АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2021, том 98, № 1, с. 3–9

УДК 524.882

# СРАВНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СВОЙСТВ ВХОДОВ В ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ И КРОТОВЫЕ НОРЫ

© 2021 г. И. Д. Новиков[1, 2, 3], С. В. Репин[1, *]

[1] Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Астрокосмический центр, Москва, Россия

[2] The Niels Bohr International Academy, The Niels Bohr Institute, Copenhagen, Denmark

[3] Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия

*E-mail: repinsv@lebedev.ru

Поступила в редакцию 30.06.2020 г.
После доработки 30.08.2020 г.
Принята к публикации 30.08.2020 г.

Проведено сравнение пространственных свойств входов в сферически-симметричные черные дыры, кротовые норы с нулевой и положительной массами. Свойства изучались с точки зрения балка и браны. Найдены конкретные выражения для входов и показано, что в обоих представлениях пространственные воронки входов в кротовые норы наиболее крутые у Шварцшильдовских черных дыр, и наименее крутые у кротовых нор с нулевой массой.

**DOI:** 10.31857/S0004629920330026

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является выяснение отличий между геометрическими пространственными свойствами окрестности различных релятивистских объектов в рамках общей теории относительности (ОТО). Следует подчеркнуть, что эти отличия не ведут прямо к различию в видимости этих объектов внешним наблюдателем. Дело в том, что различие в видимости связано не только с различием пространственных свойств этих объектов, но, в еще большей степени, с различием в траекториях лучей света в различных гравитационных полях вокруг этих тел. Мы исследуем эти вопросы в наших других работах (см., напр., [1–4]). Они разбираются также в многочисленных работах других авторов (см., напр., [5–8]). Тем не менее отличия пространственных свойств важны по следующим причинам: 1) для анализа физических процессов вблизи входов; 2) в релятивистской теории так же, как в нерелятивистской теории, свойства процессов зависят от геометрических свойств отверстий, в которые происходит течение; 3) с точки зрения принципиальной возможности отличить эти объекты друг от друга чисто геометрическим путем, не привлекая для этого гравитацию, свет и другие процессы. Полученные отличия можно будет в будущем использовать как дополнительные критерии в наблюдательных проявлениях этих объектов.

Все расчеты в статье выполнены при $G = 1$, $c = 1$.

## 2. ОБЪЕКТЫ В ГИПЕРПРОСТРАНСТВЕ (БАЛКЕ)

В этом разделе мы рассмотрим релятивистские объекты в гиперпространстве.

Рассмотрим сферически-симметричные черные дыры (ЧД). Определим форму поверхности вращения в трехмерном балке, внутренняя геометрия которой в бране (в нашей Вселенной) совпадает с двумерной геометрией экваториальной “плоскости” ЧД. Определение и описание терминов “балк” и “брана” даны работе [6]. Как показано в [9], эта поверхность вращения в цилиндрических координатах $(r, \varphi, z)$ в балке есть

$$z_{\mathrm{S}} = 2\sqrt{r_g(r - r_g)}, \tag{1}$$

где $r_g = 2m$ – гравитационный радиус. Она соответствует двумерной метрике экваториального сечения ЧД. В полярных координатах в бране (в нашей Вселенной)

$$dl^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \tag{2}$$

Найдем теперь аналогичную форму поверхности для кротовой норы (КН) Эллиса–Бронникова–Морриса–Торна [10–13]. Эта модель КН наиболее часто используется в теоретической астрофизике. Ее метрика в двумерной бране есть

$$dl^2 = d\rho^2 + (\rho^2 + q^2)d\varphi^2, \tag{3}$$

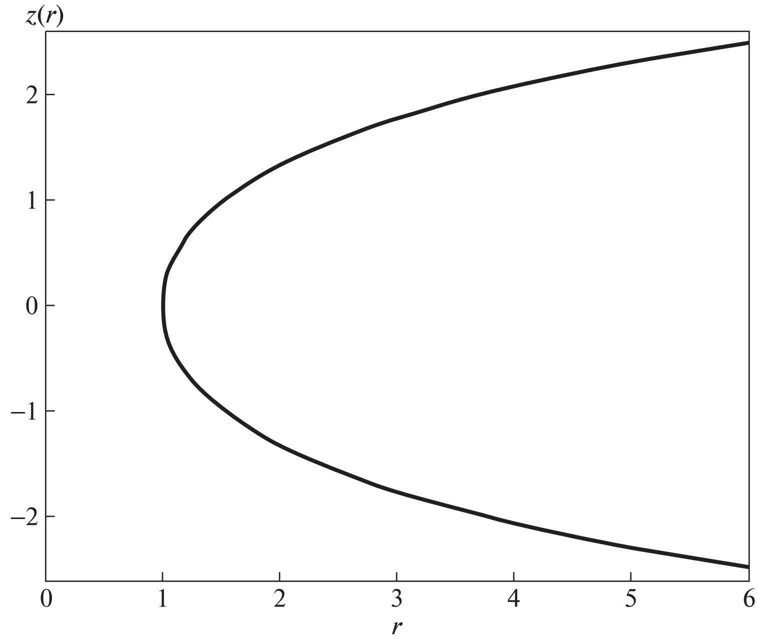


**Рис. 1.** Поверхность вращения для кротовой норы Морриса–Торна.

где $-\infty < r < \infty$, $q$ – радиус горловины, или в нужной для нас форме

$$dl^2 = \frac{r^2}{r^2 - q^2} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \tag{4}$$

Для поверхности вращения в балке в цилиндрических координатах имеем:

$$\begin{gathered} dl^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2 = \\ = dr^2 \left(1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right) + r^2 d\varphi^2. \end{gathered} \tag{5}$$

Сравнивая (4) и (5), получаем дифференциальное уравнение

$$1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{r^2}{r^2 - q^2} \tag{6}$$

или

$$\frac{dz}{dr} = \pm\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - q^2} - 1}. \tag{7}$$

Решение его есть:

$$z_{\mathrm{Th}} = \pm q \ln\left(r + \sqrt{r^2 - q^2}\right) + z_0. \tag{8}$$

Полагая $z_0 = 0$, получаем выражение для верхней и нижней половины поверхностей вращения, каждая из которых соответствует своему выходу из кротовой норы (см. рис. 1).

Напомним, что в метрике $\text{КН}_{\mathrm{Th}}$ нигде нет гравитационных ускорений, в том числе и вне выходов из $\text{КН}_{\mathrm{Th}}$. Это означает, в частности, что эквивалентная масса каждого из входов равна нулю, $m = 0$.

Сравним входы в ЧД и $\text{КН}_{\mathrm{Th}}$. Они описываются поверхностями, получающимися при вращении вокруг $z = 0$ кривых $z_{\mathrm{S}}$ (1) и $z_{\mathrm{Th}}$ (8). Обе поверхности стремятся стать горизонтальными при $r \to \infty$. Однако при любом конечном $r$ они отличаются от плоскости, а геометрия на них – от эвклидовой. Степень отличия при данном $r$ может быть охарактеризована отличием разности $dl$ длин двух близких окружностей $r_1 = \text{const}$ и $r_2 = \text{const}$ от $2\pi dr$, где $r_2 = r_1 + dr$,

$$\frac{dl}{dr} = \frac{2\pi}{\sqrt{g_{11}}}, \tag{9}$$

где $g_{11}$ – метрический коэффициент соответствующих метрик. Для нашего случая

$$(g_{11})_{\mathrm{S}} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}, \tag{10}$$

$$(g_{11})_{\mathrm{Th}} = \frac{r^2}{r^2 - q^2}. \tag{11}$$

При $r \to \infty$ имеем, соответственно

$$(g_{11})_{\mathrm{S}} = 1 + \frac{r_g}{r}, \tag{12}$$

$$(g_{11})_{\mathrm{Th}} = 1 + \frac{q^2}{r^2}. \tag{13}$$

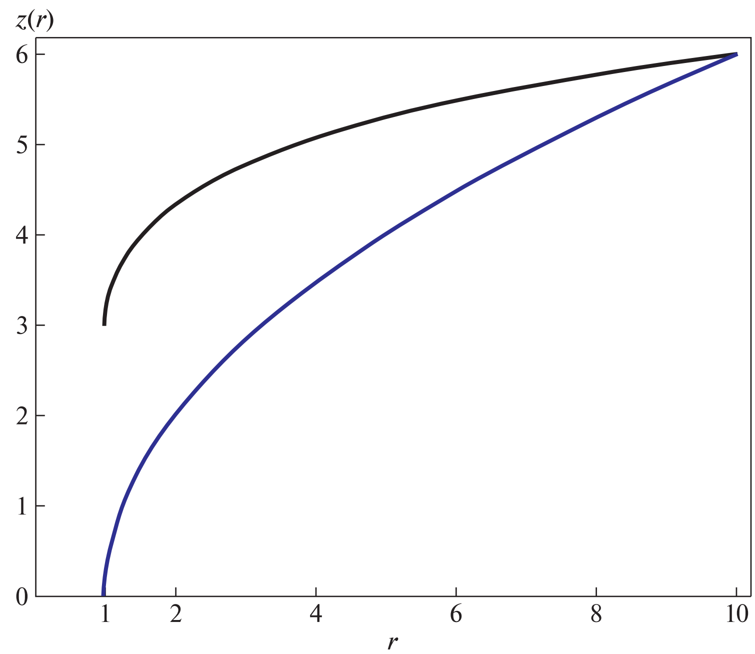


**Рис. 2.** Поверхность вращения для кротовой норы Морриса–Торна (верхняя кривая) и ЧД (нижняя кривая).

Будем считать “дном” пространственной воронки, которую мы исследуем, $r = r_g$ для ЧД и $r = q$ для КН. Обе кривые (1) и (8) стремятся к $z \to \infty$, когда $r \to \infty$. Однако мы можем считать нашу брану практически плоской для достаточно больших $r$, когда (12), (13) достаточно малы. При $r_g = q$ определяющим условием малости является малость

$$\frac{r_g}{r} \equiv \alpha \ll 1. \tag{14}$$

Для достаточно больших $r$ ясно, что в астрофизике свойства пространства будут определяться наличием других объектов или процессов. Выводы качественно не зависят от конкретных значений $\alpha$. Поэтому положим

$$\alpha = \alpha_0 = 10^{-1}. \tag{15}$$

Сравним теперь воронки в балке для ЧД и $\text{КН}_{\text{Th}}$. Для этого положим для $\alpha = \alpha_0$ значения $z_{\text{S}} = z_{\text{Th}}$ и продолжим кривые для меньших $r$ вплоть до $r = r_g = q$. Положим соответствующие значения $z_{\text{S}}$, $z_{\text{S}} = 0$. Графики изображены на рис. 2.

Сравнение (10) и (11) при $r_g = q$ показывает, что искажение эвклидовости геометрии при продвижении от больших $r$ к входам происходит более плавно для КН, чем для ЧД, а рис. 2 показывает, что воронка ЧД является более “глубокой”, чем в случае КН.

Чтобы исключить недоразумения, напомним, что формально поверхность барна в случае ЧД обрывается при $r = r_g$, в то время как в случае КН после достижения $r = q$ поверхность продолжается к другому выходу из КН (см. рис. 1).

Обратимся теперь к случаю КН с массой $m \neq 0$. Такая модель была рассмотрена Эллисом [11] (см. также [14]). Пространственная метрика кротовой норы с массой $m^*$:

$$\begin{gathered} dl^2 = e^{E(\rho)} d\rho^2 + \\ + e^{E(\rho)}(\rho^2 + n^2 - m^2)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \end{gathered} \tag{16}$$

где

$$E(\rho) = \frac{2m}{\sqrt{n^2 - m^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\rho}{\sqrt{n^2 - m^2}}\right). \tag{17}$$

Здесь $n$ и $m$ – положительные константы. Величина $n$ характеризует напряженность скалярного поля, а $m$ есть эффективная масса $m^*$, когда $\rho \to \infty$, $m \equiv m^*$. В разобранном выше примере (3) $m^* = 0$, $q = n$.

Та же метрика в экваториальной “плоскости” $\theta = \pi/2$:

$$dl^2 = e^{E(\rho)} d\rho^2 + e^{E(\rho)}(\rho^2 + n^2 - m^2) d\varphi^2. \tag{18}$$

Если ввести обозначение:

$$r^2 = (\rho^2 + n^2 - m^2) e^{E(\rho)}, \tag{19}$$

то функция $r(\rho)$ описывает форму туннеля $\text{КН}_{\text{El}}$ в координатах $\rho$. Координата $\rho$ часто используется

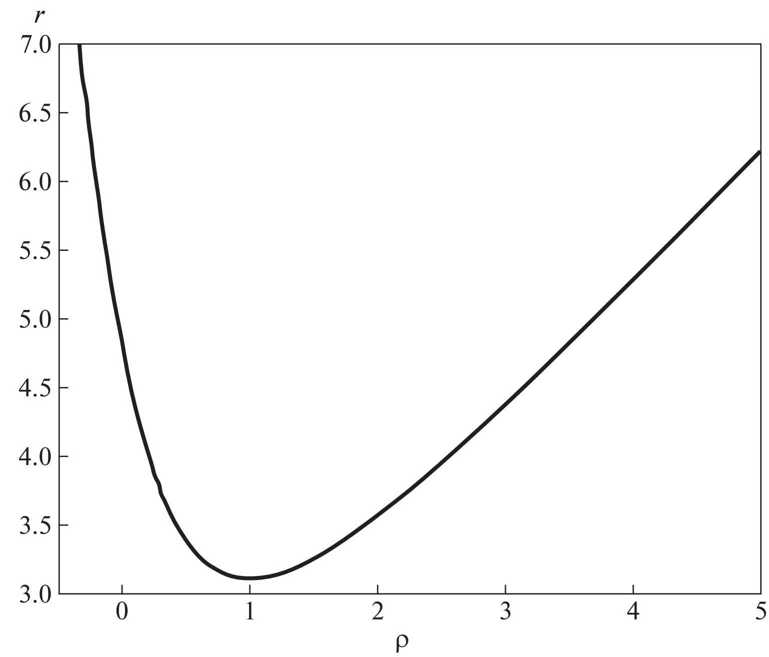


**Рис. 3.** Зависимость $r(\rho)$ для кротовой норы с ненулевой массой.

в теоретических работах, но она не имеет прямого физического смысла. Величина $r$ как функция физической радиальной координаты рассмотрена в разделе 3. В качестве примера функция $r(\rho)$ при параметрах $m = 1$, $n = \sqrt{2}$ показана на рис. 3. Она изображает форму туннеля $\mathrm{KH_{El}}$. Входы $\mathrm{KH_{El}}$ расположены при $\rho \to \pm\infty$. В отличие от случая $m = 0$ здесь нет симметрии между правым и левым. Выход $\rho \to \infty$ соответствует $m^* > 0$, а выход $\rho \to -\infty$ соответствует $m^* < 0$. В этой работе мы будем рассматривать только правую ветвь, $m^* > 0$.

Метрику в экваториальной плоскости $\mathrm{KH_{El}}$ можно записать в виде:

$$dl^2 = \frac{\rho^2 + n^2 - m^2}{(\rho - m)^2} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \tag{20}$$

Функция $r(\rho)$ имеет минимум при $\rho = m$. Величина $r(m)$, т.е. размер горловины, изменяется от $r(m) = n$ до $r(m) = en$, когда $m$ пробегает значения от 0 до $n$. По порядку величины размер горловины всегда равен $n$. Подчеркнем, что размер горловины определяется в основном $n$, мало зависит от $m$ и всегда $r(m) > 2m^* \equiv r_g$.

Представим теперь вид $\mathrm{KH_{El}}$ в балке, как мы делали это выше для $\mathrm{KH_{Th}}$. Поступая аналогично, получаем для $z_{\mathrm{El}}(r)$ функцию, найденную численно при $m = 1$, $n = \sqrt{2}$ и представленную на рис. 4.

Форма качественно похожа на рис. 1, только горловина смещена вправо и вверх. На рис. 4 горловине соответствует точка поворота кривой. Ветвь, идущая вниз направо, уходит ко второму выходу. Попытки продолжить решение для $z_{\mathrm{El}}(r)$ приводят к мнимым значениям для интеграла $z(\rho)$ для $\rho < 0$ и $z < 0$. Формально это означает невозможность поместить фигуру вращения в плоский трехмерный балк $(r, z, \varphi)$. Удивляться этому не приходится, ибо, как мы знаем, эта вторая ветвь ведет к выходу с отрицательной массой $m^* < 0$. Это означает, что вдали от выхода метрика должна соответствовать решению Шварцшильда с отрицательной массой. Но из формулы (1) видно, что для $z_{\mathrm{S}}$ при $r_g < 0$ и $r > 0$ получаются мнимые значения, т.е. такая брана не может быть вложена в трехмерный плоский балк.

Возвращаясь к правому входу с $m^* > 0$, сравним его со входом в ЧД. Будем считать, что $r_g$ равно размеру горловины $r(m)$. Выше мы видели, что $r(m) > 2m^*$. Асимптотика отклонений от эвклидовой геометрии здесь определяется для обоих случаев $\mathrm{KH_{El}}$ и ЧД величиной массы. Поэтому

$$r_g = r(m) > 2m^*. \tag{21}$$

Значит, в случае $\mathrm{KH_{El}}$, как и в случае с $\mathrm{KH_{Th}}$, при переходе от больших $r$ к входам искажение эвклидовости нарастает медленнее у $\mathrm{KH_{El}}$, чем у ЧД.

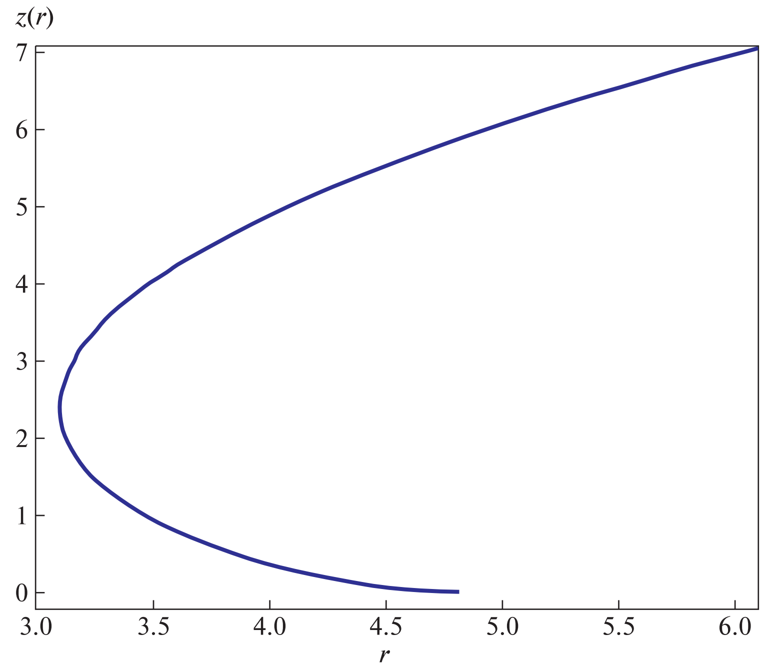


**Рис. 4.** Зависимость $z(r)$ для кротовой норы с отличной от нуля массой.

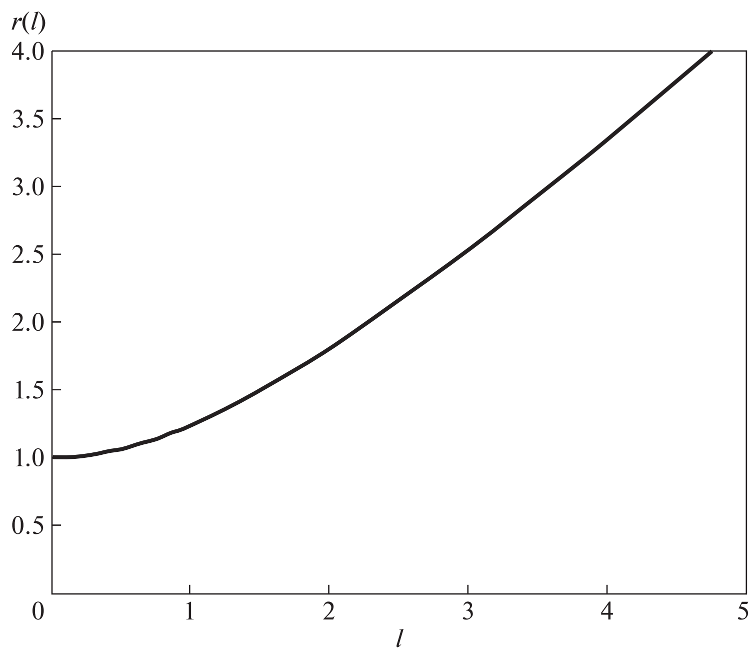


**Рис. 5.** Зависимость $r(l)$ для метрики Шварцшильда. Расстояние $l$ отсчитывается от гравитационного радиуса.

## 3. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ОБЪЕКТЫ В БРАНЕ

Обратимся теперь к свойствам пространства отверстий, оставаясь в трехмерной бране (в нашем случае в двумерном экваториальном сечении браны). Определим физическое радиальное расстояние от гравитационного радиуса $r_g$ до точки с координатой $r$ (в единицах $r_g$):

$$l_S = \int_1^r \sqrt{g_{11_S}}dr = \sqrt{r(r-1)} + \frac{1}{2}\ln(2r + 2\sqrt{r(r-1)} - 1). \quad (22)$$

Нас интересует зависимость $r_S(l_S)$. Эта обратная функция неявно определяется формулой (22). Соответствующий график дан на рис. 5.

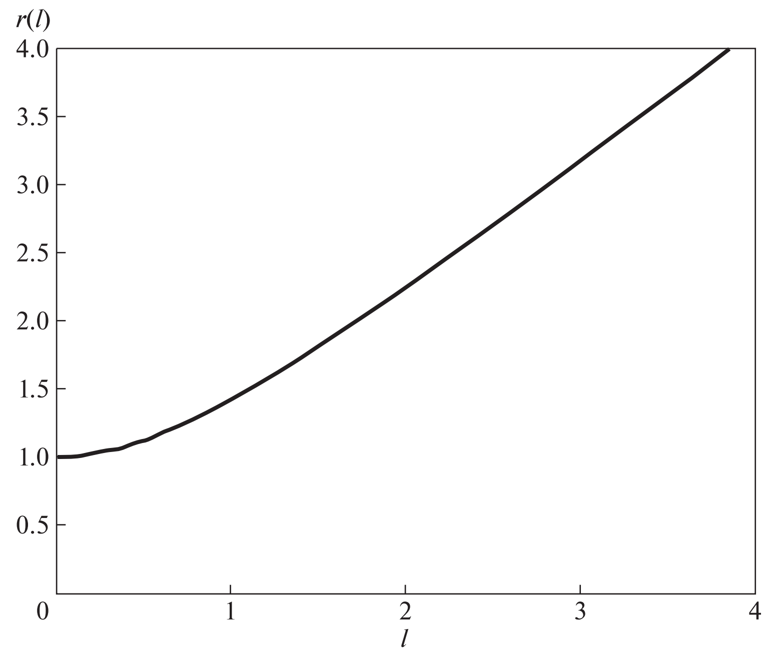


**Рис. 6.** Зависимость $r(l)$ для метрики Морриса–Торна. Расстояние $l$ отсчитывается от горловины, где $r = q$.

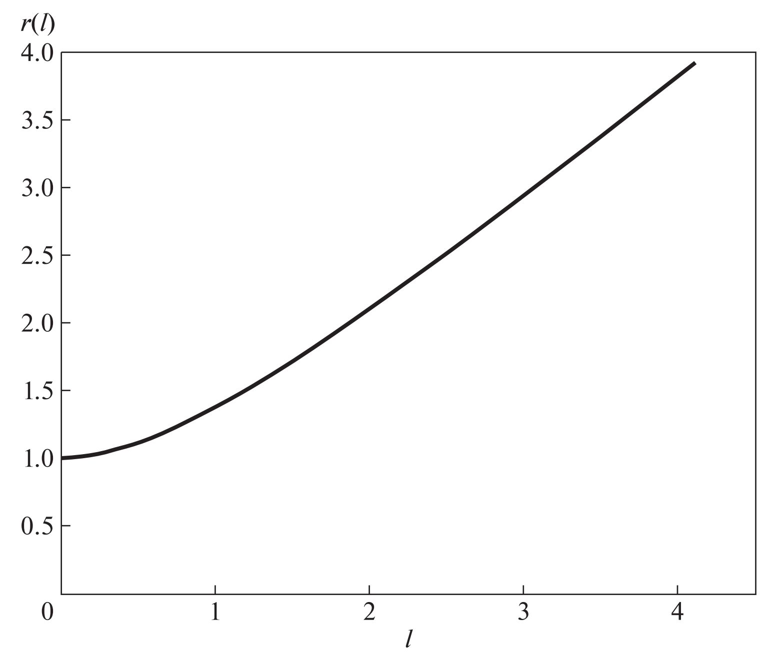


**Рис. 7.** Зависимость $r(l)$ для метрики Эллиса. Расстояние $l$ отсчитывается от горловины, где $r = r_{\min}$.

Аналогичное выражение для метрики Морриса–Торна для физического расстояния от горловины $r = q$ (в единицах $q$):

$$l_{\mathrm{Th}} = \sqrt{r^2 - q^2}. \tag{23}$$

График обратной функции $r = r(l_{\mathrm{Th}}) = \sqrt{l^2 + q^2}$ дан на рис. 6.

Наконец, обратимся к метрике Эллиса (16), (17). Для выхода из КН с $m > 0$ расстояние от гор-

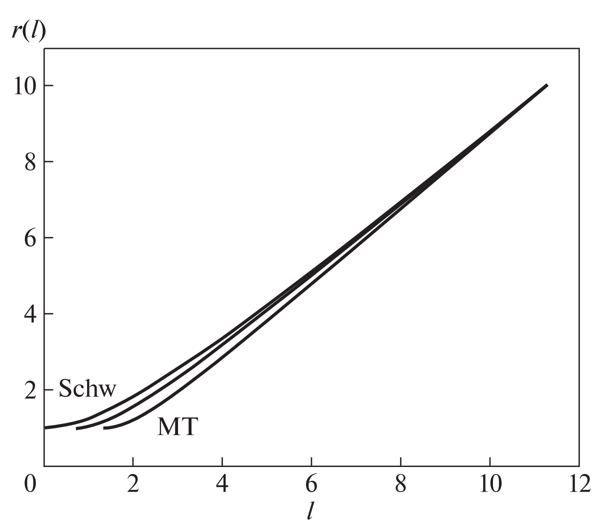


**Рис. 8.** Зависимость $r(l)$ для всех рассмотренных метрик. Для сравнения значения $l(r)$ приняты одинаковыми при $r = 10$.

ловины $r_{\min}$ до точки с координатой $r$ записывается в виде:

$$l_{\rm El} = \int\limits_{r_{\min}}^{r} \sqrt{\frac{\rho^2 + n^2 - m^2}{(\rho - m)^2}} dr. \qquad (24)$$

Величина $r$ является неявной функцией $\rho$, $r_{\min}$ соответствует $\rho = m$. Для нашего примера $n = \sqrt{2}$, $m = 1$. При этом $r_{\min} = 3.10176639383$. Мы будем все расстояния выражать в единицах $r_{\min}$. Величина $r(l)$ изображена на рис. 7.

На рис. 8 показаны $l(r)$ для всех трех случаев. При этом значения $r$ при $l = 10$ положены равными. Рисунок показывает, что при продвижении от $r = 10$ к входам искажение эвклидовости быстрее всего происходит для метрики Шварцшильда и медленнее всего для метрики Морриса–Торна.

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим прежде всего, что обычный способ описывать и изображать входы в ЧД и КН как практически очень похожие не вполне корректен. Оба метода визуализации входов и в балке, и в бране показывают существенную разницу между метриками. Наиболее крупная воронка у метрики Шварцшильда. Указанную разницу следует учитывать при описании процессов у входов в ЧД и КН.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при частичной поддержке программы РАН КП19-270 “Вопросы происхождения и эволюции Вселенной с применением методов наземных наблюдений и космических исследований”.

## БЛАГОДАРНОСТИ

С.Р. выражает свою благодарность Р.Е. Бересневой, О.Н. Суменковой и О.А. Косаревой за возможность плодотворно работать над настоящей задачей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, *Релятивистская астрофизика* (М.: Наука, 1967).
2. *V. Frolov and I. Novikov*, *Black Hole Physics. Basic Concepts and New Developments* (Kluwer Academic Publishers, 1998).
3. *И. Д. Новиков, Н. С. Кардашев, А. А. Шацкий*, Успехи физ. наук **177**, 1017 (2007).
4. *S. V. Repin, D. A. Kompaneets, I. D. Novikov, and V. A. Mityagina*, arXiv:1802.04667 [gr-qc] (2018).
5. *C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler*, *Gravitation* (San Francisco: Freeman and Company, 1973).
6. *К. Торн*, *Интерстеллар, наука за кадром* (М.: ИД Манн, Иванов и Фербер, 2015).
7. *R. Shaikh and S. Kar*, Phys. Rev. D **96**, id. 044037 (2017), arXiv:1705.11008 [gr-qc].
8. *N. Tsukamoto*, Phys. Rev. D **101**, id. 104021 (2020), arXiv:2004.00822v2 [gr-qc].
9. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, *Теория поля* (М.: Физматлит, 2012).
10. *M. S. Morris and K. S. Thorne*, American J. Physics **56**, 395 (1988).
11. *H. Ellis*, J. Math. Phys. **14**, 104 (1973).
12. *K. A. Bronnikov, G. Clément, C. P. Constantinidis, and J. C. Fabris*, Phys. Letters A **243** (3), 121 (1998).
13. *K. A. Bronnikov*, Acta Phys. Pol. **84**, 251 (1973).
14. *A. G. Doroshkevich, N. S. Kardashev, D. I. Novikov, and I. D. Novikov*, Astron. Rep. **52**, 616 (2008).