АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2020, том 97, № 9, с. 747–753

УДК 521.1

ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ ПРИ ВОЗМУЩАЮЩЕМ УСКОРЕНИИ, ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ПО ЗАКОНУ ОБРАТНЫХ КВАДРАТОВ, В СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА, СВЯЗАННОЙ С РАДИУСОМ-ВЕКТОРОМ

© 2020 г. Т. Н. Санникова[1,*], К. В. Холшевников[2, 3,**]

[1] Крымская астрофизическая обсерватория РАН, Научный, Россия

[2] Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

[3] Институт прикладной астрономии РАН, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: tnsannikova@gmail.com

**E-mail: kvk@astro.spbu.ru

Поступила в редакцию 06.05.2020 г.
После доработки 30.05.2020 г.
Принята к публикации 30.05.2020 г.

Рассмотрено движение точки нулевой массы под действием притяжения к центральному телу $\mathcal{S}$ и возмущающего ускорения $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/r^2$, обратно пропорционального квадрату расстояния до $\mathcal{S}$. Модуль $\mathbf{P}'$ считаем малым по сравнению с основным ускорением, вызванным притяжением центрального тела, а компоненты вектора $\mathbf{P}$ — постоянными в обычной для астрономии системе отсчета с началом в центральном теле и осями, направленными по радиусу-вектору, трансверсали (перпендикуляру к радиусу-вектору в оскулирующей плоскости в сторону движения) и бинормали (направленной по вектору площадей). Ранее нами было выполнено осредняющее преобразование уравнений движения типа Эйлера в оскулирующих элементах, и получены эволюционные дифференциальные уравнения движения в средних элементах в первом приближении по малому параметру. Настоящая статья посвящена решению осредненных уравнений. Они проинтегрированы полностью. Более того, квадратуры удалось выразить через элементарные функции. Найденное решение имеет особенности при нулевом эксцентриситете и при отсутствии трансверсального ускорения. Эти и некоторые другие частные случаи рассмотрены отдельно. Можно указать по меньшей мере два приложения рассматриваемой задачи. Это движение астероида с учетом эффекта Ярковского-Радзиевского и движение космического аппарата с солнечным парусом. В обоих случаях возмущающее воздействие обратно пропорционально квадрату расстояния от Солнца.

DOI: 10.31857/S0004629920100084

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим движение точки нулевой массы $\mathcal{A}$ (например, астероида) под действием притяжения к центральному телу $\mathcal{S}$ (например, к Солнцу) и возмущающего ускорения $\mathbf{P}'$. Введем обычную в астрономии неинерциальную систему отсчета $\mathbb{O}$ с началом $\mathcal{S}$ и ортами осей $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, направленными по радиусу-вектору, трансверсали (перпендикуляру к радиусу-вектору в плоскости оскулирующей орбиты в сторону движения) и бинормали (направленной по вектору площадей).

Пусть возмущающее ускорение подчиняется закону обратных квадратов $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/r^2$, где компоненты S, T, W вектора $\mathbf{P}$ постоянны в системе $\mathbb{O}$, и мало́ по сравнению с основным ускорением $\varkappa^2/r^2$:

$$\max \frac{|\mathbf{P}'|}{\varkappa^2 r^{-2}} = \max \frac{|\mathbf{P}|}{\varkappa^2} = \mu \ll 1. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{r} = \mathcal{S}\mathcal{A}$, $r = |\mathbf{r}|$, $\varkappa^2$ — произведение постоянной тяготения на массу $\mathcal{S}$. Рассматриваемая модель может найти применение при исследовании движения небесного тела с учетом давления солнечного света и эффекта Ярковского-Радзиевского [1, 2], а также при движении КА с солнечным парусом [3].

В [4] мы получили уравнения движения типа Эйлера в оскулирующих элементах, явный вид осредняющей замены переменных и уравнения движения в средних элементах. В этой статье мы займемся интегрированием последних уравнений.

Задачи при $\mathbf{P}' = \mathrm{const}$ и $\mathbf{P} = \mathrm{const}$ во многом схожи, что позволяет иногда ограничиваться ссылками на [5], где интегрировались осредненные уравнения движения при $\mathbf{P}' = \mathrm{const}$.

В первом порядке малости уравнения движения в средних элементах выведены в [4]:

$$
\begin{gathered}
\dot{\omega} = -\frac{3\omega^2}{\varkappa^2\eta^2}T, \\
\dot{e} = \frac{\omega e}{\varkappa^2(1+\eta)}T, \\
\dot{\imath} = -\frac{\omega e}{\varkappa^2\eta(1+\eta)}\cos gW, \\
\dot{\Omega} = -\frac{\omega e}{\varkappa^2\eta(1+\eta)\sin i}\sin gW, \\
\dot{g} = -\cos i\dot{\Omega} = \frac{\omega e \operatorname{ctg} i}{\varkappa^2\eta(1+\eta)}\sin gW, \\
\dot{M} = \omega - \frac{2\omega}{\varkappa^2}S.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Здесь в качестве шести независимых элементов приняты среднее движение ω, эксцентриситет e, наклон i, долгота восходящего узла Ω, аргумент перицентра g, средняя аномалия M. Используются также зависимые элементы $a = \varkappa^{2/3}\omega^{-2/3}$ — большая полуось, $\eta = \sqrt{1-e^2}$. Производная по времени t обозначена точкой (для i — жирной точкой).

2. ЭВОЛЮЦИЯ КРУГОВЫХ ОРБИТ

Пусть $e_0 = 0$, где индекс 0 указывает на значения переменных в начальную эпоху $t = 0$. Очевидно, в этом случае уравнения (2) допускают решение

$$
e = 0, \quad i = i_0, \quad \Omega = \Omega_0, \quad g = g_0.
$$

Оставшиеся уравнения (2) упрощаются:

$$
\dot{\omega} = -\frac{3\omega^2}{\varkappa^2}T, \quad \dot{\lambda} = \omega - \frac{2\omega}{\varkappa^2}S. \tag{3}
$$

При $e = 0$ средняя аномалия и аргумент перицентра теряют смысл. Угловое положение определяется единственной переменной — средней долготой $\lambda = \Omega + g + M$.

Если $T = 0$, то

$$
\omega = \omega_0, \quad a = a_0, \quad \lambda = \lambda_0 + \omega_0\left(1 - \frac{2S}{\varkappa^2}\right)t. \tag{4}
$$

Решение определено на всей оси времени $-\infty < t < \infty$.

Пусть $T \neq 0$. В первом уравнении (3) переменные разделяются, и его решение элементарно. Подстановка решения во второе уравнение (3) позволяет легко найти λ:

$$
\begin{gathered}
\omega = \omega_0\left(1 + \frac{t}{t_1}\right)^{-1}, \quad a = a_0\left(1 + \frac{t}{t_1}\right)^{2/3}, \\
\lambda = \lambda_0 + \omega_0 t_1\left(1 - \frac{2S}{\varkappa^2}\right)\ln\left(1 + \frac{t}{t_1}\right),
\end{gathered} \tag{5}
$$

где

$$
t_1 = \frac{\varkappa^2}{3T\omega_0}. \tag{6}
$$

Согласно (1) коэффициент $1 - 2S\varkappa^{-2}$ положителен.

Заметим, что при $T \to 0$, $t_1 \to \infty$ решение (5) переходит в (4).

Определим интервал задания непродолжаемого решения [6, 7], т.е. область определения $t \in (t_*, t^*)$ решения (5).

Пусть $T > 0$, $t_1 > 0$. Очевидно, $t_* = -t_1$, $t^* = \infty$. При убывании t, т.е. при движении в прошлое, ω возрастает до бесконечности, a убывает до нуля, λ убывает до минус бесконечности *за конечное время*. Точка $\mathscr{A}$ падает на $\mathscr{S}$ по спирали, делая бесконечное число оборотов. При возрастании t величина ω убывает до нуля, a возрастает до бесконечности, λ возрастает до бесконечности *за бесконечное время*. Точка $\mathscr{A}$ удаляется на бесконечность по спирали, делая бесконечное число оборотов.

Пусть $T < 0$, $t_1 < 0$. Очевидно, $t_* = -\infty$, $t^* = -t_1$. При убывании t величина ω убывает до нуля, a возрастает до бесконечности, λ убывает до минус бесконечности *за бесконечное время*. Точка $\mathscr{A}$ удаляется на бесконечность по спирали, делая бесконечное число оборотов. При возрастании t величина ω возрастает до бесконечности, величина a убывает до нуля, λ возрастает до бесконечности *за конечное время*. Точка $\mathscr{A}$ падает на $\mathscr{S}$ по спирали, делая бесконечное число оборотов.

Перейдем к некруговым орбитам. Осреднение по средней аномалии подразумевает эллиптичность оскулирующей орбиты. Поэтому в дальнейшем полагаем, что $0 < e_0 < 1$, $0 < \eta_0 < 1$.

3. ЭВОЛЮЦИЯ ω И e

Первые два уравнения (2) не зависят от остальных и легко решаются.

Пусть $T = 0$. Тогда $\omega, e = \mathrm{const}$.

Пусть $T \neq 0$. Переходя от e к η, придадим первым двум уравнениям (2) вид

$$\dot{\omega} = -\frac{3\omega^2}{\varkappa^2\eta^2}T, \quad \dot{\eta} = -\frac{\omega(1-\eta)}{\varkappa^2\eta}T. \tag{7}$$

Отсюда выводим линейное однородное уравнение

$$\frac{d\omega}{d\eta} = \frac{3}{\eta(1-\eta)}\omega.$$

Вот его решение:

$$\omega = \omega_0\left[\frac{\eta(1-\eta_0)}{\eta_0(1-\eta)}\right]^3. \tag{8}$$

С ростом η от 0 до 1 правая часть возрастает от нуля до бесконечности.

Подставим (8) во второе уравнение (7) и разделим переменные:

$$\frac{(1-\eta)^2 d\eta}{\eta^2} = -\frac{\omega_0}{\varkappa^2}\left(\frac{1-\eta_0}{\eta_0}\right)^3 T dt. \tag{9}$$

Интегрируя (9), выразим время в виде явной функции η:

$$\frac{\omega_0}{\varkappa^2}\left(\frac{1-\eta_0}{\eta_0}\right)^3 Tt = f(\eta) - f(\eta_0) \tag{10}$$

при

$$f(\eta) = 2\ln\eta + \frac{1}{\eta} - \eta. \tag{11}$$

С ростом η от 0 до 1 функция f убывает от бесконечности до нуля, а правая часть (10) убывает от бесконечности до $-f(\eta_0) < 0$. Обозначим

$$t_2 = \frac{\varkappa^2}{\omega_0 T}\left(\frac{\eta_0}{1-\eta_0}\right)^3 f(\eta_0). \tag{12}$$

Пусть $T > 0$, $t_2 > 0$. Тогда $t_* = -t_2$, $t^* = \infty$. По доказанному выше каждому $t \in (t_*, t^*)$ отвечает единственное значение η. При $t \to t_*$ справедливо $\eta \to 1$, $e \to 0$, $\omega \to \infty$, $a \to 0$. При $t \to t^*$ справедливо $\eta \to 0$, $e \to 1$, $\omega \to 0$, $a \to \infty$.

Пусть $T < 0$, $t_2 < 0$. Теперь $t_* = -\infty$, $t^* = -t_2$. По-прежнему каждому $t \in (t_*, t^*)$ отвечает единственное значение η. При $t \to t_*$ справедливо $\eta \to 0$, $e \to 1$, $\omega \to 0$, $a \to \infty$. При $t \to t^*$ справедливо $\eta \to 1$, $e \to 0$, $\omega \to \infty$, $a \to 0$.

При $e \sim 0$, $\eta \sim 1$ вычисления $f(\eta)$ по формуле (11) содержат разности почти одинаковых чисел, что приводит к потере точности. При $e_0 \sim 0$, $\eta_0 \sim 1$ правая часть (12) содержит неопределенность вида $0:0$. Поэтому при малых эксцентриситетах следует пользоваться рядом

$$f(\eta) = e^6\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{2n}, \quad c_n = \frac{(2n+3)!!}{(2n+4)!!} - \frac{1}{n+3}, \tag{13}$$

легко выводимым из стандартных биномиального и логарифмического разложений. По индукции легко доказать положительность c_n, а из формулы Стирлинга получить асимптотику

$$c_n \sim \sqrt{\frac{1}{\pi(n+2)}} - \frac{1}{n+3}.$$

Вывести общий член аналогичного ряда по степеням e_0 для t_2 не удалось. Однако представить нужные нам величины простой комбинацией рядов по степеням e и e_0 несложно. Действительно,

$$\frac{1-\eta}{\eta} = e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}e^{2n}.$$

Отсюда получаем представление для t_2 и для кинематического уравнения (10)

$$t_2 = \frac{\varkappa^2}{\omega_0 T}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}e_0^{2n}\right]^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}c_n e_0^{2n}, \tag{14}$$

$$t = \frac{\varkappa^2}{\omega_0 T}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}e_0^{2n}\right]^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(\frac{e^6}{e_0^6}e^{2n} - e_0^{2n}\right). \tag{15}$$

Как и следовало ожидать, при $e_0 \to 0$ формула (14) переходит в (6); предел t_2 при $e_0 \to 1$ выводим из (12):

$$\lim_{e_0\to 0} t_2 = t_1, \quad \lim_{e_0\to 1} t_2 = 0.$$

Ряды по степеням e и e_0 сходятся при $e < 1$ и $e_0 < 1$ и расходятся к бесконечности при $e = 1$ и $e_0 = 1$.

4. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ПРИ $S \neq 0$, $T = W = 0$

Если $T = W = 0$, то $\omega, e, i, \Omega, g = \mathrm{const}$, а правая часть последнего уравнения (2) постоянна. Поэтому

$$M = M_0 + \omega_0\left(1 - \frac{2S}{\varkappa^2}\right)t,$$

причем $t_* = -\infty$, $t^* = \infty$.

В рассмотренном случае дополнительное возмущение не приводит к изменению конфигурации орбиты, а влияет только на положение тела на орбите, вызывая в зависимости от знака S постепенное отставание или опережение от невозмущенного положения.

5. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ПРИ $T \neq 0,\ S = W = 0$

В рассматриваемом случае $i, \Omega, g = \mathrm{const}$. С учетом результатов § 3 осталось решить лишь последнее уравнение (2). Используя (8), (9), представим его в форме

$$dM = \omega dt = -\frac{\varkappa^2 \eta d\eta}{T(1-\eta)},$$

что легко интегрируется:

$$M = M_0 + \frac{\varkappa^2}{T}\left(\eta + \ln\frac{1-\eta}{1-\eta_0} - \eta_0\right).$$

Пусть $T > 0,\ t_2 > 0,\ t_* = -t_2 < 0,\ t^* = \infty$. При $t \to t_*$ справедливо $M \to -\infty$. Точка $\mathcal{A}$ падает на $\mathcal{S}$ по спирали *за конечное время*, делая бесконечное число оборотов. При $t \to t^*$ справедливо

$$\lim_{t\to t^*} M = M_0 - \frac{\varkappa^2}{T}[\eta_0 + \ln(1-\eta_0)] > M_0. \quad (16)$$

Точка $\mathcal{A}$ удаляется на бесконечность по спирали *за бесконечное время*, делая конечное число оборотов.

Пусть $T < 0$, $t_2 < 0$, $t_* = -\infty$, $t^* = -t_2 > 0$. Формула (16) слегка меняется

$$\lim_{t\to t_*} M = M_0 - \frac{\varkappa^2}{T}[\eta_0 + \ln(1-\eta_0)] < M_0.$$

При движении в прошлое точка $\mathcal{A}$ удаляется на бесконечность по спирали *за бесконечное время*, делая конечное число оборотов. При $t \to t^*$ справедливо $M \to \infty$. Точка $\mathcal{A}$ падает на $\mathcal{S}$ по спирали *за конечное время*, делая бесконечное число оборотов.

6. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ПРИ $W \neq 0,\ S = T = 0$

Если $S = T = 0$, то $\omega, a, e = \mathrm{const}$, $M = M_0 + \omega_0 t$. Правые части нетривиальных уравнений (2) запишем в виде

$$\dot{i} = -A\cos g, \quad \dot{\Omega} = -A\frac{\sin g}{\sin i},$$
$$\dot{g} = A\,\mathrm{ctg}\, i \sin g, \quad A = \frac{\omega e}{\varkappa^2 \eta(1+\eta)} W. \quad (17)$$

Первое и третье уравнения (17) не зависят от второго. Перепишем их в форме уравнений Лагранжа [8]:

$$\dot{i} = -\frac{A}{\sin i}\frac{\partial V}{\partial g}, \quad \dot{g} = \frac{A}{\sin i}\frac{\partial V}{\partial i} \quad (18)$$

при

$$V = \sin i \sin g. \quad (19)$$

Очевидно, функция (19) является интегралом системы, т.е. $V = \mathrm{const}$. Постоянная V может принимать значения из отрезка $[-1, 1]$.

Соотношения (17)–(19) совпадают с приведенными в [5] с точностью до значения постоянной A. В этой статье уравнения (17) проинтегрированы в элементарных функциях и приведен фазовый портрет динамической системы. За подробностями отсылаем читателя к указанной статье. Здесь приведем лишь окончательные формулы.

Движение определено на всей оси времени: $t_* = -\infty$, $t^* = \infty$.

Введем вспомогательный угол φ

$$\frac{d\varphi}{dt} = A, \quad \varphi = \varphi_0 + At.$$

Переменные i, g зависят от φ периодически с периодом 2π:

$$\cos i = \sqrt{1-V^2}\sin\varphi,$$
$$\sin i = \sqrt{1-(1-V^2)\sin^2\varphi}, \quad (20)$$

$$\cos g = \frac{\sqrt{1-V^2}\cos\varphi}{\sin i},$$
$$\sin g = \frac{V}{\sin i}. \quad (21)$$

Начальные данные для φ, i, g связаны условиями

$$\cos\varphi_0 = \frac{\sin i_0}{\sqrt{1-V^2}}\cos g_0,$$
$$\sin\varphi_0 = \frac{\cos i_0}{\sqrt{1-V^2}}. \quad (22)$$

Долгота узла имеет вековой ход плюс периодические по φ колебания с периодом π:

$$\Omega = \begin{cases} \Omega_1 + \varphi - \mathrm{arctg}\dfrac{\sin 2\varphi}{V_1 + \cos 2\varphi}, & \text{если} \quad V < 0, \\ \Omega_2 - \varphi + \mathrm{arctg}\dfrac{\sin 2\varphi}{V_2 + \cos 2\varphi}, & \text{если} \quad V > 0, \end{cases} \quad (23)$$

где

$$V_1 = \frac{1-V}{1+V}, \quad V_2 = \frac{1+V}{1-V}, \quad |V_s| > 1.$$

Постоянные Ω_1, Ω_2 определяются условием обращения правой и левой части (23) в Ω_0 при $\varphi = \varphi_0$.

При $V = 1$ формулы (23) принимают вид $\Omega = \Omega_1 - \varphi$, при $V = -1$ они принимают вид $\Omega = \Omega_2 + \varphi$, а при $V = 0$ – вид $\Omega = \Omega_0$.

Общий период по времени колебаний i, g зависит от начальных данных ω_0, e_0, но не от начальных данных i_0, g_0.

7. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ПРИ $TW \neq 0$, $S = 0$

В этом случае упрощается только последнее уравнение системы (2), его решение рассмотрено в § 5, а для первых двух уравнений по-прежнему справедливо решение, приведенное в § 3.

Соотношения (17)–(19) остаются справедливыми, но величина A теперь переменна. Введем угол φ соотношением

$$\frac{d\varphi}{dt} = A, \quad \frac{d\varphi}{de} = \frac{W}{T\eta},$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{W}{T}(\arcsin e - \arcsin e_0). \tag{24}$$

Зависимость элементов i, g, Ω от φ остается такой же, как и в § 6, и определяется формулами (20)–(23). Однако теперь φ – ограниченная функция времени. Формула (24) задает ее зависимость от эксцентриситета, а неявная зависимость эксцентриситета от времени выражена формулами (10), (11), (15).

Напомним, что одна из двух концевых точек t_*, t^* промежутка определения непродолжаемого решения конечна, а другая бесконечна, см. § 3. Угол же φ изменяется в конечных пределах

$$\sup\varphi - \inf\varphi = \left|\frac{\pi W}{2T}\right|.$$

8. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ПРИ $WS \neq 0$, $T = 0$

Так как $T = 0$, то ω, e, $A = \mathrm{const}$. Уравнение для M решено в § 4. Решение уравнений для элементов i, Ω, g приведено в § 6.

Область определения: $t_* = -\infty$, $t^* = \infty$.

9. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ПРИ $ST \neq 0$, $W = 0$

В рассматриваемом случае i, Ω, $g = \mathrm{const}$. Первые два уравнения решены в § 3. Последнее отличается от решенного в § 5 только постоянным множителем. Поэтому

$$M = M_0 + \frac{\varkappa^2 - 2S}{T}\left(\eta + \ln\frac{1-\eta}{1-\eta_0} - \eta_0\right).$$

Решение определено на временах от $t_* = -t_2 < 0$ до $t^* = \infty$ при $T > 0$ и от $t_* = -\infty$ до $t^* = -t_2 > 0$ при $T < 0$.

10. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ПРИ $STW \neq 0$

Переходим к случаю общего положения $S \neq 0$, $T \neq 0$, $W \neq 0$.

Первые два уравнения (2) решены в § 3, третье, четвертое и пятое – в § 7, последнее – в § 9. Точнее, переменные ω, i, Ω, g, M представлены элементарными функциями эксцентриситета. Кинематическое уравнение выражает время как строго монотонную функцию эксцентриситета. Найдена область существования непродолжаемого решения $t_* < t < t^*$.

Выпишем соответствующие формулы.

1. Величины, связанные со временем:

$$t_2 = \frac{\varkappa^2}{\omega_0 T}\left(\frac{\eta_0}{1-\eta_0}\right)^3 f(\eta_0) =$$

$$= \frac{\varkappa^2}{\omega_0 T}\left[\sum_{n0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}e_0^{2n}\right]^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}c_n e_0^{2n},$$

$$t = \frac{\varkappa^2}{\omega_0 T}\left(\frac{\eta_0}{1-\eta_0}\right)^3[f(\eta) - f(\eta_0)] =$$

$$= \frac{\varkappa^2}{\omega_0 T}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}e_0^{2n}\right]^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(\frac{e^6}{e_0^6}e^{2n} - e_0^{2n}\right),$$

где f, c_n даются формулами (11, 13).

Если $T > 0$, то $t_2 > 0$, $t_* = -t_2 < 0$, $t^* = \infty$, каждому $t \in (t_*, t^*)$ отвечает единственное значение η и соответственно e. При $t \to t_*$ справедливо $\eta \to 1$, $e \to 0$, $\omega \to \infty$, $a \to 0$, $\varphi \to \varphi_0 - \frac{W}{T}\arcsin e_0$, $M \to -\infty$. При движении в прошлое точка $\mathscr{A}$ падает на $\mathscr{S}$ по спирали *за конечное время*, делая бесконечное число оборотов. При $t \to t^*$ справедливо $\eta \to 0$, $e \to 1$, $\omega \to 0$, $a \to \infty$, $\varphi \to \varphi_0 + \frac{W}{T}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin e_0\right)$,

$$\lim_{t\to t^*} M = M_0 - \frac{\varkappa^2 - 2S}{T}[\eta_0 + \ln(1-\eta_0)] > M_0.$$

Точка $\mathscr{A}$ удаляется на бесконечность по спирали *за бесконечное время*, делая конечное число оборотов.

Если $T < 0$, то $t_2 < 0$, $t_* = -\infty$, $t^* = -t_2 > 0$, каждому $t \in (t_*, t^*)$ отвечает единственное значение η и соответственно e. При $t \to t_*$ справедливо $\eta \to 0$, $e \to 1$, $\omega \to 0$, $a \to \infty$, $\varphi \to \varphi_0 + \frac{W}{T}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin e_0\right)$,

$$\lim_{t\to t_*} M = M_0 - \frac{\varkappa^2 - 2S}{T}[\eta_0 + \ln(1-\eta_0)] < M_0.$$

При движении в прошлое точка $\mathscr{A}$ удаляется на бесконечность по спирали *за бесконечное время*, делая конечное число оборотов. При $t \to t^*$ справедливо $\eta \to 1$, $e \to 0$, $\omega \to \infty$, $a \to 0$, $\varphi \to \varphi_0 - \frac{W}{T}\arcsin e_0$, $M \to \infty$. Точка $\mathscr{A}$ падает на $\mathscr{S}$ по спирали *за конечное время*, делая бесконечное число оборотов.

2. Вспомогательный угол φ:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{W}{T}(\arcsin e - \arcsin e_0).$$

Его начальное значение однозначно определяется по i_0 и g_0:

$$\cos\varphi_0 = \frac{\sin i_0}{\sqrt{1-V^2}}\cos g_0, \quad \sin\varphi_0 = \frac{\cos i_0}{\sqrt{1-V^2}},$$
$$V = \sin i_0 \sin g_0.$$

3. Элементы ω, a, M как функции эксцентриситета:

$$\omega = \omega_0\left[\frac{\eta(1-\eta_0)}{\eta_0(1-\eta)}\right]^3 =$$
$$= \omega_0\left(\frac{e_0}{e}\right)^6\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}e_0^{2n}\right]^3\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}e^{2n}\right]^{-3},$$

$$a = a_0\left[\frac{\eta_0(1-\eta)}{\eta(1-\eta_0)}\right]^2 =$$
$$= a_0\left(\frac{e}{e_0}\right)^4\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}e_0^{2n}\right]^{-2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}e^{2n}\right]^{2},$$

$$M = M_0 + \frac{\varkappa^2 - 2S}{T}\left(\eta + \ln\frac{1-\eta}{1-\eta_0} - \eta_0\right).$$

4. Элементы i, g, Ω как функции вспомогательной переменной φ:

$$\cos i = \sqrt{1-V^2}\sin\varphi,$$
$$\sin i = \sqrt{1-(1-V^2)\sin^2\varphi},$$

$$\cos g = \frac{\sqrt{1-V^2}\cos\varphi}{\sqrt{1-(1-V^2)\sin^2\varphi}},$$
$$\sin g = \frac{V}{\sqrt{1-(1-V^2)\sin^2\varphi}},$$

$$\Omega = \begin{cases} \Omega_1 + \varphi - \operatorname{arctg}\dfrac{\sin 2\varphi}{V_1 + \cos 2\varphi}, \\ \text{если} \quad -1 < V < 0, \\ \Omega_2 - \varphi + \operatorname{arctg}\dfrac{\sin 2\varphi}{V_2 + \cos 2\varphi}, \quad \text{если} \quad 0 < V < 1, \\ \Omega_3 + \varphi, \quad \text{если} \quad V = -1, \\ \Omega_4 - \varphi, \quad \text{если} \quad V = 1, \\ \Omega_0, \quad \text{если} \quad V = 0. \end{cases}$$

Здесь

$$V_1 = \frac{1-V}{1+V}, \quad V_2 = \frac{1+V}{1-V}, \quad V_s > 1.$$

Постоянные Ω_s определяются начальными данными φ_0, Ω_0:

$$\Omega_1 = \Omega_0 - \varphi_0 + \operatorname{arctg}\frac{\sin 2\varphi_0}{V_1 + \cos 2\varphi_0},$$

$$\Omega_2 = \Omega_0 + \varphi_0 - \operatorname{arctg}\frac{\sin 2\varphi_0}{V_2 + \cos 2\varphi_0},$$

$$\Omega_3 = \Omega_0 - \varphi_0,$$

$$\Omega_4 = \Omega_0 + \varphi_0.$$

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что уравнения (2) поставленной во введении задачи интегрируются в квадратурах, причем квадратуры оказались элементарными.

В случае $T = 0$ непродолжаемое решение определено на всей оси времени $-\infty < t < \infty$. В остальных случаях одна из двух концевых точек определения непродолжаемого решения $t_* < t < t^*$ конечна, а другая бесконечна. Именно, при $T > 0$ конечна t_*, а $t^* = \infty$; при $T < 0$ конечна t^*, а $t_* = -\infty$. При стремлении к конечной предельной точке тело $\mathscr{A}$ падает на $\mathscr{S}$ по спирали за *конечное время*, делая *бесконечное* число оборотов. При стремлении к бесконечной предельной точке тело $\mathscr{A}$ удаляется на бесконечность по спирали за *бесконечное время*, делая *конечное* число оборотов.

При $T = 0$ или $e_0 = 0$ все 6 элементов орбиты представлены элементарными функциями времени.

Если $T \neq 0$ и $e_0 \neq 0$, ситуация несколько сложнее. Как известно, в интегрируемых задачах механики материальной точки (например, в задаче двух неподвижных центров) фазовые переменные $\epsilon_1, \dots, \epsilon_6$ представляются неявными функциями времени, а время является явной строго монотонной функцией каждой из фазовых координат. В относительно простых интегрируемых задачах (например, в задаче двух тел) фазовые координаты $\epsilon_1, \dots, \epsilon_5$ выражаются явно через шестую переменную ϵ_6. Последняя связана со временем так называемым *кинематическим уравнением* $t = \Phi(\epsilon_6)$, в котором время — строго монотонная функция указанной фазовой координаты. В задаче двух тел за ϵ_6 выбирают обычно эксцентрическую аномалию, а кинематическим уравнением служит уравнение Кеплера. В рассмотренной нами задаче пять элементов орбиты ω, i, Ω, g, M представлены явными элементарными функциями эксцентриситета. В кинематическом уравнении $t = \Phi(e)$ функция Φ также элементарна. Доказана ее строгая монотонность, так что каждому t отвечает единственное значение e.

Сравним задачи, поставленные здесь (возмущающее ускорение обратно пропорционально квадрату расстояния от Солнца) и в [5] (возмущающее ускорение постоянно). Дифференциальные уравнения в средних элементах очень похожи. Есть лишь одно существенное различие. Скорость изменения аргумента перицентра согласно (2) пропорциональна одному компоненту возмущающего ускорения, W. В то же время в задаче из [5] эта скорость является линейной комбинацией уже двух компонентов, S и W. Различие привело к тому, что рассмотренная в настоящей статье задача оказалась полностью интегрируемой, тогда как задача из [5] интегрируется лишь в том случае, если хотя бы один из компонентов возмущающего ускорения равен нулю.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 18-12-00050).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *W. F. Bottke, D. Vokrouhlický, D. P. Rubincam, and D. Nesvorný*, Annu. Rev. Earth and Planet. Sci. **34**, 157 (2006).
2. *S. R. Chesley, S. J. Ostro, D. Vokrouhlický, D. Čapek, et al.*, Science **302**, 1739 (2003).
3. *Е. Н. Поляхова*, *Космический полет с солнечным парусом* (М.: URSS, 2018).
4. *Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников*, Астрон. журн. **96**, 418 (2019).
5. *Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников*, Астрон. журн. **92**, 681 (2015).
6. *В. И. Арнольд*, *Обыкновенные дифференциальные уравнения* (М.: Наука, 1984).
7. *Ю. Н. Бибиков*, *Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений* (Л.: Изд. ЛГУ, 1981).
8. *М. Ф. Субботин*, *Введение в теоретическую астрономию* (М.: Наука, 1968).