\varepsilon^2).$$

Обозначим $\bar{H}_1$ среднее от H_1 по φ_1. Хотим выбрать S так, чтобы было

$$\frac{\partial H_0(J_1)}{\partial J_1}\frac{\partial S}{\partial \varphi_1} + H_1(J_1, I_2, \varphi_1) = \bar{H}_1(J_1, I_2).$$

Тогда S получается интегрированием по φ_1 из соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi_1} = -\frac{1}{\partial H_0(J_1)/\partial J_1}[H_1(J_1, I_2, \varphi_1) - \bar{H}_1(J_1, I_2)]. \tag{11}$$

Так как правая часть (11) 2π-периодическая функция от φ_1 со средним, равным 0, то S получается 2π-периодической функцией от φ_1. Мы будем выбирать функцию S так, чтобы ее среднее по φ_1 было равно 0. Гамильтониан в новых переменных

$$H = H_0(J_1) + \varepsilon\bar{H}_1(J_1, I_2) + O(\varepsilon^2).$$

Пренебрегая членом порядка ε^2, получаем гамильтониан $\mathscr{H} = H_0(J_1) + \varepsilon\bar{H}_1(J_1, I_2)$ и уравнения движения

$$\dot{J}_1 = 0, \quad \dot{I}_2 = 0,$$
$$\dot{\psi}_1 = \frac{\partial H_0(J_1)}{\partial J_1} + \varepsilon\frac{\partial \bar{H}_1}{\partial J_1},$$
$$\dot{\psi}_2 = \varepsilon\frac{\partial \bar{H}_1}{\partial I_2}.$$

Здесь $\bar{H}_1 = \bar{H}_1(J_1, I_2)$.

5.2. Поправки к кеплеровскому движению

Проведем выкладки. Среднее от H_1 по φ_1 есть

$$\bar{H}_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1 d\varphi_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi_1, \tag{12}$$

т.е. с точностью до знака, $\bar{H}_1$ – это нулевой член в известном разложении функции r^2 в ряд Фурье по средней аномалии (см., напр., [36]):

$$\bar{H}_1 = -a^2\left(1 + \frac{3\epsilon^2}{2}\right). \tag{13}$$

Поскольку

$$a^2 = I_1^4/\mu^2, \quad \epsilon^2 = 1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}, \tag{14}$$

получаем

$$\bar{H}_1 = -\frac{I_1^4}{\mu^2}\left(1 + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{I_2^2}{I_1^2}\right)\right) = -\left(\frac{5}{2}\frac{I_1^4}{\mu^2} - \frac{3}{2}\frac{I_1^2 I_2^2}{\mu^2}\right). \tag{15}$$

Заменяя здесь I_1 на J_1, как это предписывается изложенной процедурой, получаем гамильтониан первого приближения

$$\mathscr{H} = H_0(J_1) + \varepsilon\bar{H}_1(J_1, I_2), \quad H_0(J_1) = -\frac{\mu^2}{2J_1^2},$$
$$\bar{H}_1(J_1, I_2) = -\left(\frac{5}{2}\frac{J_1^4}{\mu^2} - \frac{3}{2}\frac{J_1^2 I_2^2}{\mu^2}\right). \tag{16}$$

Для изменения угла ψ_2 в рассматриваемом приближении получаем

$$\dot{\psi}_2 = \varepsilon\frac{\partial \bar{H}_1(J_1, I_2)}{\partial I_2} = 3\varepsilon J_1^2 I_2/\mu^2. \tag{17}$$

Эта формула дает в рассматриваемом приближении среднюю частоту вращения перицентра. Погрешность этой формулы $\sim\varepsilon^2$. Без увеличения погрешности можно считать, что J_1 связано с величиной энергии h соотношением $h = -\mu^2/(2J_1^2)$. Определяя отсюда J_1 и подставляя в (17), получаем для средней частоты вращения перицентра выражение

$$\dot{\psi}_2 = \frac{3}{2}\varepsilon\frac{I_2}{|h|}. \tag{18}$$

Для изменения угла ψ_1 в рассматриваемом приближении получаем

$$\dot{\psi}_1 = \frac{\partial H_0(J_1)}{\partial J_1} + \varepsilon\frac{\partial \bar{H}_1(J_1, I_2)}{\partial J_1}, \tag{19}$$

или, в явном виде

$$\dot{\psi}_1 = \frac{\mu^2}{J_1^3} - \frac{\varepsilon}{\mu^2}(10J_1^3 - 3J_1 I_2^2). \tag{20}$$

Эта формула дает в рассматриваемом приближении среднюю частоту изменения средней аномалии. Погрешность этой формулы $\sim\varepsilon^2$. Без увеличения погрешности можно во втором члене этой формулы определять J_1 из соотношения $h = -\mu^2/(2J_1^2)$, поскольку сам этот член уже порядка ε. В первом члене этой формулы, поскольку он порядка 1, нужно действовать точнее: использовать для определения J_1 соотношение $\mathcal{H} = h$ и формулы (16), т.е.

$$-\frac{\mu^2}{2J_1^2} - \frac{\varepsilon}{\mu^2}\left(\frac{5}{2}J_1^4 - \frac{3}{2}J_1^2 I_2^2\right) = h. \tag{21}$$

Для J_1 с погрешностью порядка ε^2 отсюда получаем

$$\frac{1}{J_1^3} = \left(\frac{-2h}{\mu^2}\right)^{3/2} - \frac{3\varepsilon}{2\mu^4}\times \left[\frac{5}{(-2h/\mu^2)^{3/2}} - \frac{3}{(-2h/\mu^2)^{1/2}} I_2^2\right] + O(\varepsilon^2). \tag{22}$$

Теперь в главном приближении из (20) получаем

$$\dot\psi_1 = \mu^2\left(\frac{-2h}{\mu^2}\right)^{3/2} - \frac{\varepsilon}{\mu^2}\times \left[\frac{35}{2(-2h/\mu^2)^{3/2}} - \frac{15}{2(-2h/\mu^2)^{1/2}} I_2^2\right]. \tag{23}$$

Эта формула определяет среднюю частоту движения тел относительно положения перицентра.

В обозначениях разделов 2, 3 формулы для средней частоты прецессии перицентра $\langle\dot g\rangle \equiv \dot\psi_1$, и средней частоты изменения средней аномалии $\langle\dot l\rangle \equiv \dot\psi_2$ принимают вид (мы выражаем результаты через сохраняющиеся величины: полную энергию E и угловой момент L):

$$\langle\dot g\rangle = \frac{\Lambda c^2}{4}\frac{L}{|E|}, \tag{24}$$

$$\langle\dot l\rangle = \frac{(2|E|/m)^{3/2}}{GM} - \frac{5\Lambda c^2}{12GM}\times \left[\frac{7(GM)^2}{(2|E|/m)^{3/2}} - \frac{3}{(2|E|/m)^{1/2}}(L/m)^2\right]. \tag{25}$$

Вид этих формул упрощается, если использовать в них усредненные значения большой полуоси и экцентриситета $\overline{a}$, $\overline{\epsilon}$, определяемые соотношениями $J_1 = \sqrt{GM\overline{a}}$, $I_2 = \sqrt{GM\overline{a}(1-\overline{\epsilon}^2)}$:

$$\langle\dot g\rangle = \frac{\Lambda c^2}{2\overline{\varpi}}\sqrt{1-\epsilon^2}, \tag{26}$$

$$\langle\dot l\rangle = \overline{\varpi} - \frac{\Lambda c^2}{6\overline{\varpi}}(7 + 3\overline{\epsilon}^2). \tag{27}$$

Здесь $\overline{\varpi} = \sqrt{GM}/\overline{a}^{3/2}$ — среднее движение для невозмущенной кеплеровской орбиты с большой полуосью $\overline{a}$. Первая из этих формул получена в [22], см. (5).

Величины $\overline{a}$, $\overline{\epsilon}$ выражаются через полную энергию E и угловой момент L с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ по следующим формулам

$$\overline{a} = \frac{GM}{2|E|/m} + \frac{\Lambda c^2 GM}{48(|E|/m)^3}\left(5\frac{(GM)^2}{2|E|/m} - 3(L/m)^2\right),$$
$$\overline{\epsilon} = \sqrt{1 - \frac{(L/m)^2(2|E|/m)}{(GM)^2} + \frac{\Lambda c^2 (L/m)^2}{24}\times \left(5\frac{(GM)^2}{2|E|/m} - 3(L/m)^2\right)\left(1 - \frac{(L/m)^2(2|E|/m)}{(GM)^2}\right)^{-1/2}}. \tag{28}$$

Формула (25) позволяет найти время между прохождениями через перицентр с учетом возмущения (период орбитального движения). В рассматриваемом приближении это время равно

$$T = \frac{2\pi}{\langle\dot l\rangle} = \frac{2\pi}{\dfrac{(2|E|/m)^{3/2}}{GM} - \dfrac{5\Lambda c^2}{12GM}\left[\dfrac{7(GM)^2}{(2|E|/m)^{3/2}} - \dfrac{3}{(2|E|/m)^{1/2}}(L/m)^2\right]} \approx$$
$$\approx \frac{2\pi GM}{(2|E|/m)^{3/2}} + \frac{2\pi GM}{(2|E|/m)^3}\frac{5\Lambda c^2}{12}\left[\frac{7(GM)^2}{(2|E|/m)^{3/2}} - \frac{3}{(2|E|/m)^{1/2}}(L/m)^2\right]. \tag{29}$$

Здесь период выражен через первые интегралы исходной задачи. Можно без изменения порядка погрешности выразить член пропорциональный Λ через $\overline{a}$ и $\overline{\epsilon}$:

$$T = \frac{2\pi GM}{(2|E|/m)^{3/2}} + \frac{5\pi\Lambda c^2}{6\overline{\varpi}^3}(4 + 3\overline{\epsilon}^2). \tag{30}$$

Общая картина движения в рассматриваемой задаче такова. Большая полуось и эксцентриситет кеплеровского эллипса испытывают малые периодические колебания около постоянных значений $\overline{a}$, $\overline{\epsilon}$; долгота перицентра и средняя аномалия испытывают малые периодические колебания около равномерных вращений с частотами, задаваемыми формулами (24), (25). Эти малые колебания определяются из соотношений замены переменных (10). Ввиду громоздкости формул мы ограничимся нахождением функции S и колебаний большой полуоси и эксцентриситета.

Согласно (11) и (7),

$$S = -\frac{1}{\bar\omega}\int (H_1 - \bar H_1)(1-\epsilon\cos\xi)d\xi. \quad (31)$$

Здесь $\bar\omega = \partial H_0(J_1)/\partial J_1$ – частота кеплеровского движения, вычисленная в главном приближении. Использование в записи для S неопределенного интеграла указывает, что S определена с точностью до произвольной функции от медленных переменных. В дальнейшем мы выберем эту произвольную функцию так, чтобы среднее от S по φ_1 равнялось 0. Учитывая, что $r = a(1-\epsilon\cos\xi)$, и используя (13), получаем

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{\bar\omega}\left[\left(\int a^2(1-\epsilon\cos\xi)^3 d\xi\right) - \right.\\ &\quad \left. - a^2\left(1+\frac{3\epsilon^2}{2}\right)(\xi - \epsilon\sin\xi)\right] = \\ &= \frac{a^2}{\bar\omega}\left[\left(\int\left(1 - 3\epsilon\cos\xi + 3\epsilon^2\frac{1+\cos 2\xi}{2} - \right.\right.\right.\\ &\quad \left.\left. - \epsilon^3\frac{\cos 3\xi + 3\cos\xi}{4}\right)d\xi\right) - \\ &\quad \left. - \left(1+\frac{3\epsilon^2}{2}\right)(\xi-\epsilon\sin\xi)\right] = \\ &= \frac{a^2}{\bar\omega}\left[-3\epsilon\sin\xi + \frac{3}{4}\epsilon^2\sin 2\xi - \frac{1}{12}\epsilon^3(\sin 3\xi + \right.\\ &\quad \left. + 9\sin\xi) + \epsilon\left(1+\frac{3\epsilon^2}{2}\right)\sin\xi\right] + C = \\ &= \frac{a^2}{\bar\omega}\left[\epsilon\left(-2+\frac{3}{4}\epsilon^2\right)\sin\xi + \frac{3}{4}\epsilon^2\sin 2\xi - \right.\\ &\quad \left. - \frac{1}{12}\epsilon^3\sin 3\xi\right] + C.\end{aligned}$$

Здесь C – произвольная функция от a, ϵ. Мы выберем C так, чтобы среднее от S по φ_1 равнялось 0. Получаем

$$\begin{aligned}C = -\frac{a^2}{\bar\omega}\int_0^{2\pi}&\left(\epsilon\left(-2+\frac{3}{4}\epsilon^2\right)\sin\xi + \frac{3}{4}\epsilon^2\sin 2\xi - \right.\\ &\left. - \frac{1}{12}\epsilon^3\sin 3\xi\right)(1-\epsilon\cos\xi)d\xi = 0.\end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned}S = \frac{a^2}{\bar\omega}&\left[\epsilon\left(-2+\frac{3}{4}\epsilon^2\right)\sin\xi + \right.\\ &\left. + \frac{3}{4}\epsilon^2\sin 2\xi - \frac{1}{12}\epsilon^3\sin 3\xi\right],\end{aligned} \quad (32)$$

где a, ϵ должны быть заменены на $\bar a$, $\bar\epsilon$ и выражены через J_1, I_2 согласно (14), а эксцентрическая аномалия ξ должна быть выражена через среднюю аномалию φ_1 согласно (7).

Согласно (10) и (11), величины I_1 и J_1 связаны соотношением

$$I_1 = J_1 - \varepsilon\frac{1}{\bar\omega}(H_1 - \bar H_1). \quad (33)$$

Используя (13), получаем

$$\begin{aligned}I_1 &= J_1 + \varepsilon\frac{\bar a^2}{\bar\omega}\left((1-\bar\epsilon\cos\xi)^2 - \left(1+\frac{3\bar\epsilon^2}{2}\right)\right) = \\ &= J_1 + \varepsilon\frac{\bar a^2}{\bar\omega}\left(-\bar\epsilon^2 - 2\bar\epsilon\cos\xi + \frac{1}{2}\bar\epsilon^2\cos 2\xi\right).\end{aligned}$$

Согласно (6) $I_1 = \sqrt{GMa}$, $J_1 = \sqrt{GM\bar a}$. Тогда

$$\begin{aligned}\sqrt{GMa} &= \sqrt{GM\bar a} + \\ &+ \varepsilon\frac{\bar a^2}{\bar\omega}\left(-\bar\epsilon^2 - 2\bar\epsilon\cos\xi + \frac{1}{2}\bar\epsilon^2\cos 2\xi\right),\end{aligned}$$

откуда в рассматриваемом приближении

$$a = \bar a + \varepsilon\frac{2}{\sqrt{GM}}\frac{\bar a^{5/2}}{\bar\omega}\left(-\bar\epsilon^2 - 2\bar\epsilon\cos\xi + \frac{1}{2}\bar\epsilon^2\cos 2\xi\right).$$

Учитывая, что $\bar\omega = \sqrt{GM}/\bar a^{3/2}$, а также что $\varepsilon = \Lambda c^2/6$, получаем

$$a = \bar a + \frac{\Lambda c^2\bar a}{3\bar\omega^2}\left(-\bar\epsilon^2 - 2\bar\epsilon\cos\xi + \frac{1}{2}\bar\epsilon^2\cos 2\xi\right). \quad (34)$$

Условие сохранения углового момента позволяет определить колебания эксцентриситета по колебаниям большой полуоси. Из соотношения $a(1-\epsilon^2) = \bar a(1-\bar\epsilon^2)$ получаем

$$\epsilon = \bar\epsilon + \frac{\Lambda c^2(1-\bar\epsilon^2)}{6\bar\omega^2}\left(-\bar\epsilon - 2\cos\xi + \frac{1}{2}\bar\epsilon\cos 2\xi\right). \quad (35)$$

Введем углы $\bar l = \psi_1$, $\bar g = \psi_2$. Эти углы изменяются равномерно с угловыми скоростями (27), (26). Средняя аномалия $l = \varphi_1$ и долгота перицентра $g = \varphi_2$ совершают малые колебания относительно этих углов в соответствии с двумя последними формулами в (10), которые без изменения погрешности представляются в виде

$$l = \bar l - \varepsilon\frac{\partial S}{\partial I_1}, \quad g = \bar g - \varepsilon\frac{\partial S}{\partial I_2}. \quad (36)$$

Здесь функция $S = S(I_1, I_2, \bar l)$ задается формулой (32), в которой большая полуось орбиты a и эксцентриситет ϵ должны быть выражены через переменные Делоне I_1, I_2 из соотношений (6), а эксцентрическая аномалия ξ рассматривается как неявная функция от $\bar l$ согласно уравнению Кеплера $\bar l = \xi - \epsilon\sin\xi$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача о движении двух гравитирующих тел при наличии ТЭ рассмотрена как возмущение задачи Кеплера. В рамках первого приближения в теории возмущений Делоне–Цейпеля описано поведение элементов кеплеровской орбиты под влиянием ТЭ. Большая полуось и эксцентриситет кеплеровской орбиты испытывают малые периодические колебания около своих средних значений. Эти средние значения даются формулами (28), а колебания – формулами (34) и (35). Долгота перицентра испытывает малые периодические колебания относительно медленного равномерного вращения с частотой (26). Ранее формула для этой частоты была получена несколько иным методом в [22]. Средняя аномалия гравитирующих тел испытывает малые периодические колебания относительно медленного равномерного вращения с частотой, задаваемой формулой (27). Эта формула учитывает поправку к среднему движению за счет ТЭ. Колебания относительно этих равномерных вращений даются формулами (36) (мы не проводим в явном виде вычислений в (36) ввиду их громоздкости). Период орбитального движения, определяемый как время между прохождениями через перицентр, отличается от кеплеровского периода малой поправкой. Эта поправка учтена в формуле для периода (30). Колебания элементов орбиты происходят с этим периодом.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа Г.С. Б.-К. частично поддержана грантами РФФИ 18-02-00619, 20-02-000455, 20-52-12053. Работа А.И.Н. частично поддержана грантом фонда Леверхульме № RPG-2018-143.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, et al.*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999).
2. *A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, et al.*, Astron. J. **116**, 1009 (1998).
3. *D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, E. Komatsu, et al.*, Astrophys. J. Suppl. **148**, 175 (2003).
4. *M. Tegmark, M. A. Strauss, M. R. Blanton, K. Abazajian, et al.*, Phys. Rev. D **69**(10), id. 103501 (2004).
5. *S. Weinberg*, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
6. *S. M. Carroll, W. H. Press, and E. L. Turner*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **30**, 499 (1992).
7. *S. M. Carroll*, Liv. Rev. Relativity **4**, 1 (2001).
8. *W. Rindler*, *Relativity: Special, General, and Cosmological* (Oxford, UK: Oxford University Press, 2001).
9. *C. O'Raifeartaigh, M. O ́Keeffe, W. Nahm, and S. Mitton*, European Phys. J. H **43**(1), id. 73 (2018).
10. *B. Novosyadlyj*, European Phys. J. H **43**(3), id. 267 (2018).
11. *L. Iorio*, Universe **1**, 38 (2015).
12. *I. Debono and G. F. Smoot*, Universe **2**, 23 (2016).
13. *J. Islam*, Phys. Letters A **97**, 239 (1983).
14. *J. Cardona and J. Tejero*, Astrophys. J. **493**, 52 (1998).
15. *L. Iorio*, Intern. J. Modern Physics D **15**, 473 (2006).
16. *L. Iorio*, Adv. Astron. **2008**, id. 268647 (2008).
17. *H. Arakida*, Intern. J. Theor. Phys. **52**, 1408 (2013).
18. *S. S. Ovcherenko and Z. K. Silagadze*, Ukraine J. Phys. **61**, 342 (2016).
19. *L. Iorio*, Universe **4**, 59 (2018).
20. *J. M. Cohen and B. Mashhoon*, Phys. Letters A **181**, 353 (1993).
21. *E. Hackmann and C. Lammerzahl*, Phys. Rev. D **90**, id. 044059 (2014).
22. *A. Kerr, J. Hauck, and B. Mashhoon*, Classical and Quantum Gravity **20**(13), 2727 (2003).
23. *M. Sereno and P. Jetzer*, Phys. Rev. D **73**, id. 063004 (2006).
24. *V. Kagramanova, J. Kunz, and C. Lammerzahl*, Phys. Letters B **634**, 465 (2006).
25. *G. Adkins, J. McDonnell, and R. Fell*, Phys. Rev. D **75**, id. 064011 (2007).
26. *G. Adkins and J. McDonnell*, Phys. Rev. D **75**, id. 082001 (2007).
27. *M. Sereno and P. Jetzer*, Phys. Rev. D **75** id. 064031 (2007).
28. *O. I. Chashchina and Z. K. Silagadze*, Phys. Rev. D **77**, id. 107502 (2008).
29. *A. D. Chernin*, Physics Uspekhi **44**, 1099 (2001).
30. *A. D. Chernin*, Physics Uspekhi **51**, 253 (2008).
31. *G. S. Bisnovatyi-Kogan and A. D. Chernin*, Astrophys. Space Sci. **338**, 337 (2012).
32. *G. S. Bisnovatyi-Kogan and M. Merafina*, Intern. J. Theor. Phys. D **28**, id. 1950155 (2019).
33. *N. V. Emelyanov and M. Y. Kovalyov*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **429**, 3477 (2013).
34. *I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik*, *Table of integrals, series and products*, 4th ed. (New York: Academic Press, 1965).
35. *L. Landau and E. Lifshitz*, *Mechanics. Course of theoretical physics* (Pergamon Press, 1969).
36. *Г. Н. Дубошин*, *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике* (М.: Наука, 1976).
37. *Г. Е. О. Джакалья*, *Методы теории возмущений для нелинейных систем* (М.: Наука, 1979).