АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2021, том 98, № 4, с. 321–331

УДК 521.1

ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ ПРИ ВОЗМУЩАЮЩЕМ УСКОРЕНИИ, ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ПО ЗАКОНУ ОБРАТНЫХ КВАДРАТОВ: ПРИЛОЖЕНИЕ К ЭФФЕКТУ ЯРКОВСКОГО

© 2021 г. Т. Н. Санникова[1,] *
[1] *Крымская астрофизическая обсерватория РАН, Научный, Россия*
**E-mail: tnsannikova@craocrimea.ru*

Поступила в редакцию 13.11.2020 г.
После доработки 09.12.2020 г.
Принята к публикации 16.12.2020 г.

С помощью аналитического решения системы дифференциальных уравнений в средних элементах в первом приближении по малому параметру изучена эволюция орбиты астероида, движущегося под действием притяжения к Солнцу и дополнительного возмущающего ускорения $\mathbf{P} = \mathbf{P}'/r^2$, возникающего за счет действия эффекта Ярковского. Здесь r – гелиоцентрическое расстояние, модуль $\mathbf{P}'$ мал по сравнению с основным ускорением, вызванным притяжением Солнца, а компоненты вектора $\mathbf{P}'$ (S, T, W) – постоянны в системе отсчета с началом в центральном теле и осями, направленными по радиусу-вектору, трансверсали (перпендикуляру к радиусу-вектору в оскулирующей плоскости в сторону движения) и бинормали (направленной по вектору площадей). Величины S, T, W, необходимые для учета эффекта Ярковского, могут быть найдены либо как дополнительные параметры при определении орбиты из наблюдений, либо с помощью теплофизических моделей ускорения Ярковского. В первом случае требуется высокоточная астрометрия в течение длительного времени, во втором – знание теплофизических характеристик и параметров вращения астероидов. В данной статье вычислен дрейф большой полуоси для 23 астероидов с опубликованным в различных источниках трансверсальным ускорением, определенным первым способом. Сравнительный анализ показал хорошее согласие с результатами других работ. В рамках реализации второго способа на основе линейной теплофизической модели силы Ярковского для сферических астероидов и уравнений для компонентов этой силы в системе отсчета, связанной с радиусом-вектором, определены негравитационные параметры для астероида 1685 Toro (1948 OA): $A_1 = S/r_0^2 = (7.96^{+2.72}_{-3.48}) \times 10^{-15}$ а.е./сут^2, $A_2 = T/r_0^2 = (-3.24^{+0.42}_{-0.57}) \times 10^{-15}$ а.е./сут^2, $A_3 = W/r_0^2 = 0$ ($r_0 = 1$ а.е.). Затем для 1685 Toro найдены дрейфы эксцентриситета, большой полуоси и средней аномалии и оценено смещение астероида от невозмущенного положения за 1000 оборотов вокруг Солнца (1600 лет). С учетом неопределенностей параметров A_1, A_2 опережение по средней аномалии составило от 2.50′ до 3.28′, а смещение – от 143 до 188 тыс. км.

DOI: 10.31857/S0004629921040058

1. ВВЕДЕНИЕ

Эффект Ярковского – это негравитационное возмущение, которое определяется тепловым излучением вращающегося тела, имеющего ненулевую тепловую инерцию. Различают суточный и сезонный эффект [1].

Суточная составляющая возникает вследствие вращения астероида вокруг своей оси. Сторона, обращенная к Солнцу, нагревается и переизлучает тепло в космос. Так как от более горячей части астероида отходит больше энергии, чем от холодной, малое тело получает дополнительное ускорение в направлении, противоположном горячей части. Если астероид не обладает тепловой инерцией, то распределение температуры симметрично относительно подсолнечной точки, и тело испытывает суммарную силу, направленную радиально от Солнца. В противном случае тепловая инерция вызывает задержку переизлучения, в результате чего самая горячая точка астероида находится не на полуденной линии, а смещается в сторону вечернего терминатора. В результате дополнительная сила, действующая на астероид, имеет также компонент вдоль пути.

Сезонная составляющая возникает вследствие движения астероида по орбите вокруг Солнца и связана с тем, что более горячим оказывается то северное, то южное полушарие. Сезонный эффект всегда направлен против движения (тепловое сопротивление) и исчезает, если ось вращения малого тела перпендикулярна плоскости орбиты.

Рассмотрим движение астероида $\mathscr{A}$ под действием притяжения к Солнцу $\mathscr{S}$ и дополнительного возмущающего ускорения $\mathbf{P}$, возникающего за счет действия эффекта Ярковского. Сила этого эффекта обратно пропорциональна квадрату расстояния от Солнца, поэтому примем ускорение $\mathbf{P} = \mathbf{P}'/r^2$. Введем орбитальную систему отсчета $\mathbb{O}$ с началом $\mathscr{S}$ и осями, направленными по радиусу-вектору, трансверсали (перпендикуляру к радиусу-вектору в плоскости оскулирующей орбиты в сторону движения) и бинормали (направленной по вектору площадей). Пусть компоненты S, T, W вектора $\mathbf{P}'$ постоянны в системе $\mathbb{O}$ и малы по сравнению с основным ускорением $\varkappa^2/r^2$, т.е.

$$\max\{|\mathbf{P}|/(\varkappa^2 r^{-2})\} = \max\{|\mathbf{P}'|/\varkappa^2\} = \mu \ll 1. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{r} = \mathscr{S}\mathscr{A}$, $r = |\mathbf{r}|$, $\varkappa^2$ – произведение постоянной тяготения на массу $\mathscr{S}$.

Если ось вращения астероида расположена под некоторым углом к плоскости орбиты, то тело подвержено как суточной, так и сезонной составляющей силы Ярковского. Согласно [2] в локальной системе координат с осью Z, направленной вдоль оси вращения тела, компонент P_z отвечает за сезонный эффект Ярковского, а P_x, P_y – за суточный эффект. Соответственно, при проецировании силы Ярковского на оси системы $\mathbb{O}$ получим радиальную $P_r = S/r^2$, трансверсальную $P_t = T/r^2$ и нормальную $P_n = W/r^2$ составляющие.

Таким образом, для учета эффекта Ярковского и изучения его влияния на долгосрочную эволюцию орбиты малого тела необходимо знать значения S, T, W. При наличии многолетних наблюдений объекта эти величины можно определить методом дифференциальной коррекции орбиты, но получаемые при этом значения чувствительны не только к длине наблюдательной дуги, но и к выборке учитываемых наблюдений [3]. Как правило, этим способом определяют трансверсальную составляющую ускорения Ярковского, и сейчас уже порядка ста астероидов имеют ее оценку благодаря высокоточной астрометрии и радарным измерениям. Другой способ – вычислить эти компоненты, используя какую-либо модель силы Ярковского и теплофизические характеристики тела, такие как диаметр, объемная плотность, скорость вращения, наклон оси вращения к плоскости орбиты, альбедо Бонда, тепловая инерция поверхности, удельная теплоемкость и тепловая излучательная способность. В настоящее время все необходимые параметры известны лишь для небольшого количества объектов, но ведется обширная работа по их определению с помощью наблюдений, получаемых в наземных и орбитальных обсерваториях, а также космических миссий к астероидам и лабораторных исследований образцов метеоритного и астероидного вещества [4].

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

В качестве переменных выберем оскулирующие элементы n, e, i, Ω, ω, M – среднее движение, эксцентриситет, наклон, долготу восходящего узла, аргумент перицентра, среднюю аномалию. Первые пять из них образуют вектор медленных переменных $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5)$, а последняя – быструю переменную y. Уравнения движения типа Эйлера [5] имеют форму

$$\dot{\mathbf{x}} = \mu \mathbf{f}(\mathbf{x}, y),$$
$$\dot{y} = x_1 + \mu g(\mathbf{x}, y),$$

с малыми порядка μ правыми частями, различаясь лишь видом функций $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_5)$ и g. В выбранной системе отсчета [6]

$$\begin{gathered}
f_1 = -\frac{3}{a^3\eta}\left(e\frac{a^2}{r^2}\sin\theta S + \eta^2\frac{a^3}{r^3}T\right),\\
f_2 = \frac{\eta}{\varkappa a^{3/2}e}\left[e\frac{a^2}{r^2}\sin\theta S + \left(\eta^2\frac{a^3}{r^3} - \frac{a}{r}\right)T\right],\\
f_3 = \frac{a}{\varkappa a^{3/2} r\eta}\cos wW,\\
f_4 = \frac{a}{\varkappa a^{3/2} r\eta \sin i}\sin wW,\\
f_5 = -\frac{\eta}{\varkappa a^{3/2}e}\frac{a^2}{r^2}\cos\theta S + \\
+\frac{\sin\theta}{\varkappa a^{3/2}\eta e}\left(\frac{a}{r} + \eta^2\frac{a^2}{r^2}\right)T - f_4\cos i,\\
g = \frac{1}{2\varkappa a^{3/2}e}(-3e + 2\cos\theta + e\cos 2\theta)\frac{a}{r}S - \\
-\frac{\sin\theta}{\varkappa a^{3/2}e}\left(\frac{a}{r} + \eta^2\frac{a^2}{r^2}\right)T.
\end{gathered} \qquad (2)$$

Здесь и далее $a = \varkappa^{2/3}n^{-2/3}$ – большая полуось, $p = a\eta^2$ – фокальный параметр, $\eta = \sqrt{1-e^2}$, $r = p/(1 + e\cos\theta)$, θ – истинная аномалия, $w = \omega + \theta$ – аргумент широты.

В [6] мы провели осредняющую процедуру уравнений движения (2) и получили уравнения движения в средних элементах в первом порядке малости:

$$\dot{n} = -\frac{3n^2}{\varkappa^2\eta^2}T,$$
$$\dot{e} = \frac{ne}{\varkappa^2(1+\eta)}T,$$

$$\dot{i} = -\frac{ne}{\varkappa^2\eta(1+\eta)}\cos\omega W,$$
$$\dot{\Omega} = -\frac{ne}{\varkappa^2\eta(1+\eta)\sin i}\sin\omega W, \tag{3}$$

$$\dot{\omega} = -\cos i\dot{\Omega} = \frac{ne\operatorname{ctg} i}{\varkappa^2\eta(1+\eta)}\sin\omega W,$$
$$\dot{M} = n - \frac{2n}{\varkappa^2}S.$$

Здесь точкой (для i — жирной точкой) обозначена производная по времени t.

Решение уравнений (3) при $S, T, W \neq 0$ и в различных частных случаях выполнено нами в статье [7]. Здесь приведем частное решение при $S, T \neq 0$, $W = 0$:

$$t = \frac{\varkappa^2}{n_0 T}\left(\frac{\eta_0}{1-\eta_0}\right)^3 [h(\eta) - h(\eta_0)], \tag{4}$$

$$n = n_0\left[\frac{\eta(1-\eta_0)}{\eta_0(1-\eta)}\right]^3,$$

$$a = a_0\left[\frac{\eta_0(1-\eta)}{\eta(1-\eta_0)}\right]^2,$$
$$i = i_0, \quad \Omega = \Omega_0, \quad \omega = \omega_0, \tag{5}$$

$$M = M_0 + \frac{\varkappa^2 - 2S}{T}\left(\eta + \ln\frac{1-\eta}{1-\eta_0} - \eta_0\right),$$

где

$$h(\eta) = 2\ln\eta + \frac{1}{\eta} - \eta. \tag{6}$$

Индексом “0” отмечены значения элементов в начальную эпоху $t_0 = t(e_0) = 0$.

В (5) элементы орбиты n, a, M представлены явными элементарными функциями эксцентриситета. В кинематическом уравнении (4) $t = F(e)$ функция F также элементарна. В [7] доказана ее строгая монотонность, так что каждому t отвечает единственное значение e.

При $e < 0.8$ вычисления $h(\eta)$ по формуле (6) содержат разности почти одинаковых чисел, что приводит к потере точности. В этих случаях следует пользоваться рядом

$$t = \frac{\varkappa^2}{n_0 T}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}e_0^{2k}\right]^{-3}\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left(\frac{e^6}{e_0^6}e^{2k} - e_0^{2k}\right),$$
$$c_k = \frac{(2k+3)!!}{(2k+4)!!} - \frac{1}{k+3}. \tag{7}$$

Так как величина дрейфа эксцентриситета ~10^{-12} год$^{-1}$, мы рекомендуем использовать кинематическое уравнение (7) при $e <= 0.8$, особенно при исследовании орбитальной эволюции на временах менее 100000 лет. При таких эксцентриситетах суммирование достаточно проводить по k от 0 до 100. При $0.8 < e <= 0.95$ кинематическое уравнение (7) также дает результат с точностью 16–17 знаков после запятой, но суммировать необходимо по k от 0 до 500. При $e > 0.95$ желательно использовать уравнение (4).

Из-за малости величины изменения эксцентриситета на коротких временных интервалах и ограничения точности представления вещественных чисел в памяти компьютера при вычислении разности возмущенной и невозмущенной средней аномалии $dM = M(e) - M_0 - n_0(t(e) - t(e_0))$ происходит разброс значений, тем больший, чем меньше e_0. Использование ряда

$$M = M_0 +$$
$$+ \frac{\varkappa^2 - 2S}{T}\left[2\ln\left(\frac{e}{e_0}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-2)!}{2^{2k}(k!)^2}(e^{2k} - e_0^{2k})\right]$$

позволяет сократить этот разброс до нескольких угловых секунд.

Решение (4)–(7) определено на временах от $-t_1$ до ∞ при $T > 0$ и от $-\infty$ до $-t_1$ при $T < 0$, где

$$t_1 = \frac{\varkappa^2}{n_0 T}\left(\frac{\eta_0}{1-\eta_0}\right)^3 h(\eta_0) =$$
$$= \frac{\varkappa^2}{n_0 T}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}e_0^{2k}\right]^{-3}\sum_{k=0}^{\infty}c_k e_0^{2k}. \tag{8}$$

3. АПРОБАЦИЯ РЕШЕНИЯ (4)–(7)

Первым астероидом, для которого удалось экспериментально подтвердить действие эффекта Ярковского, стала (6489) Golevka в 2003 г. [8]. Согласно [9], для Голевки диаметром 530 м и массой 2.1×10^{11} кг сила Ярковского составляет 0.25 Н. Вследствие этого происходит уменьшение большой полуоси орбиты и увеличение среднего движения астероида. С.Р. Чесли (S.R. Chesley) и др. [8] с помощью радарных наблюдений определили, что за период с 1991 по 2003 г. фактическая траектория астероида Голевка отклонилась от расчетной на 15 км по дальности.

К настоящему времени ускорение, возникающее за счет эффекта Ярковского, оценено для 87 астероидов в [10], в базе данных малых тел Лаборатории реактивного движения (Small Body Database of Jet Propulsion Laboratory (JPL)) [11] негравитационное трансверсальное ускорение указано для 136 астероидов (по состоянию на 05.11.2020 г.), а в [12] определен дрейф большой полуоси для 247 астероидов, сближающихся с Землей (АСЗ). Типичное значение трансверсальной составляющей ускорения, обязанного эффекту Ярковского, для АСЗ диаметром менее 1 км 10^{-15}–10^{-13} а.е./сут^2. Таким образом, согласно (1) величина $\mu \approx 10^{-9} \ll 1$, следовательно, в данном случае применимо решение (4)–(7).

Сравним вековое возмущение большой полуоси, получаемое с помощью нашего решения, со значениями дрейфа, полученными в работах [10, 12, 13].

Поскольку решение (4)–(7) имеет вид зависимостей времени и элементов от эксцентриситета, то имеет смысл проверить его точность при различных значениях e от 0 до 1. Поэтому для сравнения выберем объекты так, чтобы эксцентриситеты их орбит были, по возможности, равномерно распределены в диапазоне (0, 1).

Чтобы оценить, насколько хорошо наши результаты согласуются с результатами других авторов, введем “меру пересечения” интервалов

$$I = \frac{|Y - Y'|}{\sigma + \sigma'}, \tag{9}$$

где Y соответствует значению дрейфа da/dt, полученному нами, Y' – дрейф, полученный другим автором, σ, σ' – неопределенности дрейфа в этой и другой работах соответственно. Если $I \le 1.0$, то интервалы $[Y - \sigma, Y + \sigma]$ и $[Y' - \sigma', Y' + \sigma']$ пересекаются. Чем меньше значение I, тем больше интервалы накладываются друг на друга. Будем считать, что в случае $I < 1.0$ имеет место хорошее согласие наших результатов с результатами других авторов.

В дальнейшем используются негравитационные радиальный A_1, трансверсальный A_2 и нормальный A_3 параметры, которые связаны с компонентами S, T, W соотношениями $A_1 = S/r_0^2$, $A_2 = T/r_0^2$ и $A_3 = W/r_0^2$, где $r_0 = 1$ а.е.

3.1. Сравнение с результатами [10, 13]

В работах [10, 13] проводилась дифференциальная коррекция орбиты, в результате которой определялось наиболее подходящее решение не только для орбитальных элементов, но и для параметра A_2 вместе с соответствующей ковариационной матрицей, описывающей неопределенность σ номинального решения. При этом силовая модель включала гравитационное ускорение от Солнца, восьми планет, Луны, 16 массивных астероидов главного пояса и Плутона, а также релятивистский вклад Солнца, планет и Луны и возмущение за счет эффекта Ярковского, которое моделировалось с помощью трансверсального ускорения

$$\mathbf{a}_t = A_2 g(r)\hat{\mathbf{t}}, \tag{10}$$

где $g(r)$ – функция гелиоцентрического расстояния r до астероида в виде:

$$g(r) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^d. \tag{11}$$

Здесь $r_0 = 1$ а.е., а степень d зависит от тепловых свойств объекта и в предельных случаях принимает значения между 0.5 и 3.5 [14]. Для большинства АСЗ, период вращения которых не слишком велик, а тепловая инерция поверхности не слишком мала или велика, можно ожидать значение d в диапазоне 2–3 [14]. Так как для большинства объектов нет теплофизических данных, в [10] $d = 2$ для всех астероидов, кроме (101955) Bennu, для которого принималось $d = 2.25$. Это значение было определено численно С.Р. Чесли и др. [15], которые варьировали d для лучшей орбитальной подгонки.

Итак, в [10] непосредственно из астрометрии была получена величина трансверсальной составляющей негравитационного возмущающего ускорения, а затем вычислена величина векового дрейфа большой полуоси путем осреднения по времени уравнения Гаусса для da/dt. Этот дрейф сравнивался с ожидаемым за счет эффекта Ярковского значением, исходя из теплофизических характеристик объектов. В результате А. Дель Винья (A. Del Vigna) и др. [10] получили данные для 87 астероидов, у которых найденные значения трансверсального ускорения более чем в три раза превышают величины их ошибок, а дрейф большой полуоси близок к ожидаемому значению.

В [13] аналогичным образом рассматривается АСЗ (410777) 2009 FD при $d = 2$.

Чтобы сравнить наши результаты с результатами [10, 13], возьмем величины трансверсальных параметров A_2 из [10, 13], а элементы орбиты – на сайте JPL [11].

Из 87 астероидов [10, табл. 4, 5] мы выбрали 9: 1999 UQ, 136582 (1992 BA), 350462 (1998 KG3), 101955 Bennu (1999 RQ36), 85774 (1998 UT18), 2340 Hathor (1976 UA), 6489 Golevka (1991 JX), 363599

Таблица 1. Эксцентриситет и большая полуось по данным [11], трансверсальный параметр A_2 с его ошибкой (1σ) по оценкам [10, 13]

Астероид	e_0	a_0, а.е.	$A_2 \pm 1\sigma$
1999 UQ	0.01604580510864781	1.094269847743304	−110.45 ± 18.77
1992 BA	0.0678280320661381l	1.341778964979367	−54.38 ± 16.17
1998 KG3	0.1182264627797001	1.160326678624092	−61.35 ± 11.79
101955 Bennu	0.2037451084785423	1.12639102593407l	−46.20 ± 0.24
1998 UT18	0.3291183900409435	1.402899507075806	−6.64 ± 1.55
2340 Hathor	0.4498841655895494	0.8438292455376517	−29.94 ± 1.18
6489 Golevka	0.6052965473603549	2.502473955538531	−12.04 ± 1.67
2004 FG11	0.7238483777283879	1.58705492306772	−59.90 ± 10.17
2011 CP4	0.8702761152619352	0.9114661716633674	+52.62 ± 13.99
2009 FD	0.4930307349965132	1.16384462283438	+73.00 ± 17.0

Примечание. Параметр A_2 приведен в единицах 10^{-15} а.е./сут^2.

Таблица 2. Дрейфы эксцентриситета и большой полуоси орбит объектов за 1 млн. лет (Мл) и, для сравнения, дрейфы большой полуоси da/dt' по данным [10, 13] с их ошибками, возникающими за счет ошибки определения A_2

Астероид	$\lvert t_1 \rvert$, Мл	$de/dt \pm 1\sigma$, 10^{-6} Мл$^{-1}$	$da/dt \pm 1\sigma$, 10^{-4} а.е./Мл	$da/dt' \pm 1\sigma'$, 10^{-4} а.е./Мл	$\Delta \frac{da}{dt}$, 10^{-4} а.е./Мл	I
1999 UQ	162	−16.4804584 ± 2.81	−44.90 ± 7.64	−44.85 ± 7.62	−0.05	0.003
1992 BA	447	−25.2475017 ± 7.52	−20.04 ± 5.96	−20.03 ± 5.96	−0.01	0.0008
1998 KG3	316	−61.9077270 ± 11.91	−24.54 ± 4.72	−24.52 ± 4.71	−0.02	0.002
101955 Bennu	393	−84.5718876 ± 0.44	−19.29 ± 0.10	−18.98 ± 0.1	−0.31	1.55$^\Diamond$
1998 UT18	3604	−14.3643856 ± 3.35	−2.67 ± 0.62	−2.67 ± 0.62	0.00	0.000
2340 Hathor	342	−195.1554653 ± 7.70	−17.36 ± 0.68	−17.34 ± 0.69	−0.02	0.015
6489 Golevka	365	−21.7673740 ± 3.02	−5.10 ± 0.71	−5.10 ± 0.71	0.00	0.000
2004 FG11	297	−272.9473170 ± 46.43	−42.43 ± 7.21	−42.39 ± 7.20	−0.04	0.003
2011 CP4	86	+743.4046672 ± 196.27	+96.48 ± 25.65	+96.46 ± 25.65	0.02	0.0004
2009 FD	218	+324.8099793 ± 75.49	+37.94 ± 8.83	+38 ± 9	−0.06	0.003

Примечание. Знаком $^\Diamond$ отмечено значение $I > 1.0$.

(2004 FG11), 425755 (2011 CP4). Начальные данные приведены в табл. 1.

Определим, как для этих объектов изменятся эксцентриситет и большая полуось за 1 млн. юлианских лет. При вычислениях будем использовать следующие константы:

$$\varkappa = 1.152 \times 10^{10}\ \text{м}^{3/2}\ \text{с}^{-1},$$
$$1\ \text{а.е.} = 1.495978707 \times 10^{11}\ \text{м},$$
$$1\ \text{год} = 365.25\ \text{сут}.$$

В начальный момент времени $t = 0$ эксцентриситет $e = e_0$. Решая кинематическое уравнение $F(e) = 1.0 \times 10^6$ лет относительно эксцентриситета, найдем значение e, соответствующее заданному t. Это можно сделать путем подбора или средствами компьютерной алгебры. Затем по второй формуле (5) вычислим большую полуось для этого эксцентриситета. В итоге получим изменения эксцентриситета $de = e - e_0$ и большой полуоси $da = a - a_0$ за 1.0 млн. лет.

Результаты вычислений приведены в табл. 2. Величина t_1 определяется по формуле (8) и задает область применимости решения (4)–(7): $-\lvert t_1 \rvert < t < \infty$ при $A_2 > 0$, $-\infty < t < \lvert t_1 \rvert$ при $A_2 < 0$. Значения de/dt приведены с количеством знаков, достаточным, чтобы обеспечить требуемое t. Величины da/dt приведены с той же точностью, что и в [10]. В последних двух столбцах приведены отклоне-

Таблица 3. Эксцентриситет, большая полуось и трансверсальный параметр A_2 с его ошибкой (1σ) согласно [11]. Для 99942 Apophis трансверсальный параметр A_2 согласно [17]

Астероид	e_0	a_0, а.е.	$A_2 \pm 1\sigma$, 10^{-15} а.е./сут^2
2009 BD	0.0416311814701933l	1.009762522530082	−1161.828025692882 ± 83.7
1994 AW1	0.07576826688857013	1.105238439707101	+18.89220823632566 ± 9.495
2001 WW1	0.1217782683632915	1.21025162751883	−58.01071479068062 ± 18.9
54509 YORP	0.2299152810893584	1.000041879891858	−87.40009449151943 ± 30.77
1999 JV6	0.3110955988478694	1.008213935183235	−35.34311321262337 ± 2.65
2005 ES70	0.3864346324931449	0.7629546285225717	−141.6506359015683 ± 7.249
3908 Nyx	0.4589935862788244	1.927872799266959	+20.95993294838341 ± 4.716
2001 YE4	0.5404214351464689	0.676875622805979	−69.69552052098277 ± 0.9629
4179 Toutatis	0.6242486422861974	2.545398024628497	−6.478053845633136 ± 1.042
1999 VF22	0.7386435844616204	1.312545948759961	−37.50098160987028 ± 13.79
1566 Icarus	0.8270213517584103	1.078168924356222	−3.052890990344277 ± 0.6964
3200 Phaethon	0.8898311197560821	1.271367883111356	−6.291633140867585 ± 0.6147
99942 Apophis	0.1911953048308701	0.9224383019077086	−54.0 ± 32.9

ния наших результатов от [10, 13] $\Delta(da/dt) = da/dt - da/dt'$ и “мера пересечения” I согласно (9).

Полученные нами значения дрейфа большой полуоси практически совпадают с дрейфом [10, 13], за исключением астероида (101955) Bennu, для которого $I > 1.0$. Однако, как оговаривалось ранее, для Бенну А. Дель Винья и др. [10] в выражении (11) принимают $d = 2.25$. В наших же уравнениях (2), (3) и решении (4)–(7) заложена обратная пропорциональность квадрату гелиоцентрического расстояния, т.е. $d = 2$.

3.2. Сравнение с результатами [12]

В статье [12] определено усредненное по орбите изменение большой полуоси для 247 АСЗ. А.Х. Гринберг (A.H. Greenberg) и др. использовали программный комплекс численного интегрирования, учитывая гравитационные ускорения от Солнца, восьми планет и 24 наиболее массивных малых тел, а также основные релятивистские эффекты и дополнительное негравитационное ускорение, выражение для мгновенного значения которого приведено в [16]. За подробностями отсылаем читателя к статьям [12, 16], здесь лишь заметим, что рассматриваемый метод учитывает только суточную составляющую эффекта Ярковского и кардинально отличается от метода [10, 13].

Так как в [12] величина негравитационного ускорения вычислялась динамически на каждом шаге численного интегрирования, А.Х. Гринберг и др. не приводят значений A_2, а только значения дрейфа большой полуоси. Поэтому для наших вычислений начальные данные (элементы орбиты и трансверсальный параметр A_2) возьмем на сайте JPL [11] и сведем их в таблицу (см. табл. 3). Из 247 астероидов [12, табл. 1] мы выбрали 12: 2009 BD, 385186 (1994 AW1), 376879 (2001 WW1), 54509 YORP (2000 PH5), 85990 (1999 JV6), 483656 (2005 ES70), 3908 Nyx (1980 PA), 480883 (2001 YE4), 4179 Toutatis (1989 AC), 455176 (1999 VF22), 1566 Icarus (1949 MA), 3200 Phaethon (1983 TB), отдавая предпочтение объектам, для которых дрейф большой полуоси определялся с учетом радарных измерений. Лишь два астероида в нашем списке имеют только оптическую астрометрию, они отмечены “*” в табл. 4, в которой приведены результаты наших вычислений и их сравнение с результатами [12].

Здесь же рассмотрен астероид 99942 Apophis (2004 MN4), для которого параметр A_2 найден в результате дифференциальной коррекции и опубликован в [17], где Х.А. Перес-Эрнандес (J.A. P´erez-Hern´andez) и Л. Бенет (L. Benet) представили для Апофиса независимую оценку эффекта Ярковского на основе оптической и радиолокационной астрометрии. Полученный нами дрейф большой полуоси сравнивается с результатом [12, п. 13.9].

Последний столбец табл. 4 дает нам один объект (1999 JV6), для которого “мера пересечения” превышает единицу, и еще два (2009 BD и 4179 Toutatis) с $I > 0.8$, что указывает на значительное

Таблица 4. Дрейфы эксцентриситета и большой полуоси орбит объектов за 1 млн. лет (Мл) и, для сравнения, дрейфы большой полуоси da/dt' согласно [12] с их ошибками. Знаком "*" отмечены объекты, для которых дрейф большой полуоси определен в [12] на основе только оптических наблюдений

Астероид	$\lvert t_1 \rvert$, Мл	$de/dt \pm 1\sigma$, 10^{-6} Мл$^{-1}$	$da/dt \pm 1\sigma$, 10^{-4} а.е./Мл	$da/dt' \pm 1\sigma'$, 10^{-4} а.е./Мл	$\Delta \frac{da}{dt}$, 10^{-4} а.е./Мл	I
2009 BD*	13	−522.43761819 ± 38.9	−498.03 ± 36.3	−381.69 ± 99.3	−116.34	0.86
1994 AW1	961	+13.09205267 ± 6.6	+7.67 ± 3.9	+4.08 ± 2.7	3.59	0.54
2001 WW1*	356	−56.60826990 ± 18.5	−22.74 ± 7.4	−27.37 ± 10.5	4.63	0.26
54509 YORP	172	−216.75217006 ± 76.5	−39.22 ± 13.8	−33.85 ± 13.3	−5.37	0.20
1999 JV6	416	−118.36257410 ± 8.9	−16.56 ± 1.2	−14.10 ± 1.0	−2.46	1.12$^\lozenge$
2005 ES70	653	−913.39456707 ± 47.1	−81.14 ± 4.2	−79.57 ± 3.1	−1.57	0.22
3908 Nyx	1677	+40.39946708 ± 9.1	+8.12 ± 1.8	+7.10 ± 1.6	1.02	0.30
2001 YE4	96	−783.65376100 ± 10.9	−50.88 ± 0.7	−49.84 ± 0.7	−1.04	0.74
4179 Toutatis	6764	−11.87123702 ± 1.9	−2.83 ± 0.5	−2.15 ± 0.3	−0.68	0.85
1999 VF22	344	−233.99083514 ± 86.2	−30.60 ± 11.3	−37.40 ± 6.9	6.80	0.37
1566 Icarus	2367	−30.66125182 ± 7.0	−3.95 ± 0.9	−4.84 ± 0.4	0.89	0.68
3200 Phaethon	1053	−56.97612972 ± 5.6	−11.38 ± 1.1	−9.57 ± 2.1	−1.81	0.57
99942 Apophis	250	−125.08543665 ± 76.3	−24.8 ± 15.1	−25.6 ± 13.6	0.8	0.03

Примечание. Знаком $^\lozenge$ отмечено значение $I > 1.0$.

расхождение результатов, хотя и имеется пересечение интервалов значений дрейфов.

Расхождение результатов для 1999 JV6 и 4179 Toutatis объясняется тем, что значения A_2, приведенные для этих астероидов на сайте JPL, вычислены с учетом новых наблюдений, проведенных в 2020 г., в то время как результаты [12] получены на основе наблюдательных дуг, ограниченных 2019 г. В [18] приведены оценки параметра A_2 по состоянию на сентябрь 2016 г. Для 1999 JV6 $A_2 = (-30.30 \pm 3.85) \times 10^{-15}$ а.е./сут^2. В этом случае при $de/dt = (-101.4584480900 \pm 12.90) \times 10^{-6}$ (млн. лет)$^{-1}$ получим дрейф $da/dt = (-14.19 \pm 1.80) \times 10^{-4}$ а.е./(млн. лет), отклонение от [12] $\Delta \frac{da}{dt} = -0.09 \times 10^{-4}$ а.е./(млн. лет) и "меру пересечения" $I = 0.03$. Для 4179 Toutatis $A_2 = (-4.45 \pm 1.34) \times 10^{-15}$ а.е./сут^2, что дает при $de/dt = (-8.154583214 \pm 2.46) \times 10^{-6}$ (млн. лет)$^{-1}$ дрейф $da/dt = (-1.94 \pm 0.58) \times 10^{-4}$ а.е./(млн. лет), отклонение от [12] $\Delta \frac{da}{dt} = 0.21 \times 10^{-4}$ а.е./(млн. лет) и "меру пересечения" $I = 0.24$. Таким образом, без учета новых данных получаем хорошее согласие.

Для астероида 2009 BD дрейф большой полуоси определен в [12] на основе только оптической астрометрии, полученной в короткий период с 2009 по 2011 г., и имеет большую неопределенность. Однако, при совместном учете эффекта Ярковского и давления солнечного излучения было найдено более точное значение дрейфа $da/dt' = (-497.6 \pm 40.5) \times 10^{-4}$ а.е./(млн. лет) [12, п. 13.2], от которого наш результат отличается на $\Delta \frac{da}{dt} = -0.43 \times 10^{-4}$ а.е./(млн. лет) с "мерой пересечения" $I = 0.006$.

3.3. Выводы

Сравнительный анализ показывает, что решение (4)–(7) при различных $e_0 \in (0,1)$ дает результаты, согласующиеся с другими методами, поэтому оно может использоваться для исследования долгосрочной орбитальной эволюции малых тел с учетом негравитационного ускорения, обратно пропорционального квадрату расстояния до притягивающего центра, если величина этого ускорения известна. В случае эффекта Ярковского обычно принимается во внимание только трансверсальная составляющая, вызывающая вековое изменение большой полуоси. При этом параметр A_2 определяется путем дифференциальной коррекции орбиты, что требует наличия высокоточных астрометрических наблюдений в течение длительного времени.

В Приложении предложен альтернативный способ определения величины ускорения Ярковского, который снимает необходимость иметь наблюдения на большом интервале времени, но требует знания таких характеристик объекта, как диаметр, объемная плотность, скорость вращения, наклон оси вращения к плоскости орбиты, альбедо Бонда, тепловая инерция поверхности, удельная теплоемкость и тепловая излучательная способность.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью аналитического решения системы осредненных уравнений в системе отсчета, связанной с радиусом-вектором, исследовалось влияние эффекта Ярковского на долгосрочную эволюцию орбиты малого тела. Величину ускорения, возникающего вследствие эффекта Ярковского, можно найти как дополнительный параметр при определении орбиты из наблюдений, что требует высокоточной астрометрии на протяжении длительного времени. Другой путь — вычисление компонентов ускорения, используя какую-либо модель силы Ярковского. В этом случае требуется знание параметров вращения и теплофизических характеристик астероидов.

В данной статье вычислен дрейф большой полуоси для 23 астероидов, трансверсальный параметр которых определен первым способом и опубликован в различных источниках. Получено хорошее согласие результатов с другими работами.

Далее предлагается способ вычисления негравитационных параметров на основе линейной модели силы Ярковского для сферических астероидов [2] и уравнений [19, ф-лы (12)] для компонентов этой силы в системе отсчета, связанной с радиусом-вектором. Для астероида 1685 Toro (1948 OA), используя его теплофизические характеристики, опубликованные в [20], предложенным способом найдены численные значения негравитационных параметров A_1, A_2, A_3, а затем дрейфы эксцентриситета, большой полуоси и средней аномалии за 1000 оборотов вокруг Солнца (1600 лет), и оценено смещение астероида от невозмущенного положения, возникающее из-за эффекта Ярковского.

В дальнейшем мы планируем найти решение системы осредненных уравнений в системе отсчета, связанной с вектором скорости и применить его к движению астероида и, в частности, для исследования дрейфа большой полуоси орбиты при наличии дополнительного возмущающего тангенциального ускорения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЗАДАЧА ДВИЖЕНИЯ АСТЕРОИДА 1685 TORO

Используя данные теплового инфракрасного излучения с космического корабля WISE, Й. Дюрех (J. ˇDurech) и др. [20] исследовали теплофизические характеристики астероидов 1685 Toro (1948 OA), 2100 Ra-Shalom (1978 RA), (3103) Eger и 161989 Cacus (1978 CA) и оценили вековые изменения скорости их вращения вследствие YORP-эффекта. Затем по имеющейся оптической и радиолокационной астрометрии сделали вывод о дрейфе большой полуоси их орбит за счет эффекта Ярковского.

Наиболее полные данные в [20] получены для 1685 Toro. Для этого объекта мы определили величины негравитационных параметров A_1, A_2, A_3, используя линейную теплофизическую модель силы Ярковского для сферического астероида, которая подробно описана в [2, 21, 22]. Здесь мы только кратко сформулируем методику наших расчетов.

1. Модель ускорения Ярковского

Опираясь на [2], в [19] выведены составляющие ускорения Ярковского (в наших обозначениях это ускорение $\mathbf{P}$) в проекции на оси системы $\mathbb{C}$ [19, ф-лы (12)]:

$$
\begin{aligned}
P_r &= \frac{4\alpha\Phi}{9(1+\chi)}\Big\{E_{R'_s}\sin(\delta_{R'_s}+\lambda)\sin\lambda\sin^2\gamma + \\
&\quad + E_{R'_d}\cos\delta_{R'_d}[\cos^2\lambda + \sin^2\lambda\cos^2\gamma]\Big\},\\
P_t &= \frac{4\alpha\Phi}{9(1+\chi)}\Big\{E_{R'_s}\sin(\delta_{R'_s}+\lambda)\cos\lambda\sin^2\gamma - \\
&\quad - E_{R'_d}[\cos\delta_{R'_d}\sin\lambda\cos\lambda\sin^2\gamma + \sin\delta_{R'_d}\cos\gamma]\Big\},\\
P_n &= \frac{4\alpha\Phi}{9(1+\chi)}\Big\{E_{R'_s}\sin(\delta_{R'_s}+\lambda)\sin\gamma\cos\gamma - E_{R'_d}\times \\
&\quad \times[\cos\delta_{R'_d}\sin\lambda\sin\gamma\cos\gamma - \sin\delta_{R'_d}\cos\lambda\sin\gamma]\Big\},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где индекс s соответствует сезонному эффекту Ярковского, d — суточному. В (12) γ — наклон оси вращения астероида относительно нормали к плоскости его орбиты, $\lambda = \omega_{rev}(t - t_0)$ — средняя долгота, ω_{rev}— среднее движение, t — время, t_0 — момент начала отсчета времени, $\alpha = 1 - A$ — коэффициент оптического поглощения, A — альбедо Бонда,

$$
\Phi = \frac{\mathcal{E}_\star \pi R^2}{mc}, \quad \chi = \frac{\Theta_s}{\sqrt{2}R'_s},
$$

$$\Theta_s = \frac{\Gamma\sqrt{\omega_{rev}}}{\epsilon\sigma T_\star^3}, \quad \Gamma = \sqrt{K\rho C}, \quad T_\star = \left(\frac{\alpha\mathcal{E}_\star}{\epsilon\sigma}\right)^{1/4},$$

Γ – тепловая инерция поверхности, $T_\star$ – температура подсолнечной точки, $\mathcal{E}_\star = L_\odot/(4\pi a^2)$ – поток излучения Солнца на гелиоцентрическом расстоянии a, $L_\odot = 3.86\times10^{26}$ Вт – светимость Солнца, $c = 299792458$ м/с – скорость света [23], $\sigma = 5.670374419\times10^{-8}$ Вт м$^{-2}$ K^{-4} – постоянная Стефана–Больцмана [24], m, R, ρ, ϵ, K, C – масса, радиус, объемная плотность, тепловая излучательная способность, теплопроводность и удельная теплоемкость астероида соответственно. Далее,

$$R_s' = \frac{R}{l_s}, \quad l_s = \frac{\Gamma}{\rho C\sqrt{\omega_{rev}}},$$

$$\omega_{rev} = \frac{2\pi}{P_{rev}}, \quad R_d' = \frac{R}{l_d},$$

$$l_d = l_s\sqrt{\frac{\omega_{rev}}{\omega_{rot}}}, \quad \omega_{rot} = \frac{2\pi}{P_{rot}},$$

где P_{rev} – период обращения астероида вокруг Солнца, P_{rot} – период вращения вокруг оси. Кроме того, в (12) амплитуда $E_{R'} = E(\sqrt{2}R')$ и фаза $\delta_{R'} = \delta(\sqrt{2}R')$ определены, как и в [2], соотношениями

$$E_{R'}\exp(i\delta_{R'}) = \frac{A(x) + iB(x)}{C(x) + iD(x)},$$

$$E_{R'}\exp(-i\delta_{R'}) = \frac{A(x) - iB(x)}{C(x) - iD(x)},$$

где $i = \sqrt{-1}$, $x = \sqrt{2}R'$ и вспомогательные функции

$$A(x) = -(x+2) - e^x[(x-2)\cos x - x\sin x],$$
$$B(x) = -x - e^x[x\cos x + (x-2)\sin x],$$

$$C(x) = A(x) + \frac{\chi}{1+\chi}(3(x+2) + e^x[3(x-2)\cos x + x(x-3)\sin x]),$$

$$D(x) = B(x) + \frac{\chi}{1+\chi}(x(x+3) - e^x[x(x-3)\cos x - 3(x-2)\sin x]).$$

Функции (12) являются периодическими по λ, найдем их средние значения за орбитальный период, предполагая, что ориентация оси вращения, а также периоды P_{rev} и P_{rot} не изменяются со временем:

$$\overline{P_r} = \frac{2\alpha\Phi}{9(1+\chi)}\Big(E_{R_s'}\cos\delta_{R_s'}\sin^2\gamma + E_{R_d'}\cos\delta_{R_d'}(1+\cos^2\gamma)\Big),$$
$$\overline{P_t} = \frac{2\alpha\Phi}{9(1+\chi)}\Big(E_{R_s'}\sin\delta_{R_s'}\sin^2\gamma - 2E_{R_d'}\sin\delta_{R_d'}\cos\gamma\Big), \tag{13}$$
$$\overline{P_n} = 0.$$

В (13) коэффициент Φ обратно пропорционален квадрату гелиоцентрического расстояния. Чтобы получить параметры A_1, A_2, A_3, необходимо вычислить Φ для расстояния 1 а.е [14]. Учитывая это и выражая $\cos\delta_{R'}$ и $\sin\delta_{R'}$ через показательные функции, окончательно найдем негравитационные параметры

$$A_1 = \frac{\alpha\Phi(1\text{ a.e.})}{9(1+\chi)}\Big\{[E_{R_s'}\exp(-i\delta_{R_s'}) + E_{R_s'}\exp(i\delta_{R_s'})]\times \sin^2\gamma + [E_{R_d'}\exp(-i\delta_{R_d'}) + E_{R_d'}\exp(i\delta_{R_d'})]\times(1+\cos^2\gamma)\Big\},$$
$$A_2 = \frac{\alpha\Phi(1\text{ a.e.})}{9(1+\chi)}\Big\{i[E_{R_s'}\exp(-i\delta_{R_s'}) - E_{R_s'}\exp(i\delta_{R_s'})]\times \sin^2\gamma - 2i[E_{R_d'}\exp(-i\delta_{R_d'}) - E_{R_d'}\exp(i\delta_{R_d'})]\cos\gamma\Big\}, \tag{14}$$
$$A_3 = 0.$$

Замечание 1. Выражения (12) справедливы в предположении, что плоскость орбиты астероида изменяется медленно, а период вращения вокруг оси значительно короче, чем орбитальный период [19].

Замечание 2. Эффект Ярковского вызывает вековое изменение среднего движения, а значит и периода обращения астероида вокруг Солнца. YORP-эффект приводит к изменению скорости и периода вращения объекта вокруг оси. Вследствие этого величины негравитационных параметров будут медленно изменяться со временем, но в данной статье, в рамках поставленной во Введении задачи, мы считаем их постоянными.

2. Орбитальная эволюция 1685 Toro

Определим для астероида 1685 Toro дрейф большой полуоси за 1 млн. лет, а также смещение возмущенного за счет силы Ярковского положения относительно невозмущенного за 1000 P_{rev} (1600 лет).

В табл. 5 содержатся начальные данные для Торо с указанием источников. Альбедо Бонда мы вычислили по формуле $A = p_V(0.290 + 0.684G)$ [14, 26], где p_V – геометрическое альбедо, G – наклонный параметр.

С помощью (14) мы нашли $A_1 = (7.96229^{+2.72}_{-3.48})\times10^{-15}$ а.е./сут^2 и $A_2 = (-3.24047^{+0.42}_{-0.57})\times10^{-15}$ а.е./сут^2

Таблица 5. Элементы орбиты и теплофизические характеристики астероида 1685 Toro с ошибками их определения

Параметр	Значение	Источник	Параметр	Значение	Источник
a	1.367586471667151 а.е.	[11]	Γ	260^{+140}_{-110} Дж м$^{-2}$ с$^{-1/2}$ K^{-1}	[20]
e	0.4358371102560366	[11]	C	680 Дж кг$^{-1}$ K^{-1}	[9, 19]
P_{rev}	584.1583930934321 сут	[11]	ϵ	0.9	[25]
P_{rot}	$10.19782 \pm 3 \times 10^{-5}$ час	[20]	p_V	0.13 ± 0.03	[20]
γ	$161 \pm 6°$	[20]	G	0.11	[20]
R	1750^{+150}_{-200} м	[20]	A	0.04748 ± 0.011	
ρ	2500 кг м$^{-3}$	[20]			

Таблица 6. Дрейфы эксцентриситета и большой полуоси орбиты астероида 1685 Toro за 1 млн. лет (Мл) и, для сравнения, дрейфы большой полуоси da/dt' из различных источников

Астероид	$\lvert t_1 \rvert$, Мл	$de/dt \pm 1\sigma$, 10^{-6} Мл$^{-1}$	$da/dt \pm 1\sigma$, 10^{-4} а.е./Мл	$da/dt' \pm 1\sigma'$, 10^{-4} а.е./Мл	$\Delta \frac{da}{dt}$, 10^{-4} а.е./Мл	I
1685 Toro	6754	$-9.86928710^{+1.74}_{-1.28}$	$-1.45^{+0.26}_{-0.19}$	-1.38 ± 0.32 [20]	-0.07	0.14
				-1.57 ± 0.4 [12]	0.12	0.20
				-1.68 ± 0.38 [10]	0.23	0.40

(для сравнения, в базе JPL [11] $A_2 = (-3.099651371662129 \pm 0.6952) \times 10^{-15}$ а.е./сут^2, значение для A_1 не указано). Величины неопределенностей A_1 и A_2 определялись путем варьирования теплофизических параметров в пределах их ошибок.

Далее мы вычислили с помощью (5) дрейф эксцентриситета и большой полуоси за 1 млн. лет. В табл. 6 приведены наши значения и дрейф большой полуоси согласно [10, 12, 20]. Получено хорошее согласие результатов.

Наличие возмущающего ускорения оказывает также значительное воздействие на среднюю аномалию. С помощью последнего уравнения (5) мы нашли, что за 1000 P_{rev} (1600 лет) отклонение средней аномалии от невозмущенного значения составит от 2.50′ до 3.28′ с учетом неопределенностей параметров A_1, A_2. В результате астероид отклонится от невозмущенного положения на расстояние от 143 до 188 тыс. км. За этот период $de = (-1.578327374352^{+0.28}_{-0.21}) \times 10^{-8}$ и $da = (-2.32^{+0.41}_{-0.30}) \times 10^{-7}$ а.е.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает сердечную благодарность профессору, доктору физ.-мат. наук Константину Владиславовичу Холшевникову за обсуждение статьи и анонимному рецензенту за ценные замечания, учтенные в окончательной редакции рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *W. F. Bottke Jr., D. Vokrouhlický, D. P Rubincam, and M. Broz, in Asteroids III, edited by W. F. Bottke Jr., A. Cellino, P. Paolicchi, R. P. Binzel* (University of Arizona Press, 2002), c. 395.
2. *D. Vokrouhlický*, Astron. and Astrophys. **344**, 362 (1999).
3. *Т. Ю. Галушина, О. М. Сюсина*, Изв. ВУЗов. Физика **63**(3), 65 (2020).
4. *М. Д. Сизова, Е. Ефремова*, в сб. *Некоторые аспекты современных проблем механики и информатики*, под ред. Р. Р. Назирова (М.: Изд-во ИКИ РАН, 2018), с. 268.
5. *М. Ф. Субботин*, *Введение в теоретическую астрономию* (М.: Наука, 1968).
6. *Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников*, Астрон. журн. **96**(5), 418 (2019).
7. *Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников*, Астрон. журн. **97**(9), 747 (2020).
8. *S. R. Chesley, S. J. Ostro, D. Vokrouhlickỳ, D. Čapek, et al.*, Science **302**(5651), 1739 (2003).
9. *W. F. Bottke, D. Vokrouhlický, D. P. Rubincam, and D. Nesvorný*, Ann. Rev. Earth and Planet. Sciences **34**, 157 (2006).

10. *A. Del Vigna, L. Faggioli, A. Milani, F. Spoto, D. Farnocchia, and B. Carry*, Astron. and Astrophys. **617**, id. A61 (2018).

11. JPL Small-Body Database Search Engine, *Jet Propulsion Laboratory NASA*, https://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb_query.cgi.

12. *A. H. Greenberg, J. L. Margot, A. K. Verma, P. A. Taylor, and S. E. Hodge*, Astron. J. **159**(3), 92 (2020).

13. *A. Del Vigna, J. Roa, D. Farnocchia, M. Micheli, D. Tholen, F. Guerra, F. Spoto, and G. B. Valsecchi*, Astron. and Astrophys. **627**, id. L11 (2019).

14. *D. Farnocchia, S. R. Chesley, D. Vokrouhlický, A. Milani, F. Spoto, and W. F. Bottke*, Icarus **224**, 1 (2013).

15. *S. R. Chesley, D. Farnocchia, M. Nolan, D. Vokrouhlický, et al.*, Icarus **235**, 5 (2014).

16. *A. H. Greenberg, J. L. Margot, A. K. Verma, P. A. Taylor, S. P. Naidu, M. Brozovic, and A. M. Benner Lance*, Astron. J. **153**(3), 108 (2017).

17. *J. A. Pérez-Hernández and L. Benet*, Bull. Amer. Astron. Soc. **52**(4), id. 2020n4i104p02 (2020).

18. *C. Tardioli, D. Farnocchia, B. Rozitis, D. Cotto-Figueroa, S. R. Chesley, T. S. Statler, and M. Vasile*, Astron. and Astrophys. **608**, id. A61 (2017).

19. *Y.-B. Xu, L.-Y. Zhou, C. Lhotka, and W.-H. Ip*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **493**(1), 1447 (2020).

20. *J. Ďurech, D. Vokrouhlický, P. Pravec, J. Hanuš, et al.*, Astron. and Astrophys. **609**, id. A86 (2018).

21. *D. Vokrouhlický*, Astron. and Astrophys. **335**, 1093 (1998).

22. *D. Vokrouhlický and M. Broz*, Astron. and Astrophys. **350**, 1079 (1999).

23. Speed of light in vacuum, *The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty*, https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?c.

24. Stefan-Boltzmann constant, *The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty*, https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?sigma.

25. *J. Ďurech, M. Delbó, B. Carry, J. Hanuš, and V. Ali-Lagoa*, Astron. and Astrophys. **604**, id. A27 (2017).

26. *K. Muinonen, I. N. Belskaya, A. Cellino, M. Delbó, A. C. Levasseur-Regourd, A. Penttilä, and E. F. Tedesco*, Icarus **209**(2), 542 (2010).