АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2021, том 98, № 7, с. 571–580

УДК 521.1

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕКОВОЙ ЭВОЛЮЦИИ ЦИРКУМБИНАРНЫХ СИСТЕМ НА МОДЕЛЯХ R-ТОРОИДА И КОЛЕЦ ГАУССА


**Б. П. Кондратьев[1, 2, 3, *], В. С. Корноухов[1, 2]**

[1] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, Москва, Россия*
[2] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга, Москва, Россия*
[3] *Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия*
**E-mail: work@boris-kondratyev.ru*

Поступила в редакцию 20.02.2021 г.
После доработки 12.03.2021 г.
Принята к публикации 31.03.2021 г.

Разработаны два метода изучения вековой (апсидальной и нодальной) прецессии орбит в циркумбинарных системах, состоящих из двойной звезды и экзопланеты. Первый метод основан на модели из трех R-тороидов и предназначен для исследования прецессии пробных орбит. Для экзосистем Kepler-413 и Kepler-453 найдены взаимная ориентация угловых моментов звездной пары $L_{12}$ и планеты $L_p$ относительно плоскости Лапласа, вычислены отношение $\gamma = \dfrac{L_{12}}{L_p}$ и зональные гармоники потенциала R-тороидов. Получены и решены уравнения для частот обоих типов прецессии, установлено доминирующее влияние тороидов звездной пары. Второй метод опирается на модель взаимодействующих колец Гаусса и предназначен для исследования вековой эволюции орбит звезд и планеты самой циркумбинарной системы. Такой подход позволил точно рассчитать периоды нодальной прецессии для звезд и планеты; например, в системе Kepler-413 эти периоды равны, соответственно, $T_1^0 = 11.63 \pm 0.28$ лет, $T_2^0 = 11.39 \pm 0.28$ лет, $T_p^0 = 11.49 \pm 0.28$ лет. Выявлен тонкий эффект влияния планеты на нарушение резонанса 1:1 для периодов нодальной прецессии звезд.

*Ключевые слова:* циркумбинарные системы, вековые возмущения, эллиптические кольца Гаусса, R-тороид, прецессия и эволюция оскулирующих орбит (для английской версии circumbinary systems, secular perturbations, elliptical Gauss rings, R-toroid, precession and evolution of osculating orbits)

**DOI:** 10.31857/S0004629921080077

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была разработана модель R-тороида, предназначенная для исследования долгопериодических и вековых возмущений в небесной механике. Эта модель представляет 3D обобщение прецессирующего кольца Гаусса, и метод ее построения сводится к цепочке преобразований: 1D кольцо Гаусса – 2D R-кольцо – 3D R-тороид. В [1] были изучены форма, структура и гравитационный потенциал R-тороида, найдена взаимная энергия $W_{\mathrm{mut}}$ R-тороида и внешнего кольца Гаусса; с помощью $W_{\mathrm{mut}}$ получена система из шести дифференциальных уравнений, описывающих вековую эволюцию оскулирующих орбит в гравитационном поле R-тороида.

Было установлено, что в Солнечной системе модель R-тороида можно применять для оценки гравитационного влияния планет-гигантов на вековую эволюцию тел в рассеянном диске и в облаке Оорта. Перспективным является применение новой модели для изучения динамики экзопланет, о которых к настоящему времени накопилась огромная наблюдательная информация. В частности, с помощью модели R-тороида в [1] рассчитан профиль частот прецессии пробной орбиты в поле прецессирующей центральной звезды и планеты PTFO 8-8695b (об этой системе см. [2, 3]).

В обширной экзопланетной тематике наиболее актуальным является применение модели R-тороида к изучению эволюции орбит горячих юпитеров с коротким временем нодальной прецессии и циркумбинарных систем. Циркумбинарные системы состоят из тесной пары звезд и двигающейся вокруг них экзопланеты. Изучению движения таких тройных систем (планет с кратными орбитами) посвящено немало работ, см., например, [4–6]. Их важно изучать потому, что встречающиеся здесь орбитальные конфигурации и трехчастичные гравитационные взаимодействия позволяют проводить прямые и точные измерения масс и радиусов тел.

Данная работа посвящена решению двух задач. В первой исследуется апсидальная и нодальная прецессия пробных орбит в гравитационном поле трех R-тороидов. Во второй задаче методом взаимодействующих колец Гаусса изучается вековая эволюция орбит тел (двух звезд и экзопланеты) самой циркумбинарной системы. Здесь выявлен тонкий эффект нарушения синхронности в вековом движении центральной пары звезд под влиянием планеты.

План статьи следующий. В разделах 2, 3 дана постановка задачи, вводится плоскость Лапласа и находятся углы ориентации и угловые моменты в циркумбинарных системах Kepler-413 и Kepler-453. В подразделах 4.1–4.3 изучается прецессия пробных орбит в суммарном гравитационном поле трех R-тороидов. Применение метода к системе Kepler-413 излагается в подразделе 4.4, а в 4.5 дана сводка результатов для двух систем экзопланет. В разделе 5 через взаимную энергию колец Гаусса изучается эволюция орбит тел самой циркумбинарной системы. Получены уравнения для частоты прецессии линии узлов кольца Гаусса и изучается влияние планеты на нарушение резонанса в вековом движении узлов звездных орбит. Результаты работы обсуждаются в разделе 6.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ПЛОСКОСТЬ ЛАПЛАСА И УГЛЫ ОРИЕНТАЦИИ

Рассмотрим циркумбинарную систему, в которой одна экзопланета движется по внешней (отдаленной) орбите вокруг тесной пары звезд. Для описания движения тел в такой системе следует знать массы и орбитальные параметры двух звезд $(M_1, M_2, a_1, a_2, e_{12}, i_{12})$ и планеты $(m, a_p, e_p, i_p)$. Здесь углы наклонов орбит звезд $i_{12}$ и планеты $i_p$ будем отсчитывать от общей для системы плоскости Лапласа (рис. 1).

Угловой момент орбитального эллиптического движения тела (на единицу массы) в заданной тройной системе запишем в виде

$$L = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, \tag{1}$$

где $a$ и $e$ – большая полуось и эксцентриситет орбиты, $\mu = G\bar{M}$ – аналог гравитационного параметра тела. Если начало координат находится в центре масс двойной звезды (принимается усло-

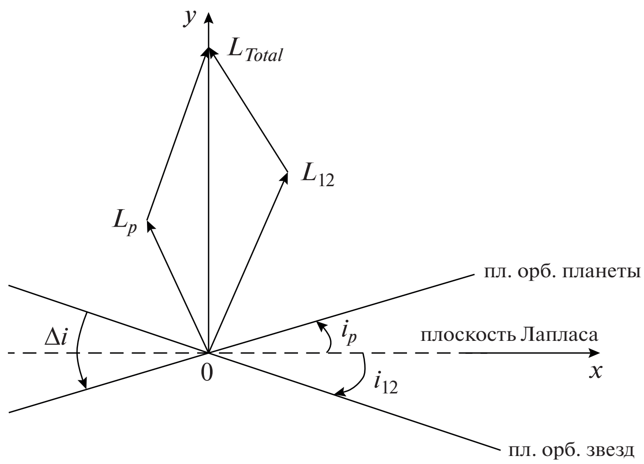


**Рис. 1.** Схема векторов угловых орбитальных моментов в циркумбинарной системе. Штрихами показана плоскость Лапласа.

вие $m \ll M_1 + M_2$), то отмеченные верхней чертой величины $\bar{M}$ равны:

$$\bar{M}_1 = \frac{M_2^3}{(M_1 + M_2)^2}; \qquad \bar{M}_2 = \frac{M_1^3}{(M_1 + M_2)^2}. \tag{2}$$

Через величины $\bar{M}$ из (2) орбитальный угловой момент звездной пары равен

$$L_{12} = M_1\sqrt{G\bar{M}_1 a_1(1 - e_{12}^2)} + M_2\sqrt{G\bar{M}_2 a_2(1 - e_{12}^2)}, \tag{3}$$

где полуоси орбит каждой звезды (с фокусом в общем центре масс) связаны очевидными соотношениями

$$a_1 + a_2 = a_{12}, \qquad a_1 M_1 = a_2 M_2. \tag{4}$$

Тогда угловой орбитальный момент планеты массой $m$ будет равен

$$L_p = m\sqrt{G(M_1 + M_2)a_p(1 - e_p^2)}. \tag{5}$$

Рассмотрим в данной системе плоскость Лапласа. По определению, эта плоскость должна быть нормальна вектору полного орбитального углового момента системы $\mathbf{L}_{\mathrm{Total}} = \mathbf{L}_{12} + \mathbf{L}_p$. В заданных декартовых координатах (рис. 1) проекции векторов угловых моментов на оси $Oxy$ будут равны (см. также [7]):

$$L_{12}^{(x)} = L_{12}\cos\left(\frac{\pi}{2} - i_{12}\right) = L_{12}\sin i_{12}, \qquad L_{12}^{(y)} = L_{12}\sin\left(\frac{\pi}{2} - i_{12}\right) = L_{12}\cos i_{12}; \tag{6}$$

$$L_p^{(x)} = L_p \cos\left(\frac{\pi}{2} + i_p\right) = -L_p \sin i_p,$$
$$L_p^{(y)} = L_p \sin\left(\frac{\pi}{2} + i_p\right) = L_p \cos i_p, \tag{7}$$

где $i_p$ и $i_{12}$ — вспомогательные углы наклона плоскостей орбит планеты и звезд к плоскости Лапласа. Указанное выше условие перпендикулярности плоскости Лапласа вектору $\boldsymbol{L}_{\mathrm{Total}}$ выполняется, если

$$L_p \sin i_p = L_{12} \sin i_{12}. \tag{8}$$

Таким образом, для вспомогательных углов $i_p$ и $i_{12}$ получим систему двух уравнений

$$\frac{\sin i_p}{\sin i_{12}} = \frac{L_{12}}{L_p} = \gamma,$$
$$i_p + i_{12} = \Delta i. \tag{9}$$

Две формулы (9) можно объединить в одну и выразить наклон плоскости орбит двойной звезды $i_{12}$ к плоскости Лапласа через $\Delta i$

$$i_{12} = \arctan \frac{\sin \Delta i}{\gamma + \cos \Delta i}. \tag{10}$$

В итоге, согласно формулам (3) и (5), отношение угловых орбитальных моментов двойной звезды и планеты в циркумбинарной системе будет равно

$$\gamma = \frac{L_{12}}{L_p} = \sqrt{\frac{1 - e_{12}^2}{1 - e_p^2}} \left[\frac{M_1\sqrt{\bar{M}_1 a_1} + M_2\sqrt{\bar{M}_2 a_2}}{m\sqrt{(M_1 + M_2)a_p}}\right]. \tag{11}$$

## 3. ПРИМЕРЫ: СИСТЕМЫ KEPLER-413 И KEPLER-453

Согласно [8], для системы Kepler-413 известно следующее: массы двух звезд и планеты равны $M_1 = 0.820 \pm 0.015\, M_\odot$, $M_2 = 0.542 \pm 0.008\, M_\odot$, $m = (67 \pm 21) M_{\mathrm{Earth}}$ (как видим, масса планеты известна весьма приближенно); полуоси орбит $a_{12} = 0.10148 \pm 0.00057$. а.е., $a_p = 0.355 \pm 0.002$ а.е.; эксцентриситеты $e_{12} = 0.0365 \pm 0.0023$ (орбиты звезд почти круговые), $e_p = 0.1181 \pm 0.0018$; угол между плоскостью орбиты планеты и плоскостью орбит звезд $\Delta i = 4^\circ\!.073 \pm 0^\circ\!.113$.

По формуле (11), с учетом данных наблюдений для Kepler-413 находим отношение суммарного орбитального углового момента пары звезд к орбитальному угловому моменту планеты

$$\gamma = \frac{L_{12}}{L_p} \approx 873. \tag{12}$$

**Таблица 1.** Параметры для циркумбинарных систем Kepler-413 из [8] и Kepler-453 из [9]

| Система | Kepler-413 | Kepler-453 |
|---|---|---|
| $M_1$ $[M_\odot]$ | $0.820 \pm 0.015$ | $0.944 \pm 0.010$ |
| $M_2$ $[M_\odot]$ | $0.542 \pm 0.008$ | $0.1951 \pm 0.0020$ |
| $a_{12}$ [a.e.] | $0.10148 \pm 0.00057$ | $0.18539 \pm 0.00066$ |
| $e_{12}$ | $0.0365 \pm 0.0023$ | $0.0524 \pm 0.0037$ |
| $i'_{12}$ [°] | $87.332 \pm 0.050$ | $90.266 \pm 0.052$ |
| $\omega_{12}$ [°] | $279.74 \pm 0.62$ | $263.05 \pm 0.48$ |
| $M_p$ $[M_{\mathrm{Earth}}]$ | $67 \pm 21$ | $0.2 \pm 16.0$ |
| $a_p$ [a.e.] | $0.355 \pm 0.002$ | $0.7903 \pm 0.0028$ |
| $e_p$ | $0.1181 \pm 0.0018$ | $0.0359 \pm 0.0088$ |
| $i'_p$ [°] | $89.929 \pm 0.024$ | $89.4429 \pm 0.0091$ |
| $\omega_p$ [°] | $94.6 \pm 2.2$ | $185.1 \pm 3.7$ |
| $\Delta\Omega_p$ [°] | $3.139 \pm 0.080$ | $2.103 \pm 0.055$ |
| $\Delta i$ [°] | $4.073 \pm 0.113$ | $2.258 \pm 0.039$ |

Поэтому для Kepler-413 по формуле (10) находим показанные на рис. 1 углы наклонов

$$i_{12} = 0^\circ\!.0047 \pm 0.0015,$$
$$i_p = 4^\circ\!.07 \pm 0.11. \tag{13}$$

Довольно большое значение $\gamma = L_{12}/L_p$ из (12) объясняется тем, что в числителе стоит величина орбитального (а не спинового) углового момента звезд. Доминирующий характер углового момента звездной пары в системе Kepler-413 виден и в малом значении угла $i_{12} \approx 0^\circ\!.005$ из (13).

Данные о второй циркумбинарной системе Kepler-453 были взяты из работы Welsh et al. [9] и приводятся в табл. 1. Здесь мы сталкиваемся с одной особенностью: массы звезд известны с хорошей точностью $M_1 = 0.944 \pm 0.010\, M_\odot$, $M_2 = 0.1951 \pm 0.0020\, M_\odot$, однако масса планеты Kepler-453b известна очень плохо. Полуоси орбит звезд и планеты равны $a_{12} = 0.18539 \pm 0.00066$ а.е., $a_p = 0.7903 \pm 0.0028$ а.е., причем эти орбиты почти круговые $e_{12} = 0.0524 \pm 0.0037$, $e_p = 0.0359 \pm 0.0088$. Угол взаимного наклона плоскости орбиты планеты и орбит звезд составляет $\Delta i = 2^\circ\!.258 \pm 0^\circ\!.039$. Минимальное значение полуоси круговой орбиты в Kepler-453 $a_{\mathrm{cr}} \approx 24$ а.е.

По формулам (10) и (11) для системы Kepler-453 находим

$$\gamma \approx 1628.9;$$
$$i_{12} = 0^\circ\!.00002 \pm 0.00139, \tag{14}$$
$$i_p = 2^\circ\!.26 \pm 0.04.$$

Заметим, что в силу указанной выше некомпланарности орбит звезд и планеты относительно плоскости Лапласа, орбиты всех трех тел будут взаимно прецессировать. Эту прецессию мы рассматриваем в разделе 4. Появляющийся при этом тонкий эффект нарушения резонанса в периодах прецессии звезд обсуждается в разделах 5 и 6.

## 4. УРАВНЕНИЯ ВЕКОВОЙ ПРЕЦЕССИИ ПРОБНОЙ ОРБИТЫ

### *4.1. Зональные гармоники потенциала*

Как показано в [1], зональные гармоники внешнего потенциала R-тороида равны

$$C_{20}^R = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}e_R^2\right)\frac{3\cos^2 i_R - 1}{2};$$
$$C_{40}^R = \frac{3}{8}\left(1+5e_R^2+\frac{15}{8}e_R^4\right)\frac{35\cos^4 i_R - 30\cos^2 i_R + 3}{8}. \quad (15)$$

Здесь $e_R$, $i_R$, соответственно, — эксцентриситет и наклон орбиты к плоскости Лапласа того тела, для которого создается модель R-тороида.

Для Kepler-413 расчет по формулам (15) с учетом найденных углов (13) и известных эксцентриситетов орбит дает следующие значения коэффициентов зональных гармоник потенциала

$$C_{20}^{(1)} = C_{20}^{(2)} = -0.5010 \pm 0.0001;$$
$$C_{40}^{(1)} = C_{40}^{(2)} = 0.3775 \pm 0.0003;$$
$$C_{20}^{p} = -0.5066 \pm 0.0003; \quad (16)$$
$$C_{40}^{p} = 0.3912 \pm 0.0010.$$

Для другой циркумбинарной системы Kepler-453, коэффициенты потенциалы были также рассчитаны и приводятся в табл. 2.

### *4.2. Прецессия пробных орбит в гравитационном поле R-тороида*

Согласно [1], скорость прецессии линии узлов и линии апсид пробной орбиты под влиянием R-тороида описывается дифференциальными уравнениями

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_R = \dot{\Omega}_R^0\left(\frac{a_R}{a}\right)^{7/2}\frac{\cos i}{(1-e^2)^2}; \quad (17)$$

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_R = \dot{\omega}_R^0\left(\frac{a_R}{a}\right)^{7/2}\frac{5\cos^2 i - 1}{4(1-e^2)^2}, \quad (18)$$

где используются коэффициенты

$$\dot{\Omega}_R^0 = \frac{3}{2}C_{20}^R\frac{m_R}{\bar{M}_R}\sqrt{\frac{G\bar{M}_R}{a_R^3}}, \quad \dot{\omega}_R^0 = -2\dot{\Omega}_R^0, \quad (19)$$

**Таблица 2.** Рассчитанные по формулам (10), (11) и (15) коэффициенты 2-й и 4-й зональных гармоник R-тороидов звезд $C_{20}^1$, $C_{20}^2$, $C_{40}^1$, $C_{40}^2$ и планеты $C_{20}^p$, $C_{40}^p$. Далее представлены величины $\dot{\Omega}_R^0$ пробной планеты от отдельного тороида, где индекс $R = \{1, 2, p\}$; скорости прецессии линии узлов и линии апсид пробной планеты от всех тороидов $\dot{\Omega}_{12p}^0$, $\dot{\omega}_{12p}^0$; соответствующие периоды прецессии $(T_\Omega^{12p})_0$ и $(T_\omega^{12p})_0$. Все расчеты сделаны для вырожденного случая нулевых эксцентриситетов и наклона орбиты. Даны также наклоны орбитальных моментов звездной пары и планеты к суммарному угловому моменту $i_{12}$ и $i_p$

| Система | Kepler-413 | Kepler-453 |
|---|---|---|
| $C_{20}^1$, $C_{20}^2$ | $-0.5010 \pm 0.0001$ | $-0.5021 \pm 0.0003$ |
| $C_{40}^1$, $C_{40}^2$ | $0.3775 \pm 0.0003$ | $0.3802 \pm 0.0007$ |
| $C_{20}^p$ | $-0.5066 \pm 0.0003$ | $-0.4998 \pm 0.0005$ |
| $C_{40}^p$ | $0.3912 \pm 0.0010$ | $0.3745 \pm 0.0012$ |
| $\dot{\Omega}_1^0$ [$10^{-10}$ с$^{-1}$] | $-6.83 \pm 0.09$ | $-18.86 \pm 0.15$ |
| $\dot{\Omega}_2^0$ [$10^{-10}$ с$^{-1}$] | $-5.55 \pm 0.08$ | $-8.58 \pm 0.10$ |
| $\dot{\Omega}_p^0$ [$10^{-10}$ с$^{-1}$] | $-0.03 \pm 0.01$ | $-0.0005 \pm 0.0420$ |
| $\dot{\Omega}_{12p}^0$ [$10^{-9}$ с$^{-1}$] | $-1.24 \pm 0.02$ | $-2.74 \pm 0.02$ |
| $\dot{\omega}_{12p}^0$ [$10^{-9}$ с$^{-1}$] | $2.48 \pm 0.03$ | $5.49 \pm 0.05$ |
| $(T_\Omega^{12p})_0$ [лет] | $160 \pm 2$ | $72.6 \pm 0.6$ |
| $(T_\omega^{12p})_0$ [лет] | $80 \pm 1$ | $36.3 \pm 0.3$ |
| $i_{12}$ [°] | $0.0047 \pm 0.0015$ | $0.00002 \pm 0.00139$ |
| $i_p$ [°] | $4.07 \pm 0.11$ | $2.26 \pm 0.04$ |

равные частотам прецессии линии узлов и линии апсид пробной планеты под влиянием каждого из трех тороидов в вырожденном случае ($a = 1$ а.е., $e = 0$, $i = 0°$).

### *4.3. Прецессия пробных орбит в гравитационном поле трех R-тороидов*

Напомним, что в данной работе для циркумбинарной системы рассматривается совокупность трех моделей R-тороида (для двух звезд и для планеты). Рассмотрим суммарное влияние силовых полей этих трех тороидов на прецессию пробных орбит. Прежде всего, для введенных выше коэффициентов можно написать уравнения

$$\dot{\Omega}_{12p}^0 = \dot{\Omega}_1^0 + \dot{\Omega}_2^0 + \dot{\Omega}_p^0; \quad \dot{\omega}_{12p}^0 = -2\dot{\Omega}_{12p}^0; \quad (20)$$

$$(T_\Omega^{12p})_0 = \frac{2\pi}{\left|\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{12p}^0\right|}; \quad (T_\omega^{12p})_0 = \frac{1}{2}T_\Omega^{12p}. \quad (21)$$

Следовательно, периоды узловой и апсидальной прецессии пробной планеты под влиянием трех тороидов будут равны

$$T_\Omega^{12p} = (T_\Omega^{12p})_0 \left(\frac{a}{1\ \text{а.е.}}\right)^{7/2} \frac{(1-e^2)^2}{\cos i}; \qquad (22)$$

$$T_\omega^{12p} = (T_\omega^{12p})_0 \left(\frac{a}{1\ \text{а.е.}}\right)^{7/2} \frac{4(1-e^2)^2}{5\cos^2 i - 1}. \qquad (23)$$

Из формул (22) и (23) находим отношение периодов нодальной и апсидальной прецессии для пробной орбиты (или же представляющего ее оскулирующего кольца Гаусса)

$$\frac{T_\Omega^{12p}}{T_\omega^{12p}} = -\frac{5\cos^2 i - 1}{2\cos i} \approx -2\left(1 - \frac{3}{4}i^2 + O(i^6)\right). \qquad (24)$$

Из (24) следует, что модуль отношения периодов нодальной и апсидальной прецессии для внешнего кольца Гаусса, имеющего малый наклон $i$ и находящегося в гравитационном поле R-тороида, оказывается чуть меньше 2:

$$\left|\frac{T'_\Omega}{T'_\omega}\right| \le 2. \qquad (25)$$

Результат (25) подтвержден при моделировании экзопланеты KOI 120.01 [10].

Прецессия при больших углах наклона пробных орбит здесь не рассматривается.

### *4.4. Расчет прецессии орбиты пробной планеты в системе Kepler-413*

В системе Kepler-413 значения больших полуосей пробных орбит в поле R-тороидов двойной звезды ограничены снизу $a > a_{\text{cr}} \approx 5.48$ а.е., а на таких расстояниях вкладом 4-й зональной гармоники из (16) можно пренебречь. Учитывая это, вклады в прецессию линии узлов пробной орбиты от обеих звезд и планеты Kepler-413b с учетом погрешностей входных величин представим уравнениями:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_1 &= -\left[(6.83 \pm 0.09)\times 10^{-10}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]\times \left(\frac{1\ \text{а.е.}}{a}\right)^{7/2} \frac{\cos i}{(1-e^2)^2};\\
\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_2 &= -\left[(5.55 \pm 0.08)\times 10^{-10}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]\times \left(\frac{1\ \text{а.е.}}{a}\right)^{7/2} \frac{\cos i}{(1-e^2)^2};\\
\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_p &= -\left[(0.03 \pm 0.01)\times 10^{-10}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]\times \left(\frac{1\ \text{а.е.}}{a}\right)^{7/2} \frac{\cos i}{(1-e^2)^2}.
\end{aligned} \qquad (26)$$

Из (26) видно, что вклад в прецессию узла от R-тороида планеты Kepler-413b составляет только $\approx 0.3\%$ от вклада тороидов звездной пары. Фактически, вклад планеты теряется на уровне погрешности вкладов от тороидов звезд.

Складывая первое и второе выражения в (26), находим суммарное влияние R-тороидов звездной пары на прецессии линии узлов и линии апсид пробной орбиты:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{12p} &= -\left[(1.242 \pm 0.016)\times 10^{-9}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]\times \left(\frac{1\ \text{а.е.}}{a}\right)^{7/2} \frac{\cos i}{(1-e^2)^2};\\
\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{12p} &= \left[(2.484 \pm 0.032)\times 10^{-9}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]\times \left(\frac{1\ \text{а.е.}}{a}\right)^{7/2} \frac{5\cos^2 i - 1}{4(1-e^2)^2}.
\end{aligned} \qquad (27)$$

Соответственно, периоды нодальной и апсидальной прецессии для пробной орбиты в системе Kepler-413 будут равны

$$\begin{aligned}
T_\Omega^{12p} &= \left[(160 \pm 2)\ \text{лет}\right]\left(\frac{a}{1\ \text{а.е.}}\right)^{7/2} \frac{(1-e^2)^2}{\cos i};\\
T_\omega^{12p} &= \left[(80 \pm 1)\ \text{лет}\right]\left(\frac{a}{1\ \text{а.е.}}\right)^{7/2} \frac{4(1-e^2)^2}{5\cos^2 i - 1}.
\end{aligned} \qquad (28)$$

На рис. 2 (левая панель) показан график зависимости периода прецессии аргумента перицентра пробной орбиты от значения полуоси этой орбиты для системы Kepler-413. Минимальное значение большой полуоси пробной планеты (при котором модель R-тороида еще применима) находится по формуле

$$a_{cr} = \left(\frac{\mu}{4\pi^2}\right)^{1/3} T_\Omega^{\ 2/3}. \qquad (29)$$

В частности, для данной в [8] величины $T_\Omega = 11$ лет нижнее значение полуоси круговой орбиты равно $a_{\text{cr}} = 5.48$ а.е., причем период прецессии аргумента перицентра будет равен $T_\omega\big|_{\substack{e=0\\ i=0}} = (30.8 \pm 0.4)\times 10^3$ лет. Для системы Kepler-413 на рис. 3 (левая панель) построен график для периода нодальной прецессии от полуоси орбиты пробной планеты. При $a_{cr} = 5.48$ а.е. период прецессии вос-

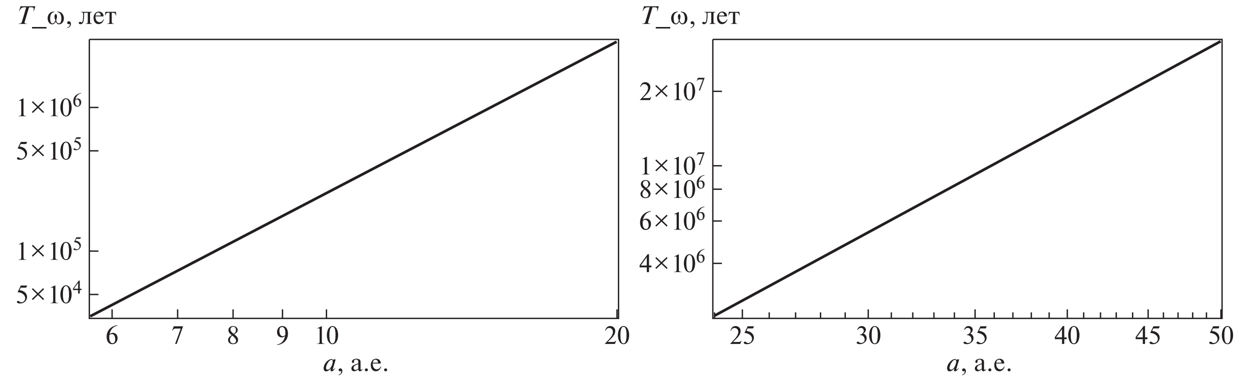


**Рис. 2.** Графики зависимости периода прецессии аргумента перицентра орбиты пробной планеты $T_{\omega}^{12p}(a)\Big|_{\substack{e=0\\i=0}}$, измеряемого в годах, от ее полуоси в астрономических единицах, в вырожденном случае $e = 0$ и $i = 0$. График слева – для системы Kepler-413, справа – для системы Kepler-453. Для наглядности графики представлены в логарифмической шкале по обеим осям. В системе Kepler-413 для крайнего значения полуоси круговой орбиты $a_{\rm cr} = 5.48$ а.е. период апсидальной прецессии равен $T_{\omega}\Big|_{\substack{e=0\\i=0}} = (30.8 \pm 0.4)\times 10^3$ лет.

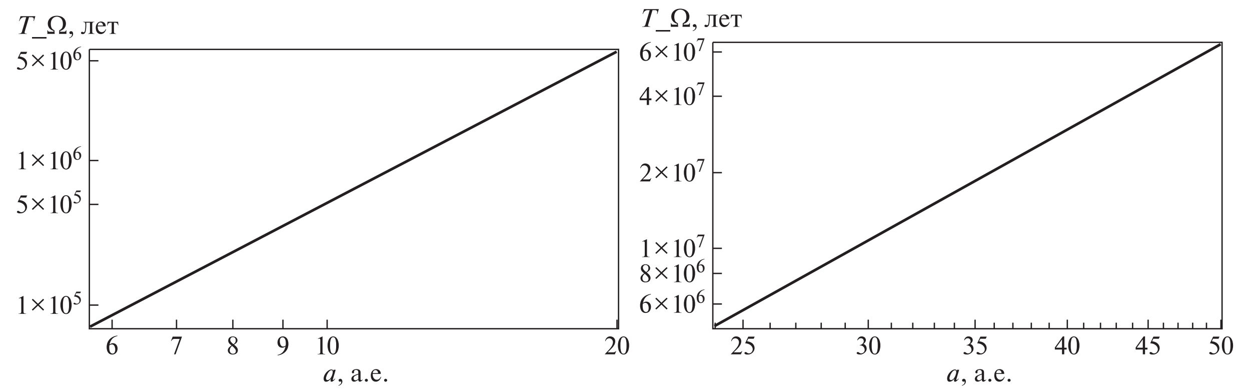


**Рис. 3.** Графики зависимости периода прецессии долготы восходящего узла орбиты пробной планеты $T_{\Omega}^{12p}(a)\Big|_{\substack{e=0\\i=0}}$, измеряемого в годах, от ее полуоси, измеряемой в астрономических единицах, в вырожденном случае $e = 0$ и $i = 0$. График (в логарифмической шкале по обеим осям) слева – для системы Kepler-413, справа – для системы Kepler-453.

ходящего узла равен $T_{\Omega}\Big|_{\substack{e=0\\i=0}} = (61.6 \pm 0.8)\times 10^3$ лет, т.е. в два раза больше, как и должно быть (см. равенство (21)), чем $T_{\omega}\Big|_{\substack{e=0\\i=0}}$.

*4.5. Сводка результатов для двух экзосистем*

Все необходимые данные для циркумбинарных систем Kepler-413 из [8] и Kepler-453 (Welsh et al. 2015) из [9] представлены в табл. 1. Все необходимые величины, рассчитанные указанным выше методом по формулам (10), (11), (15) и (20–23), даны в табл. 2.

Рассчитаем теперь по формулам (27) и (28) периоды прецессии пробной планеты в зависимости от большой полуоси орбиты в случае нулевых эксцентриситета и наклона орбиты к главной плоскости ($a = a_{cr}$, $e = 0$, $i = 0°$).

Графики на рис. 2 и 3 построены от критического (наименьшего возможного в модели) значения полуоси пробной планеты $a_{cr}$. Для системы Kepler-413 имеем оценку периода апсидальной прецессии $T_{\omega}^{12p} = (35.4 \pm 0.4)\times 10^3$ лет, а для периода прецессии долготы восходящего узла $T_{\Omega}^{12p} = (70.7 \pm 0.8)\times 10^3$ лет. Для системы Kepler-

453, соответственно, находим $T_{\omega}^{12p} = (2.2 \pm 0.2) \times 10^6$ лет и $T_{\Omega}^{12p} = (4.4 \pm 0.4) \times 10^6$ лет.

## 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРИОДОВ ВЕКОВОЙ ПРЕЦЕССИИ ОРБИТ ТРЕХ ТЕЛ В ЦИРКУМБИНАРНОЙ СИСТЕМЕ МЕТОДОМ КОЛЕЦ ГАУССА

Выше рассматривалась вековая эволюция пробных орбит, теперь рассмотрим эволюцию орбит звезд центральной пары и экзопланеты самой циркумбинарной системы. Для этого циркумбинарную систему представим совокупностью трех взаимодействующих колец Гаусса.

### *5.1. Уравнения для частот прецессии колец Гаусса*

Метод взаимодействующих колец Гаусса был разработан в статье [11]. Здесь мы используем формулы этого метода и ограничимся точностью до квадратов малых наклонов и эксцентриситетов. Вначале запишем уравнение для частоты прецессии линии узлов второго кольца Гаусса в системе координат, где главной плоскостью является плоскость первого кольца (индекс 1 относится к орбите звезды, а индекс 2 — к орбите планеты):

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = -\frac{Gm_1}{8\pi a_1^3 n_2 n^3 (1+n)(1-n^2)^2} \times \\ \times [\Omega_{000}^{(2)} + \Omega_{002}^{(2)} \Delta i^2 + \Omega_{200}^{(2)} e_1^2 + \Omega_{020}^{(2)} e_2^2 + \Omega_{110}^{(2)} e_1 e_2], \tag{30}$$

где коэффициенты

$$\Omega_{002}^{(2)} = \left(\frac{(1+n^2)(1-4n+n^2)(1+4n+n^2)}{(1-n)^2} \times \right. \\ \left. \times E(k) - (1-5n^2+n^4)K(k)\right) n; \tag{30.1}$$

$$\Omega_{200}^{(2)} = \left(\frac{1+21n^2+47n^4+3n^6}{(1-n)^2} E(k) - \right. \\ \left. - (1+5n^2+3n^4)K(k)\right) n - \\ - \left(\frac{1-3n^2+23n^4+3n^6}{(1-n)^2} E(k) - \right. \\ \left. - (1-n^2+3n^4)K(k)\right) 2n\cos^2\omega_1; \tag{30.2}$$

$$\Omega_{110}^{(2)} = \left(\frac{4-15n^2-26n^4-15n^6+4n^8}{(1-n)^2} E(k) - \right. \\ \left. - (4-11n^2+4n^4)(1+n^2)K(k)\right) \cos\omega_1 \cos\omega_2 + \\ + \left(\frac{4-21n^2-110n^4-21n^6+4n^8}{(1-n)^2} E(k) - \right. \\ \left. - (4-n^2)(1-4n^2)(1+n^2)K(k)\right) \sin\omega_1 \sin\omega_2; \tag{30.3}$$

$$\Omega_{020}^{(2)} = \left(\frac{5+45n^2+19n^4+3n^6}{(1-n)^2} E(k) - \right. \\ \left. - (5+n^2+3n^4)K(k)\right) n - \\ - \left(\frac{3+23n^2-3n^4+n^6}{(1-n)^2} E(k) - \right. \\ \left. - (3-n^2+n^4)K(k)\right) 2n\cos^2\omega_2; \tag{30.4}$$

$$\Omega_{000}^{(2)} = \left(\frac{1+n^2}{(1-n)^2} E(k) - K(k)\right) 4n(1-n^2)^2. \tag{30.5}$$

Здесь: $m_1$ — масса, $a_1$ — большая полуось, $e_1$ — эксцентриситет, $\omega_1$ — аргумент перицентра первого (возмущающего) кольца Гаусса; индекс 2 относится ко второму кольцу Гаусса со средним движением $n_2$; $\Delta i$ — угол взаимного наклона колец Гаусса; $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода; кроме того,

$$k = \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{a_1 + a_2} = \frac{2\sqrt{n}}{1+n} \le 1, \quad n = \frac{a_2}{a_1}. \tag{30.6}$$

На втором этапе следует учесть поправки к аргументам перицентров при переходе от картинной плоскости к плоскости первого кольца. Тогда из сферического треугольника $ABC$, показанного на рис. 4, находим требуемые величины $\Delta\bar{\omega}_{12}$ и $\Delta\bar{\omega}_p$:

$$\sin(\Delta\bar{\omega}_{12}) = \frac{\sin i_p' \sin(\Delta\Omega_p)}{\sin(\Delta i)}; \\ \cos(\Delta\bar{\omega}_{12}) = \\ = \frac{-\sin i_{12}' \cos i_p' + \cos i_{12}' \sin i_p' \cos(\Delta\Omega_p)}{\sin(\Delta i)}; \tag{31.1}$$

$$\sin(\Delta\bar{\omega}_p) = \frac{\sin i_{12}' \sin(\Delta\Omega_p)}{\sin(\Delta i)}; \\ \cos(\Delta\bar{\omega}_p) = \frac{\sin i_p' \cos i_{12}' - \cos i_p' \sin i_{12}' \cos(\Delta\Omega_p)}{\sin(\Delta i)}. \tag{31.2}$$

Наконец, на третьем этапе преобразований мы пренебрегаем малым влиянием планеты и переходим к плоскости Лапласа звездных колец Гаусса. Из геометрических соображений ясно, что

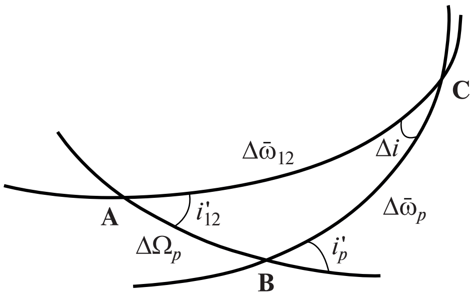


**Рис. 4.** Сферический треугольник при переходе от системы координат, связанных с картинной плоскостью $AB$. Здесь $\Delta i$ – угол между плоскостью колец Гаусса звездной пары $AC$ и плоскостью кольца планеты $BC$; $\Delta\Omega_p$ – разность долгот восходящих узлов колец Гаусса в картинной плоскости; $i'_{12}$ и $i'_p$ – наклонения, соответственно, звездного и планетного колец Гаусса к картинной плоскости; $\Delta\bar{\omega}_{12}$ $(\Delta\bar{\omega}_p)$ – угол между линией узлов звездного (планетного) кольца в картинной плоскости и общей линией узлов двух колец. Плоскость Лапласа проходит через точку $C$.

плоскость Лапласа двух колец Гаусса проходит через их общую линию узлов (на рис. 4 плоскость Лапласа проходит через точку $C$). Для упрощения очень сложных расчетов в выбранной модели за начальный момент времени берется тот, с которого начинает действовать возмущение от планеты. Другими словами, до этого начального момента орбиты звезд мы считаем лежащими в одной плоскости (на рис. 4 эта плоскость проходит через дугу $AC$), не прецессирующими и с одинаковыми периодами движения звезд по ним.

Скорость узловой прецессии второго кольца (отметим ее верхним индексом $L$) относительно неподвижной плоскости Лапласа будет выражаться через прежнюю $\dfrac{d\Omega_2}{dt}$ формулой (30) (см. [10])

$$\frac{d\Omega_2^L}{dt} = \frac{\sin\Delta i}{\sin i_2^L}\frac{d\Omega_2}{dt}. \tag{32}$$

Учитывая, что в системах Kepler-413 и Kepler-453 орбиты звезд полагаются лежащими в одной плоскости, уравнение (32) для орбиты планеты и двух звезд на начальный момент времени можно представить в виде (индекс $L$ можно опустить)

$$\begin{gathered}\left(\frac{d\Omega_p}{dt}\right)_0 = \frac{\sin\Delta i}{\sin i_p}\times \\ \times\left(\frac{d\Omega_2}{dt}\begin{pmatrix} a_1 = a_1, e_1 = e_{12}, \omega_1 = \omega_{12} - \Delta\bar{\omega}_{12}, \\ a_2 = a_p, e_2 = e_p, \omega_2 = \omega_p - \Delta\bar{\omega}_p \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \frac{d\Omega_2}{dt}\begin{pmatrix} a_1 = a_2, e_1 = e_{12}, \omega_1 = \omega_{12} - \Delta\bar{\omega}_{12} - \pi, \\ a_2 = a_p, e_2 = e_p, \omega_2 = \omega_p - \Delta\bar{\omega}_p \end{pmatrix}\right);\end{gathered} \tag{33}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{d\Omega_1}{dt}\right)_0 = \frac{\sin\Delta i}{\sin i_{12}}\times \\ \times\frac{d\Omega_2}{dt}\begin{pmatrix} a_1 = a_p, e_1 = e_p, \omega_1 = \omega_p - \Delta\bar{\omega}_p, \\ a_2 = a_1, e_2 = e_{12}, \omega_2 = \omega_{12} - \Delta\bar{\omega}_{12} \end{pmatrix};\end{gathered} \tag{34}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{d\Omega_2}{dt}\right)_0 = \frac{\sin\Delta i}{\sin i_{12}}\times \\ \times\frac{d\Omega_2}{dt}\begin{pmatrix} a_1 = a_p, e_1 = e_p, \omega_1 = \omega_p - \Delta\bar{\omega}_p, \\ a_2 = a_2, e_2 = e_{12}, \omega_2 = \omega_{12} - \Delta\bar{\omega}_{12} - \pi \end{pmatrix},\end{gathered} \tag{35}$$

где учтено, что аргументы перицентров отсчитываются от общей линии узлов для орбит звезд, а не от линий узлов, расположенных в картинной плоскости, с помощью формул (31.1), (31.2), а также учтено, что аргументы перицентров орбит звезд отстоят друг от друга на $\pi$ радиан.

Подчеркнем, что формулы (33)–(35) выражают принятые выше условия: на кольцо Гаусса внешней планеты действует гравитация обоих звездных колец Гаусса, а на кольцо Гаусса каждой из звезд возмущающее влияние оказывает только кольцо планеты. Другими словами, в данном подходе кольца Гаусса каждой звезды не оказывают возмущающего влияния друг на друга, так как в данной задаче трех тел орбиты звезд на начальный момент времени представлены орбитами синхронной пары, а такие орбиты (кольца) не должны возмущать друг друга.

### *5.2. Периоды прецессии орбит звезд и планеты в циркумбинарной системе. Эффект малого отклонения от резонанса*

Прежде всего периоды нодальной прецессии колец Гаусса циркумбинарной системы в начальный момент времени, соответственно, равны

$$T_p^0 = \frac{2\pi}{\left|\left(\dfrac{d\Omega_p}{dt}\right)_0\right|};\quad T_1^0 = \frac{2\pi}{\left|\left(\dfrac{d\Omega_1}{dt}\right)_0\right|};\quad T_2^0 = \frac{2\pi}{\left|\left(\dfrac{d\Omega_2}{dt}\right)_0\right|}. \tag{36}$$

Минимальное значение большой полуоси планеты (при котором модель R-тороида еще применима) находится по формуле (29) при подстановке уточненных значений $T_1^0$ и $T_2^0$.

Рассчитаем теперь начальные периоды прецессии линий узлов орбит двух звезд и планеты, а также минимальные значения больших полуосей орбиты пробной планеты по формуле (36) и по уточненной формуле (30) (табл. 3.)

Подставляя в формулы (36) известные нам значения величин, получим периоды нодальной прецессии для планет в системах Kepler-413 и Kepler-453, а также отношения этих периодов, см.

**Таблица 3.** Оценки начальных периодов прецессии линий узлов орбит звезд и планеты в плоскости Лапласа, отношений этих периодов и минимальной большой полуоси для орбиты пробной планеты

| Система | Kepler-413 | Kepler-453 |
|---|---|---|
| $T_p^0$ [лет] | $11.49 \pm 0.28$ ($11.47 \pm 0.28$) | $105 \pm 2$ ($106 \pm 2$) |
| $T_1^0$ [лет] | $11.63 \pm 0.28$ ($11.76 \pm 0.28$) | $112 \pm 2$ ($112 \pm 2$) |
| $T_2^0$ [лет] | $11.39 \pm 0.28$ ($11.28 \pm 0.28$) | $104 \pm 2$ ($104 \pm 2$) |
| $T_p^0/T_1^0$ | $0.988 \pm 0.001$ ($0.975 \pm 0.001$) | $0.942 \pm 0.002$ ($0.945 \pm 0.001$) |
| $T_p^0/T_2^0$ | $1.008 \pm 0.001$ ($1.017 \pm 0.001$) | $1.0120 \pm 0.0002$ ($1.0114 \pm 0.0001$) |
| $T_1^0/T_2^0$ | $1.021 \pm 0.002$ ($1.043 \pm 0.002$) | $1.074 \pm 0.001$ ($1.070 \pm 0.001$) |
| $a_{\rm cr}$ [а.е.] | 5.7 | 24 |

В круглых скобках указан вариант оценок, соответствующий преобразованию $\omega_{12} \to \omega_{12} - \pi$.

табл. 3. Обратим внимание на то, что для обеих экзосистем выполняются строгие неравенства

$$T_1^0 > T_p^0 > T_2^0. \quad (37)$$

Для пояснения неравенств (37) заметим следующее. Если при построении плоскости Лапласа пренебречь малым влиянием кольца Гаусса от планеты, то вместо (37) выполнялись бы строгие равенства $T_1^0 = T_2^0 = 0$ (прецессии узлов вообще бы не было). Действительно, без влияния планеты орбиты звезд всегда лежали бы строго в одной плоскости, а движение по этим орбитам происходило бы синхронно с резонансом 1 : 1. Но под влиянием в начальный момент времени притяжения планеты центр масс звездной пары и направления двух линий апсид немного сместятся относительно прежних положений; при этом орбиты звезд станут некомпланарными и появится вековая прецессия узлов этих орбит с периодами, немного различающимися между собой. Очевидно, что смещенный (относительно барицентра системы трех тел) центр масс пары звезд будет двигаться синхронно в противофазе с планетой. И хотя отклонения орбит звезд от их синхронных аналогов малы (что видно из табл. 3 по пересекающимся областям оценок начальных периодов уже в пределах 1$\sigma$), эффект квазисинхронности орбит звезд все же проявляет себя и отражен в непересекающихся оценках (даже в пределах 3$\sigma$) отношений периодов в табл. 2.

Таким образом, для возмущенных орбит звезд появятся вековые движения узлов, причем периоды движения не будут одинаковыми (синхронными). Но одновременно вековую прецессию узла получит и орбита самой планеты, причем направления движения узлов у звезд и планеты будут совпадать.

Чтобы разобраться в том, почему период прецессии узла планеты $T_p^0$ находится в середине неравенств (37), введем понятие среднего кольца Гаусса, которое составляется для колец звездной пары в синхронной конфигурации (напомним: речь идет о модели, в которой возмущаемые планетой орбиты звезд рассматриваются на начальный момент времени в состоянии синхронного орбитального движения). Тогда появившуюся из-за возмущений прецессию плоскости орбиты планеты можно представить как следствие взаимодействия кольца Гаусса планеты с указанным средним кольцом Гаусса, созданного двумя кольцами звезд в синхронной конфигурации. Взаимодействие кольца планеты со средним кольцом Гаусса звезд и приводит к тому, что период прецессии узла орбиты планеты $T_p^0$ будет больше наименьшего $T_2^0$, и меньше наибольшего $T_1^0$ периодов прецессии колец звезд, как это имеет место в неравенствах (37).

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В первой части этой работы изучается прецессия пробных орбит в циркумбинарных системах, состоящих из двойной звезды и внешней экзопланеты. Следует подчеркнуть актуальность задач по исследованию пробных орбит в экзосистемах. Действительно, на современном этапе уверенных прямых наблюдений планетных систем у других звезд пока нет, и в этой ситуации исследование пробных орбит помогает лучше понять динамику экзосистем. О важности такой постановки задачи говорит и статья [6], где исследовалась устойчивость пробных орбит спутников экзопланет в циркумбинарных системах (причем сами спутники пока не обнаружены).

Для изучения прецессии пробных орбит был разработан новый метод, опирающийся на модель из трех R-тороидов. Этот метод применяется к экзосистемам Kepler-413 и Kepler-453. Для них была найдена ориентация угловых моментов звездной пары $L_{12}$ и экзопланеты $L_p$ относительно плоскости Лапласа, вычислены отношение

$\gamma = L_{12}/L_p$ и зональные гармоники внешних гравитационных потенциала трех R-тороидов. Используя найденное в [1] выражение взаимной энергии тороида и кольца Гаусса, мы вывели уравнения для частот апсидальной и нодальной прецессии пробных орбит. Анализ решений этих уравнений показал, что в рассматриваемых системах основной вклад в прецессию орбит вносят R-тороиды звездной пары.

Во второй части работы изучается эволюция орбит звезд и планеты самой циркумбинарной системы. Для решения этой задачи применяется разработанный в [11] метод взаимодействующих колец Гаусса. Важное значение здесь имеет вывод формулы для взаимной энергии колец в системе координат, где главной является плоскость Лапласа. С помощью взаимной энергии колец было получено уравнение для частоты прецессии линии узлов каждого кольца Гаусса. Решение этого уравнения позволило получить новую информацию об экзосистемах. Например, для системы Kepler-413 мы не только уточнили данный в [8] период нодальной прецессии орбиты планеты $T_p = 11$ лет (у нас $T_p^0 = 11.49 \pm 0.28$ лет), но и нашли неизвестные ранее периоды нодальной прецессии орбит центральной пары звезд $T_1^0 = 11.63 \pm \pm 0.28$ лет, $T_2^0 = 11.39 \pm 0.28$ лет. Для экзосистемы Kepler-453 впервые были найдены все три периода прецессии узла: $T_1^0 = 112 \pm 2$ $(112 \pm 2)$ лет, $T_2^0 = 104 \pm 2$ $(104 \pm 2)$ лет, $T_p^0 = 105 \pm 2$ $(106 \pm 2)$ лет.

В данной работе мы обратили внимание на тонкий эффект влияния планеты на нарушение резонанса 1 : 1 периодов нодальной прецессии у пары звезд. Если при построении плоскости Лапласа пренебречь малым влиянием кольца Гаусса планеты, то вместо (37) выполнялись бы строгие равенства $T_1^0 = T_2^0 = 0$ и прецессия узлов отсутствовала. Это и понятно: без возмущений от планеты обе орбиты звезд лежали бы строго в одной плоскости, и движение по ним происходило синхронно с резонансом 1 : 1. Но с учетом гравитационного влияния циркумбинарной планеты картина изменится: центр масс пары звезд немного сместится относительно барицентра системы трех тел и будет двигаться синхронно в противофазе с планетой. При этом появятся малые поправки к элементам невозмущенных орбит звезд, причем эти элементы будут зависеть от времени. Одновременно вековую прецессию узла получит и орбита самой планеты, причем направления движения узлов у звезд и планеты будут совпадать.

Для прояснения ситуации с влиянием планеты на движение звезд полезно ввести понятие среднего кольца Гаусса для звездной пары; это среднее кольцо создается из пары звездных колец Гаусса в синхронной конфигурации и позволяет выявить тонкий эффект влияния планеты на нарушение резонанса 1 : 1 в периодах нодальной прецессии звезд. Таким образом, прецессию плоскости орбиты планеты можно рассматривать как результат взаимодействия кольца Гаусса этой планеты с указанным средним кольцом для пары звезд. Именно взаимодействие кольца планеты со средним кольцом Гаусса звезд позволяет объяснить неравенства (37).

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы признательны Междисциплинарной научно-образовательной школе МГУ “Фундаментальные и прикладные космические исследования”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Б. П. Кондратьев, В. С. Корноухов*, Астрон. журн. **98**, 434 (2021).
2. *St. Raetz, T. O. B. Schmidt, S. Czesla, T. Klocová, et al.*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **460**, 2834 (2016).
3. *J. W. Barnes, J. C. van Eyken, B. K. Jackson, D. R. Ciardi, J. J. Fortney*, Astrophys. J. **774**, id. 53 (2013).
4. *Ch. Chen, A. Franchini, S. H. Lubow, R. G. Martin*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **490**, 5634 (2019).
5. *B. C. Bromley, S. J. Kenyon*, Astron. J. **161**, id. 25 (2021).
6. *A. S. Hamers, M. X. Cai, J. Roa, N. Leigh*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **480**, 3800 (2018).
7. *B. P. Kondratyev*, Solar System Research **46**, 352 (2012).
8. *V. B. Kostov, P. R. McCullough, J. A. Carter, M. Deleuil, et al.*, Astrophys. J. **784**, 14 (2014).
9. *Y. Judkovsky, A. Ofir*, O. Aharonson, Astron. J. **160**, id. 195 (2020).
10. *W. F. Welsh, J. A. Orosz, D. R. Short, W. D. Cochran, et al.*, Astrophys. J. **809**, id. 26 (2015).
11. *Б. П. Кондратьев, В. С. Корноухов*, Астрон. журн. **97**, 408 (2020).