АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2021, том 98, № 9, с. 707–721

УДК 524.47+524.7-42+521.1

ТРИ НОВЫЕ МОДЕЛИ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ГАЛАКТИК

С. А. Гасанов[1, *]

[1]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга, Москва, Россия

**E-mail: gasanov@sai.msu.ru*

Поступила в редакцию 05.12.2020 г.
После доработки 07.04.2021 г.
Принята к публикации 30.04.2021 г.

Для решения некоторых задач небесной механики и астрофизики созданы три новые модели эллиптической галактики (ЭГ), хорошо согласующиеся с современными представлениями о строении таких галактик. На основе этих моделей определены ее полная гравитационная (потенциальная) энергия и кинетическая энергия вращения, дисперсия ее скоростей на расстоянии эффективного радиуса галактики. Предложен новый способ определения средних значений радиус-шкалы ЭГ, плотности в ее центре, а также среднего значения ключевого параметра плотности β и его значения, соответствующего эффективному радиусу галактики. Полученные результаты применены к шестидесяти ЭГ и приведены в виде таблиц для десяти галактик.

Ключевые слова: эллиптическая галактика, новые модели эллиптических галактик, динамические параметры, гравитационная энергия, кинетическая энергия вращения

DOI: 10.31857/S0004629921090036

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] рассмотрена задача о пространственном движении пассивно-гравитирующего тела (звезды или центра масс шарового скопления – ШС) внутри вращающейся эллиптической галактики (ЭГ). ЭГ при этом рассматривается как двухслойное эллипсоидальное тело: ее светящаяся часть – трехосный эллипсоид, а пространство между границами ее светящейся части и гало – гомеоид, заполненный однородной темной материей.

В работе [1] светящаяся часть эллиптической галактики (СЧ ЭГ) считается однородным трехосным эллипсоидом, а в работе [2] для нее используется так называемый “астрофизический закон” распределения плотности. Рассмотренную в работе [1] модель ЭГ назовем моделью 1, а модель в работе [2] – моделью 2. В рамках моделей 1 и 2 найден аналог интеграла Якоби и определена область возможности движения звезды (или центра масс ШС). Установлены тип и устойчивость в смысле Ляпунова найденных стационарных решений – точек либрации, и построены поверхности нулевой скорости.

Задача о пространственном движении звезды внутри (вблизи) шарового скопления (ШС), принадлежащего неоднородной вращающейся ЭГ, рассмотрена в работе [3]. В движении звезды вблизи ШС учтены возмущения, вызываемые притяжением ЭГ, которая совместно с гало представляет собой двухслойное тело [1]. Движение звезды вблизи ШС происходит вне светящейся части ЭГ, но внутри гомеоида. Уточнено и конкретизировано понятие “вблизи ШС” как “сфера действия” (сфера тяготения и гравитационная сфера Хилла). В связи с введением понятий сферы действия рассмотрены два варианта движения звезды: внутри и вне сферы действия шарового скопления и определены области возможности движения. Найдены квазиинтеграл и поверхности минимальной энергии, которые при определенных условиях преобразуются в аналог интеграла Якоби и поверхности нулевой скорости соответственно.

Полученные результаты в работах [1–3] применены к модельным эллиптическим галактикам с параметрами, точно совпадающими с параметрами эллиптических галактик NGC 4472 (M 49), NGC 4636 и NGC 4374 (M 84) и приведены в виде рисунков и таблиц.

При нахождении точек либрации и исследовании их на устойчивость, потенциалы СЧ ЭГ и гомеоида в ряд не разлагаются, а используются их точные выражения.

В настоящей работе рассматриваются три новые модели ЭГ, согласно которым галактика вместе с гало считается двухслойным неоднородным эллипсоидом вращения – сфероидом. При этом внешний и внутренний слои считаются подобными и концентрическими, их центры совпадают с центром ЭГ. СЧ ЭГ считается внутренним слоем и представляет собой неоднородный эллипсоид вращения (сфероид) с гомотетическим (сфероидальным) распределением плотности, или слоисто-неоднородный сфероид.

В СЧ ЭГ преобладает барионная масса (БМ) с “астрофизическим законом” распределения плотности. Внешняя часть представляет собой неоднородный сферический слой со сферическим распределением плотности (модель 3) или сфероидальный слой (условно гомеоид) со сфероидальным распределением плотности (модель 4). Согласно модели 3 внешний слой и гало галактики ограничены сферой радиуса, равного радиус-шкале ЭГ, а согласно модели 4 они ограничены сфероидальной поверхностью с большой полуосью, равной радиус-шкале галактики. Считается, что сферический слой и условный гомеоид в основном состоят из темной материи (ТМ) и в зависимости от ее наличия во внутренних (центральных) областях ЭГ, в моделях 3 и 4 рассматриваются два варианта. Вариант (a), в котором основная часть ТМ находится вне СЧ ЭГ [4], и вариант (b), в котором содержание ТМ во внутренних областях ЭГ сравнимо с содержанием БМ [5, 6]. При этом определяются условия сшивки потенциалов на границе раздела СЧ ЭГ и сферического слоя или условного гомеоида.

Как справедливо отмечено в работе [4], природа ТМ неизвестна, и нет ясного понимания ее физической взаимосвязи с наблюдаемыми астрономическими объектами. Тем не менее ее наличие в галактиках признается и косвенно подтверждается. В данной работе смоделированы три типа ЭГ вместе с гало, которые не могут претендовать на полноту охвата проблемы ТМ в целом.

Согласно модели 5, ЭГ вместе с гало (вариант 1) или без него (вариант 2) представляет собой слоисто-неоднородный сфероид, состоящий из БМ и ТМ. В модели 5 не существует границы раздела между СЧ ЭГ и условного гомеоида, поэтому выполнение условий сшивки потенциалов не рассматривается. При этом в моделях 3–5 условные границы (видимые размеры) СЧ ЭГ определяются по значениям величин D_{25} и R_{25} [7].

Помимо проблемы наличия или отсутствия ТМ во внутренних областях ЭГ, существует другая проблема, а именно, истинная пространственная ориентация галактики, которая нам неизвестна. Для построения динамической теории равновесия и теории происхождения ЭГ выяснение истинной формы таких галактик имеет важное значение. Как показано в [8], истинную форму ЭГ можно определить на основе двух наблюдательных тестов: 1) совпадает ли ось вращения с видимой малой осью галактики и 2) соосны ли изофоты галактики. Применение этих тестов позволяет судить более уверенно о форме ЭГ и свидетельствует о существовании ЭГ как в виде сжатых или вытянутых сфероидов, так и трехосных эллипсоидов. Показано, что если ЭГ имеет форму вытянутого сфероида или трехосного эллипсоида, то ось вращения будет, как правило, наблюдаться несовпадающей с видимой малой осью, а изофоты галактики окажутся несоосными. Если же галактика имеет форму сжатого сфероида, то проекция малой оси на картинную плоскость совпадает с направлением оси вращения при любой ориентации галактики относительно наблюдателя и не нарушается соосность изофот.

В работе [9] разработан и использован новый метод решения обратной геометрической задачи восстановления формы эллипсоидальных тел через их проекцию (лимб) на картинную плоскость. С помощью этого метода определены полуоси карликовой планеты Хаумеи (Haumea), как трехосного эллипсоида. После чего для каждого значения фотометрических параметров карликовой планеты определены ее форма и средняя плотность, а также ориентация относительно ее кольца и орбит спутников. Оказалось, что плоскости кольца планеты и орбиты ее спутника Хияки (Hi’iaka) не совпадают с плоскостью экватора планеты, и оба спутника совершают прямое движение [9].

Заметим, что разработанный в работе [9] и примененный к карликовой планете Хаумея метод невозможно использовать для восстановления истинной формы ЭГ как трехосного эллипсоидального тела или сфероида. В настоящей работе ЭГ рассматривается как слоисто неоднородный вытянутый эллипсоид вращения (или для краткости – вытянутый сфероид), для которого, как и для трехосного эллипсоида, ось вращения не совпадает с видимой малой осью, а изофоты окажутся несоосными. Более удобный или простой вариант, при котором ЭГ представляет собой сжатый сфероид, для которого видимая ось совпадает с осью вращения и не нарушается соосность изофот, не рассматривается.

В рамках созданных моделей предлагается новый способ определения средних значений радиус-шкалы ЭГ r_s, плотностей в центре ρ_0 и на границе гало галактики ρ_s. Определены полная гравитационная (потенциальная) энергия W и кинетическая энергия вращения $T_{\rm rot}$ неоднородной ЭГ, пространственная дисперсия скоростей $\sigma_{\rm eff}$ на расстоянии эффективного радиуса галактики $R_{\rm eff}$, а также среднее значение параметра β и его значение $\beta_{\rm eff}$, соответствующее эффективному радиусу галактики согласно этим моделям.

Таким образом, точно определять истинную форму ЭГ как трехосного эллипсоида, или даже сфероида, в настоящее время не представляется возможным. Следовательно, мы определяем значения видимой большой и малой полуосей ЭГ. Поэтому полученные нами значения динамических параметров, перечисленных выше, являются приблизительными.

Задача о равновесии и устойчивости динамических систем, фигурирующих в этих моделях, представляет особый интерес и будет рассмотрена в отдельной работе автора.

2. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТЕЙ

Предположим, что светящаяся часть эллиптической галактики (СЧ ЭГ) представляет собой слоисто-неоднородный эллипсоид вращения (вытянутый сфероид) с полуосями $a > b = c$. В качестве закона распределения плотности – профиля СЧ ЭГ, состоящей из барионной массы (БМ), возьмем "астрофизический" профиль $\rho(m)$ [10, 11], получаемый посредством применения интегрального уравнения Абеля к профилю поверхностной яркости $I(m)$ Хаббла [12]:

$$\rho(m) = \frac{\rho_0}{(1+\beta m^2)^{3/2}}, \quad I(m) = \frac{I_0}{1+\beta m^2}, \tag{1}$$

где ρ_0, I_0 – плотность в центре эллиптической галактики и центральная поверхностная яркость, а параметр $\beta \gg 1$ для каждой ЭГ выбирается отдельно и находится выравниванием данных фотометрии [10, 11]. Кроме того, m – параметр семейства подобных и концентрических сфероидов

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{c^2} = m^2, \quad (a > b = c,\ 0 \le m \le 1). \tag{2}$$

Здесь значение $m = 0$ соответствует центру ЭГ, $m = 1$ – сфероидальной поверхности, которой ограничена СЧ ЭГ.

Далее положим, что неоднородный сферический слой (модель 3) заполнен темной материей (ТМ) с законом распределения плотности (профилем) в виде [13, 14]:

$$\rho_S(r) = \frac{Kr_s}{r}\left(1+\frac{r}{r_s}\right)^{-2}, \quad \tilde{\rho}_S \equiv \rho_S(r_s) = \frac{K}{4}. \tag{3}$$

Здесь K – нормализующий коэффицент, имеющий размерность плотности в массах Солнца на кубический парсек, r_s – радиус-шкала ЭГ, а $\tilde{\rho}_S$ – плотность ТМ на внешней границе слоя. В работах [3, 13, 14] приведены формулы вычисления коэффициента K.

Следует отметить, помимо профиля (3) существуют другие законы распределения плотности. В книге [15] приведен профиль более общего вида, из которого как частные случаи получаются профили Денена [16, 17], Хернквиста [18], Джаффа [19] и NFW [13].

Если рассматривается неоднородный сфероидальный слой (модель 4), заполненный ТМ, то профилем (3) нельзя пользоваться. В этом случае закон распределения плотности, который назовем аналогом профиля NFW, определим в виде

$$\rho_G(\mu) = \frac{K}{\xi\mu(1+\xi\mu)^2}, \quad \left(\frac{r}{r_s} = \xi\mu,\ \xi = \frac{\sqrt[3]{\tilde{a}\tilde{c}^2}}{r_s} < 1\right), \tag{4}$$

который был предложен Б.П. Кондратьевым. Здесь μ – параметр семейства подобных и концентрических сфероидов с полуосями $\tilde{a}$, $\tilde{b} = \tilde{c}$:

$$\mu^2 = \frac{x^2}{\tilde{a}^2} + \frac{y^2+z^2}{\tilde{c}^2}, \quad (\tilde{a} = r_s > \tilde{b} = \tilde{c}). \tag{5}$$

При этом семейства (2) и (5) считаются подобными и концентрическими сфероидами. Значение $\mu^2 = 1$ соответствует внешней границе сфероидального слоя, на которой плотность согласно выражению (4), равна

$$\bar{\rho}_G \equiv \rho_G(1) = \frac{K}{\xi(1+\xi)^2}. \tag{6}$$

3. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩЕНИЯ СВЕТЯЩЕЙСЯ ЧАСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГАЛАКТИКИ

Полная потенциальная (гравитационная) энергия $W(1)$ и кинетическая энергия вращения $T(1)$ слоисто-неоднородного сфероида с плотностью $\rho(m)$ и полуосями $a > b = c$ определяются по формуле [10]:

$$W(1) = -\pi G a c^2 J_0 \Psi(1),$$

$$T(1) = \frac{\pi G a c^2}{2} J_1 \Psi(1), \tag{7}$$

$$J_1 = J_0 - 3c^2 K_0$$

соответственно. Здесь $\Psi(1)$ — значение функции

$$\Psi(m) = \int_0^{m^2} \rho(m) M(m) dm^2,$$
$$M(m) = 4\pi ac^2 \int_0^m m^2 \rho(m) dm \tag{8}$$

при $m = 1$, а

$$J_0 = \int_0^\infty \frac{du}{\Delta(u)},$$
$$K_0 = \int_0^\infty \frac{du}{(c^2+u)\Delta(u)}, \tag{9}$$
$$\Delta(u) = (c^2+u)\sqrt{a^2+u},$$

или

$$J_0 = \frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}} \ln \frac{a+\sqrt{a^2-c^2}}{a-\sqrt{a^2-c^2}},$$
$$K_0 = \frac{2a - c^2 J_0}{2c^2(a^2-c^2)}, \tag{10}$$
$$J_1 = \frac{(2a^2+c^2)J_0 - 6a}{2(a^2-c^2)}.$$

Если плотность $\rho(m)$ СЧ ЭГ определяется "астрофизическим законом" (1), то в силу (8) масса $M(m)$ промежуточного эллипсоида и функция $\Psi(m)$ будут равны

$$M(m) = 4\pi\rho_0 ac^2 g_1(m),$$
$$\Psi(m) = 4\pi\rho_0^2 ac^2 f_1(m). \tag{11}$$

Здесь

$$g_1(m) = \frac{1}{\beta\sqrt{\beta}}\left[\ln\varphi_1(m) - \frac{h}{\sqrt{1+h^2}}\right],$$
$$\varphi_1(m) = h + \sqrt{1+h^2}, \tag{12}$$
$$h = \sqrt{\beta} m,$$

$$f_1(m) = \frac{1}{\beta^2\sqrt{\beta}}\left[\operatorname{arctg} h + \frac{h}{1+h^2} - \frac{2\ln\varphi_1(m)}{\sqrt{1+h^2}}\right]. \tag{13}$$

Тогда в силу (7) находим гравитационную энергию $W_L = W(1)$ СЧ ЭГ и ее кинетическую энергию вращения $T_L = T(1)$ согласно варианту (a) в виде

$$W_L = -2W_0 J_0,$$
$$T_L = W_0 J_1, \tag{14}$$
$$W_0 = 2\pi^2 G \rho_0^2 a^2 c^4 f_1(1),$$

где функция $f_1(m)$ и коэффициенты J_0, J_1 определены выше.

В случае варианта (b) гравитационная энергия $\tilde{W}_L$ СЧ ЭГ и ее кинетическая энергия вращения $\tilde{T}_L$ определяются иначе, а именно, в формулах (7) и (8) функция $\Psi(m)$ заменяется на $\tilde{\Psi}(m)$. Последняя получается из выражения (8) заменой профиля $\rho(m)$ и массы $M(m)$ на общий профиль $\rho(m) + \rho_G(m)$ и общую массу $M(m) + \tilde{M}_G(m)$ БМ и ТМ. Тогда искомые выражения $\tilde{W}_L = \tilde{W}_L(1)$ и $\tilde{T}_L = \tilde{T}_L(1)$ представляются в виде (b)

$$\tilde{W}_L = -2\tilde{W}_0 J_0,$$
$$\tilde{T}_L = \tilde{W}_0 J_1, \tag{15}$$
$$\tilde{W}_0 = \frac{\pi G a c^2}{2}\tilde{\Psi}(1),$$

где

$$\tilde{\Psi}(m) = \sum_{n=1}^{4} \tilde{\psi}_n(m),$$
$$\tilde{\psi}_2(m) = \int_0^{m^2} \rho(m)\tilde{M}_G(m) dm^2,$$
$$\tilde{\psi}_3(m) = \int_0^{m^2} \rho_G(m) M(m) dm^2,$$
$$\tilde{\psi}_4(m) = \int_0^{m^2} \rho_G(m)\tilde{M}_G(m) dm^2.7$$

Здесь $\tilde{\psi}_1(m) \equiv \Psi(m)$, причем функция $\Psi(m)$ определяется равенством (11), а $\tilde{M}_G(m)$ — масса неоднородного сфероида $a > b = c$, состоящего из ТМ с профилем $\rho_G(m)$ и вычисляется по формуле

$$\tilde{M}_G(m) = 4\pi ac^2 \int_0^m m^2 \rho_G(m) dm =$$
$$= 4\pi K \bar{a}^3 \left(\ln \bar{g} - \frac{\bar{g}-1}{\bar{g}}\right), \tag{16}$$
$$\bar{g} = 1 + \bar{\xi} m, \quad \bar{\xi} = \frac{\sqrt[3]{ac^2}}{\bar{a}}.$$

Здесь $\bar{a}$ — шкала масштабирования галактики. После вычисления функций $\tilde{\psi}_k(m)$, $(k = 2, 3, 4)$ для $\tilde{\Psi}(m)$ получим следующее выражение:

$$\tilde{\Psi}(m) = 4\pi ac^2[\rho_0^2 f_1(m) + 2K\rho_0 f_2(m) + K^2 f_3(m)], \tag{17}$$

где функция $f_1(m)$ определяется равенством (13),

$$f_2(m) = \frac{1}{\beta\bar{\xi}^3\bar{g}}\left[\frac{\bar{g}-1}{\sqrt{1+h^2}} - \frac{\bar{g}-1}{h}\ln\varphi_1(m) + \right.$$
$$\left. + \frac{\bar{\xi}\bar{g}}{2\sqrt{\beta+\bar{\xi}^2}}\ln\frac{\varphi_2(m)}{\varphi_2(0)} - \frac{\bar{g}}{\sqrt{1+h^2}}\ln\bar{g}\right], \tag{18}$$

$$f_3(m) = \frac{1}{\xi^5}\left(1 - \frac{1}{\overline{g}^2} - \frac{2\ln\overline{g}}{\overline{g}}\right),$$
$$\varphi_2(m) = \frac{\beta m - \overline{\xi} + \sqrt{1+h^2}\sqrt{\overline{\xi}^2+\beta}}{-\beta m + \overline{\xi} + \sqrt{1+h^2}\sqrt{\overline{\xi}^2+\beta}}, \tag{19}$$

причем функция $\varphi_1(m)$ и параметр h определяются равенством (12), а $\overline{g}$ и $\overline{\xi}$ – равенством (16).

Очевидно, что выражение (15) для энергий $\tilde{W}_L$ и $\tilde{T}_L$ совпадает с выражением (14) для энергий W_L и T_L, если СЧ ЭГ состоит только из БМ. Действительно, в этом случае $\rho_G(m) = 0$, или $\tilde{\psi}_k(m) = 0$ $(k = 2,3,4)$. Следовательно, $\tilde{\Psi}(m) = \Psi(m)$, $\tilde{W}_0 W_0$, или то же самое $\tilde{W}_L = W_L$ и $\tilde{T}_L T_L$.

Заметим, что гравитационная энергия и кинетическая энергия вращения ЭГ, соответствующие варианту (2) модели 5, также определяются равенством (15). Кроме того, из последнего легко получаются выражения этих энергий, соответствующие варианту (1) модели 5, заменой $a, b = c$ на $\tilde{a}, \tilde{b} = \tilde{c}$ и $\overline{a}$ на r_s.

4. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ЭНЕРГИИ И КИНЕТИЧЕСКИЕ ЭНЕРГИИ ВРАЩЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО СФЕРОИДАЛЬНОГО И СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЕВ

Сначала определим потенциальную энергию W_G и кинетическую энергию вращения T_G неоднородного сфероидального слоя, состоящего из ТМ с профилем $\rho_G(\mu)$ и массой $M_G(\mu)$. Полагаем, что внутренняя и внешняя границы данного слоя совпадают со сфероидами с полуосями $\mu\tilde{a}$, $\mu\tilde{b} = \mu\tilde{c}$ и $\tilde{a}$, $\tilde{b} = \tilde{c}$ соответственно. Тогда энергии W_G и T_G будут определяться формулами [11]

$$W_G = -\pi G\tilde{a}\tilde{c}^2 J_0 \Psi_G(\mu),$$
$$T_G = \frac{\pi G\tilde{a}\tilde{c}^2}{2} J_1 \Psi_G(\mu), \tag{20}$$

где коэффициенты J_0, J_1 приведены выше, а функция $\Psi_G(\mu)$ определяется формулой

$$\Psi_G(\mu) = \int_{\mu^2}^{1} \rho_G(\mu) M_G(\mu) d\mu^2,$$

$$M_G(\mu) = 4\pi\tilde{a}\tilde{c}^2 \int_{\mu}^{1} \mu^2 \rho_G(\mu) d\mu.$$

После вычисления интегралов для массы гомеоида $M_G(\mu)$ и функции $\Psi_G(\mu)$ получим следующие выражения:

$$M_G(\mu) = 4\pi K r_s^3\left[\ln\frac{1+\xi}{1+\xi\mu} - \frac{\xi(1-\mu)}{(1+\xi)(1+\xi\mu)}\right],$$
$$\Psi_G(\mu) = \frac{8\pi K^2 r_s^3}{\xi^2} H_G(\mu), \tag{21}$$

где

$$H_G(\mu) = \frac{1}{1+\xi\mu}\left[\frac{\xi(1-\mu)(2+3\xi+\xi\mu+2\xi^2\mu)}{2(1+\xi)^2(1+\xi\mu)} - \right.$$
$$\left. - \ln\frac{1+\xi}{1+\xi\mu}\right], \quad \xi = \frac{\sqrt[3]{\tilde{a}\tilde{c}^2}}{r_s}.$$

В силу (21) энергии W_G и T_G можно переписать в более компактной форме

$$W_G = -2\tilde{W}_0 J_0 H_G(\mu),$$
$$T_G = \tilde{W}_0 J_1 H_G(\mu), \tag{22}$$
$$\tilde{W}_0 = 4\pi^2 G K^2 \xi r_s^6.$$

Теперь вычислим потенциальную энергию $W_S(r)$ неоднородного сферического слоя (модель 3) с профилем $\rho_S(r)$, определяемым равенством (3), по формуле из работы [11]

$$W_S(r) = -2\pi\int_a^r u^2 \rho_S(u) U_S(u) du,$$

$$U_S(r) = \frac{4\pi G}{r}\int_a^r u^2\rho_S(u)du + 4\pi G\int_r^{r_s} u\rho_S(u)du.$$

Далее учтем, что радиус внутренней окружности этого слоя равен a – большой полуоси СЧ ЭГ, а внешней окружности – радиус-шкале r_s ЭГ. Тогда внутренний потенциал $U_S(r)$ и масса $M_S(r)$ промежуточного сферического слоя будут равны

$$U_S(r) = \frac{4\pi G K r_s^3}{r}\left(\ln\frac{r+r_s}{a+r_s} - \frac{r}{2r_s} + \frac{a}{a+r_s}\right),$$

$$M_S(r) = 4\pi K r_s^3\left(\ln\frac{r+r_s}{a+r_s} - \frac{r_s}{a+r_s} + \frac{r_s}{r+r_s}\right)$$

соответственно, причем при $r = r_s$ получим полную массу этого слоя.

Подставим выражения потенциала $U_S(r)$ этого слоя и его плотности $\rho_S(r)$ из (3) в выражение $W_S(r)$. Тогда для полной гравитационной энергии

$W_S = W_S(r_s)$ неоднородного сферического слоя получим

$$W_S = -8\pi^2 GK^2 r_s^5 \psi_1(r_s),$$
$$\psi_1(r_s) = \ln\frac{a + r_s}{2r_s} + \frac{(r_s - a)(5a + 3r_s)}{4(a + r_s)^2}. \qquad (23)$$

Кинетическую энергию вращения $T_S(r)$ сферического слоя можно представить в виде разности энергий $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$ двух неоднородных шаров радиусов r_s и a с одинаковой плотностью $\rho_S(r)$ соответственно. Для определения энергий вращения $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$ можно пользоваться формулой

$$\tilde{E}_k = \frac{1}{2}\tilde{J}_k\Omega_k^2, \quad \Omega_k^2 = \frac{GM_k}{r_k^3} \quad (k = 1, 2),$$

где $M_1 = M_H$, $M_2 = M^*$ — массы гало и СЧ ЭГ, $r_1 = r_s$, $r_2 = a$ — радиус-шкала ЭГ и большая полуось ее светящейся части. $\tilde{J}_1$, $\tilde{J}_2$ — моменты инерции неоднородных шаров с плотностью $\rho_S(r)$ и радиусами r_s и a относительно оси вращения. Для определения $\tilde{J}_1$, $\tilde{J}_2$ воспользуемся общей формулой момента инерции

$$J(r) = \frac{8\pi}{3}\int_0^r u^4\rho_S(u)du =$$
$$= \frac{8\pi}{3}Kr_s^3\left[3r_s^2\ln\frac{r + r_s}{r_s} + \frac{r(r^2 - 3rr_s - 6r_s^2)}{2(r + r_s)}\right],$$

положив $r = r_s$ и $r = a$ находим J_1 и J_2 соответственно, и значит $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$. Следовательно, искомое выражение энергии вращения T_S сферического слоя получим в виде

$$T_S = \tilde{E}_1 - \tilde{E}_2, \quad \tilde{E}_1 = \frac{4\pi}{3}GM_H Kr_s^2(3\ln 2 - 2),$$
$$\tilde{E}_2 = \frac{4\pi GM^*}{3a^3}\times \qquad (24)$$
$$\times Kr_s^3\left[3r_s^2\ln\frac{a + r_s}{r_s} + \frac{a(a^2 - 3ar_s - 6r_s^2)}{2(a + r_s)}\right].$$

5. ПОЛНАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИИ СЛОИСТО НЕОДНОРОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГАЛАКТИКИ

Полную гравитационную энергию W и кинетическую энергию вращения T динамической системы по варианту (a) моделей 3 и 4 представим в виде сумм $W = W_1 + W_2 + W_3$ и $T = T_1 + T_2$, а по варианту (b) — в виде сумм $\tilde{W} = \tilde{W}_1 + W_2 + \tilde{W}_3$ и $T = \tilde{T}_1 + T_2$ соответственно. Здесь W_1, T_1 и $\tilde{W}_1$, $\tilde{T}_1$ — гравитационные энергии и энергии вращения СЧ ЭГ согласно вариантам (a) и (b) соответственно. Кроме того, W_2, T_2 — гравитационная энергия и энергия вращения неоднородного сферического (сфероидального) слоя, а W_3 и $\tilde{W}_3$ — взаимные гравитационные энергии СЧ ЭГ и этого слоя согласно вариантам (a) и (b) соответственно. Энергии $W_1 = W_L$ и $T_1 = T_L$ СЧ ЭГ согласно варианту (a) в обеих моделях нами определены равенствами (14) соответственно. При этом энергии $W_2 = W_G$, $T_2 = T_G$ гомеоида определются равенством (22), а энергии $W_2 = W_S$, $T_2 = T_S$ сферического слоя — равенствами (23) и (24) соответственно.

Энергии $\tilde{W}_1 = \tilde{W}_L$ и $\tilde{T}_1 = \tilde{T}_L$, соответствующие варианту (b), в моделях 3 и 4 вычисляются иначе, а именно по формуле (15), явный вид которых приведен в конце раздела 5. Остается вычислить гравитационные энергии W_3 и $\tilde{W}_3$ согласно моделям 3 и 4. Сначала вычислим их согласно вариантам (a) и (b) модели 4 по формуле [11]:

$$(a) \quad W_3 = -U_G(\nu)M(1),$$
$$(b) \quad \tilde{W}_3 = -U_G(\nu)[M(1) + \tilde{M}_G(1)]$$

соответственно. Полные массы $M(1)$ и $\tilde{M}_G(1)$ БМ и ТМ в СЧ ЭГ мы определили в разделе 3, а потенциал $U_G(\nu)$ внутренней точки полости гомеоида равен [11]:

$$U_G(\nu) = \pi G\tilde{a}\tilde{c}^2 J_0\int_{\nu^2}^1 \rho_G(m)dm^2 =$$
$$= \frac{2\pi GK\tilde{a}\tilde{c}^2 J_0}{\xi(1 + \xi)}\frac{1 - \nu}{1 + \nu\xi} = \text{const}.$$

Здесь под внутренней точкой полости гомеоида подразумевается любое пассивно гравитирующее тело (например, звезда), находящееся в СЧ ЭГ. Далее, положив $\nu = \mu$ в выражении потенциала $U_G(\nu)$, искомые энергии W_3 и $\tilde{W}_3$ можно представить в виде

$$(a) \quad W_3 = -W_0\rho_0 g_1(1),$$
$$(b) \quad \tilde{W}_3 = -W_0[\rho_0 g_1(1) + Kg_2(1)], \qquad (25)$$

где функция $g_1(m)$ определяется равенством (12). Кроме того,

$$W_0 = \frac{8\pi^2 GK\tilde{a}\tilde{c}^2 ac^2 J_0}{\xi(1 + \xi)}\frac{\mu(1 - \mu)}{1 + \mu\xi},$$
$$g_2(m) = \frac{1}{\xi^3}\left[\ln(1 + \xi m) - \frac{\xi m}{1 + \xi m}\right]. \qquad (26)$$

Теперь вычислим взаимные потенциальные энергии W_3 и $\tilde{W}_3$ согласно вариантам (a) и (b) модели 3. По аналогии с формулой (25) для них получим

$$(a) \quad W_3 = -U_S M(1),$$
$$(b) \quad \tilde{W}_3 = -U_S[M(1) + \tilde{M}_G(1)],$$

где U_S — потенциал во внутренней точке полости сферического слоя, равный [20]:

$$U_S = 4\pi G\int_a^{r_s} u\rho_S(u)du = 2\pi G K r_s^2 \frac{r_s - a}{r_s + a} = \text{const}.$$

Тогда

$$(a) \quad W_3 = -W_0\rho_0 g_1(1),$$
$$(b) \quad \tilde{W}_3 = -W_0[\rho_0 g_1(1) + K g_2(1)], \qquad (27)$$
$$W_0 = 8\pi^2 G K r_s^2 a c^2 \frac{r_s - a}{r_s + a}.$$

Функция $g_2(1)$ определена выше.

В заключение приведем список полных гравитационных W и кинетических энергий T, вычисленных согласно моделям 3, 4 и 5 в следующем порядке.

Модель 3: (a) $W = W_L + W_S + W_3$, $T = T_L + T_S$, (b) $\tilde{W} = \tilde{W}_L + W_S + \tilde{W}_3$, $\tilde{T} = \tilde{T}_L + T_S$. Энергии W_L, T_L определяются равенством (14), W_S, T_S — формулами (23) и (24) соответственно, $\tilde{W}_L$, $\tilde{T}_L$ — формулой (15), а энергии W_3, $\tilde{W}_3$ равенством (27).

Модель 4: (a) $W = W_L + W_G + W_3$, $T = T_L + T_G$, (b) $\tilde{W} = \tilde{W}_L + W_G + \tilde{W}_3$, $\tilde{T} = \tilde{T}_L + T_G$. Энергии W_G, T_G определяются формулой (22), а энергии W_3, $\tilde{W}_3$ — равенством (25).

Модель 5: (2) $W = \tilde{W}_L$, $T = \tilde{T}_L$. Здесь энергии $\tilde{W}_L$, $\tilde{T}_L$ определяются формулой (15). При этом для получения необходимых выражений, соответствующих варианту (1) модели 5, достаточно в выражении (15) заменить полуоси a, $b = c$ на $\tilde{a}$, $\tilde{b} = \tilde{c}$ соответственно.

6. ДИСПЕРСИЯ СКОРОСТЕЙ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГАЛАКТИКИ

Рассмотрим отношение t_z полной энергии вращения $T_{\rm rot}$ слоисто неоднородного эллипсоида с полуосями $a > b > c$ и с плотностью $\rho(m)$ к модулю ее полной гравитационной энергии W. Согласно формуле (7) $W = W(1) = -\pi G abc J_0 \Psi(1)$, при $T_{\rm rot} = T_1$ для t_z получим значение [11]:

$$t_z = \frac{T_{\rm rot}}{|W|} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3c^2 K_0}{J_0}\right) = \frac{J_1}{2J_0}, \qquad (28)$$

которое в точности совпадает с одноименным отношением для классических однородных фигур равновесия (сфероидов Маклорена: $ab \geq c$, или эллипсоидов Якоби: $a \geq b \geq c$) и является функцией только эксцентриситетов слоя [11].

Заметим, что отношение t_z играет ключевую роль при установлении равновесия и устойчивости осесимметричной динамической системы (например, однородные сфероиды Маклорена). Критерием устойчивости такой системы согласно гипотезе Пиблса-Острайкера [21, 22] является выполнение неравенства

$$t_z < t_{\rm crit} \approx 0.14 \pm 0.03.$$

Далее, отношение t_z можно связать с наблюдаемыми у эллиптических галактик скоростью вращения $v_{\rm rot}(R)$ и дисперсией скоростей $\sigma_s(R)$ на расстоянии R [11]:

$$\frac{v_{\rm rot}(R)}{\sigma_s(R)} = \sqrt{\frac{t_z}{0.5 - t_z}}.$$

Вычисленное по этой формуле отношение $v_{\rm rot}(R)/\sigma_s(R)$ следует сравнивать с наблюдениями, что позволяет сделать некоторые выводы о динамическом состоянии данной галактики. Кроме того, вычислив линейную скорость вращения $v_{\rm rot}(R) = \Omega R$, находим пространственную дисперсию скоростей $\sigma_s(R)$ в зависимости от расстояния R от центра галактики [11]:

$$\sigma_s(R) = \Omega R\sqrt{\frac{0.5 - t_z}{t_z}}, \qquad \Omega = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}, \qquad (29)$$

где Ω — угловая скорость вращения галактики. Так как центростремительная и гравитационная силы, действующие на точку, находящуюся на расстоянии R от центра, уравновешивают друг друга, то получим

$$\frac{V^2}{R} = \frac{GM}{R^2}, \quad V_{\max} = \sqrt{\frac{GM}{a}} = \Omega a. \qquad (30)$$

Приведем ниже другие способы определения пространственной дисперсии скоростей. Зная закон распределения плотности $\rho(r)$, можно определять пространственную дисперсию скоростей $\sigma_s(R)$ на расстоянии R от центра галактики [23, 24]

$$\sigma_s^2(R) = \frac{G}{\rho(R)}\int_R^{\infty} \frac{\rho(r)M(r)}{r^2}dr, \qquad (31)$$

где масса промежуточного шара $M(r)$ и скорость вращения $V_c(r)$ определяются выражениями

$$M(r) = 4\pi\int\limits_0^r u^2\rho(u)du,$$
$$V_c(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \tag{32}$$

соответственно.

Другое выражение для определения пространственной дисперсии скоростей $\sigma_s(R)$ на расстоянии R от центра сферически симметричной галактики дано в [25]:

$$\sigma_s^2(R) = \frac{2G}{I(R)}\int\limits_R^\infty \frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{r^2}\rho(r)M(r)dr,$$
$$I(R) = \frac{2}{\Upsilon}\int\limits_R^\infty \frac{\rho(r)rdr}{\sqrt{r^2 - R^2}}, \tag{33}$$

где $I(R)$ – поверхностная яркость [26], Υ – отношение масса–светимость.

Заметим, что для ЭГ с гомотетическим ("астрофизическим") распределением плотности (1) пространственную дисперсию скоростей $\sigma_s(R)$ нельзя определить по формулам (31) и (33). Для применения этих формул положим

$$m = \frac{r}{q}, \quad m_{\rm eff} = \frac{R_{\rm eff}}{q},$$

$$q = \sqrt[3]{ac^2}, \quad w = \frac{r}{q}\sqrt{\beta} = m\sqrt{\beta}, \tag{34}$$

$$W = \frac{R\sqrt{\beta}}{q}.$$

Тогда выражение (31) в силу выражений (1) и (15) для $\rho(m)$ и $M(m)$ примет вид

$$\sigma_s^2(R) = \frac{4\pi G\rho_0\tilde{R}^3}{q\beta}H(R),$$
$$\tilde{R} = \sqrt{q^2 + R^2\beta} \tag{35}$$

где

$$H(R) = \frac{4Q^4}{Q^4 - 1}\ln Q - 2\ln(Q^2 + 1) + \frac{2Q^2}{(Q^2 + 1)^2},$$

$$Q = \frac{R\sqrt{\beta} + \tilde{R}}{q}.$$

Согласно замене (34) из (33) для $I(R)$ и $\sigma_s^2(R)$ получим:

$$I(R) = \frac{2\rho_0 q^3}{\Upsilon\sqrt{\beta}\tilde{R}^2},$$
$$\sigma_s^2(R) = \frac{4\pi G\rho_0\tilde{R}_2\Upsilon}{\beta}[K_1(R) + K_2(R)], \tag{36}$$

где

$$K_1(R) = \int\limits_W^\infty \frac{\sqrt{w^2 - W^2}}{w^2(1 + w^2)^{3/2}}\ln(w + \sqrt{1 + w^2})dw,$$

$$K_2(R) = -\frac{\pi(\tilde{R} - R\sqrt{\beta})^2}{4\tilde{R}^2}.$$

Здесь интеграл $K_1(R)$ относится к числу "неберущихся", но его можно вычислить численно.

Формулы (35) и (36) дисперсии скоростей соответствуют варианту (a) моделей 3 и 4. В этом случае СЧ ЭГ не содержит ТМ, поэтому общая дисперсия скоростей $\sigma(R) \equiv \sigma_s(R)$.

Теперь определим дисперсию скоростей $\sigma(R)$ согласно варианту (b) моделей 3 и 4, а также вариантам (1) и (2) модели 5. В этом случае СЧ ЭГ содержит ТМ и дисперсию скоростей можно представить в виде суммы: $\sigma^2(R) = \sigma_s^2(R) + \sigma_d^2(R)$, где $\sigma_s^2(R)$ – составляющая БМ дисперсии скоростей, а $\sigma_d^2(R)$ – составляющая ТМ. При этом нам достаточно вычислить $\sigma_d^2(R)$, так как $\sigma_s^2(R)$ определена формулами (35) и (36). Что касается аналогичной (29) формулы, то достаточно вычислить отношение t_z. Согласно варианту (2) модели 5 это отношение будет равно $t_z = \tilde{T}_L/|\tilde{W}_L|$. Здесь $\tilde{W}_L$ и $\tilde{T}_L$ определяются равенством (15). Это отношение легко определяется согласно варианту (1) модели 5 с помощью соответствующей замены, о чем выше мы упомянули.

Перейдем к вычислению $\sigma_d^2(R)$ сначала по формуле (31):

$$\sigma_d^2(R) = \frac{G}{\tilde{q}\rho_G(\bar{\mu})}\int\limits_{\bar{\mu}}^\infty \frac{\rho_G(\mu)M_G(\mu)}{\mu^2}d\mu,$$

$$r = \tilde{q}\mu, \quad \bar{\mu} = \frac{R}{\tilde{q}}, \quad \tilde{q}\sqrt[3]{\tilde{a}\tilde{c}^2}, \quad \bar{\mu}\xi\frac{R}{r_s}.$$

Используя выражение (4) для плотности $\rho_G(\mu)$ и массы $M_G(\mu)$, приведенной в разделе 4, находим

$$\sigma_d^2(R) = B_0\left[B_1(R)\ln\frac{R}{r_s} + B_2(R)\ln\frac{r_s + R}{r_s} - \right.$$
$$\left. - 6B_1(R)\mathrm{dilog}\left(\frac{r_s + R}{r_s}\right) + B_3(R)\right], \tag{37}$$

где

$$B_0 = \frac{2\pi GKr_s\tilde{q}^2}{\xi^2},$$

$$B_1(R) = -\frac{R}{r_s^4}(r_s + R)^2,$$

$$B_2(R) = \frac{r_s + R}{r_s^4 R}(r_s^3 - 3Rr_s^2 + R^2r_s + 7R^3),$$

$$B_3(R) = \frac{1}{r_s^4}[\pi^2 R(r_s + R)^2 - r_s^3 - 9Rr_s^2 - 7R^2r_s],$$

причем функция

$$\mathrm{dilog}(s) = \int_1^s \frac{\ln t}{1-t}dt,$$

$$\mathrm{dilog}(1) = 0, \quad \mathrm{dilog}(0) = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\mathrm{dilog}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}.$$

Далее по второй формуле (33) определяем поверхностную яркость $I(R)$:

$$I(R) = \frac{K\tilde{q}r_s^2}{\xi\Upsilon\bar{R}^3}\left(-\bar{R} + r_s\ln\frac{r_s + \bar{R}}{r_s - \bar{R}}\right),$$

$$\bar{R} = \sqrt{r_s^2 - R^2}.$$

Затем в первой формуле (33) учитываем выражения $\rho_G(\mu)$ и массы $M_G(\mu)$. После чего определяем составляющую ТМ дисперсии скоростей $\sigma_d^2(R)$:

$$\sigma_d^2(R) = \frac{2G}{I(R)}\int_{\bar{\mu}}^{\infty}\frac{\sqrt{\mu^2 - \bar{\mu}^2}}{\mu^2}\rho_G(\mu)M_G(\mu)d\mu = \\ = \psi_0(R)[\psi_1(R) - \xi\psi_2(R)], \tag{38}$$

где

$$\psi_0(R) = \frac{8\pi GKr_s\Upsilon\bar{R}^3}{\tilde{q}\left(-\bar{R} + r_s\ln\frac{r_s + \bar{R}}{r_s - \bar{R}}\right)},$$

$$\psi_1(R) = \int_{\bar{\mu}}^{\infty}\frac{\sqrt{\mu^2 - \bar{\mu}^2}}{\mu^3}\frac{\ln(1+\xi\mu)}{(1+\xi\mu)^2}d\mu, \tag{39}$$

$$\psi_2(R) = \frac{1}{4\bar{R}^3 r_s}\left[(2r_s^4 - 9r_s^2R^2 + 6R^4)\times \right. \\ \left. \times\ln\frac{r_s + \bar{R}}{r_s - \bar{R}} - 2\bar{R}(5r_s^3 - 6R^2r_s - 3\pi R\bar{R}^2)\right].$$

Интеграл $\psi_1(R)$ относится к числу "неберущихся" и вычисляется численно.

Значения пространственной дисперсии скоростей $\sigma(R)$ на расстоянии эффективного радиуса R_{eff} для десяти ЭГ [27] приведены в разделе Примеры.

7. ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ПЛОТНОСТИ В ЦЕНТРЕ ЭГ, ЕЕ РАДИУС-ШКАЛЫ И ПАРАМЕТРА β_{eff}

Считая известным значение пространственной дисперсии скоростей σ_{eff} на расстоянии эффективного радиуса R_{eff} (см. раздел 6), можно определить значение плотности ρ_0 в центре ЭГ. Если для ЭГ использовать "астрофизический закон" распределения плотности $\rho(r)$, то согласно формуле (35) получим

$$\rho_0 = \frac{\sigma_s^2(R_{\mathrm{eff}})\beta_{\mathrm{eff}}q}{4\pi G\sqrt{(q^2 + R_{\mathrm{eff}}^2\beta_{\mathrm{eff}})^3}H(R_{\mathrm{eff}})}, \\ \left(\rho_{\mathrm{crit}} = \frac{3H^2}{8\pi G} \approx 1.37\times 10^{-7}\right). \tag{40}$$

В скобках указано критическое значение плотности в единицах $M_\odot/\text{пк}^3$.

Если же пространственная дисперсия скоростей $\sigma_s(R)$ определяется равенством (36), то для ρ_0 находим следующее выражение:

$$\rho_0 = \frac{\sigma_s^2(R_{\mathrm{eff}})\beta_{\mathrm{eff}}}{4\pi G(q^2 + R_{\mathrm{eff}}^2\beta_{\mathrm{eff}})\Upsilon[K_1(R_{\mathrm{eff}}) + K_2(R_{\mathrm{eff}})]}. \tag{41}$$

Значения $\sigma_s(R_{\mathrm{eff}})$, а также вычисленные по ним значения ρ_0 плотности в центре галактики приведены в разделе 8.

Фигурирующие в равенствах (40) и (41) β_{eff}, значение параметра β, соответствующее эффективному радиусу, можно определять, например, из закона Хаббла

$$I_{\mathrm{eff}} = \frac{I_0}{1 + \beta_{\mathrm{eff}}m_{\mathrm{eff}}^2},$$

$$\beta_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{m_{\mathrm{eff}}^2}\left(\frac{I_0}{I_{\mathrm{eff}}} - 1\right), \tag{42}$$

$$m_{\mathrm{eff}} = \frac{R_{\mathrm{eff}}}{\sqrt[3]{ac^2}},$$

в котором центральная и эффективная поверхностные яркости I_0 и I_{eff} считаются известными. Другой способ определения этих параметров связан со следующей формулой

$$L(m) = 4aqE(e)\int_0^m mI(m) = dm\frac{2qaE(e)I_0}{\beta}\ln(1 + \beta m^2),$$

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a},$$

в которой учтено выражение (1) поверхностной яркости $I(m)$. Здесь $L(m)$ — суммарная поверхностная яркость промежуточного эллипса с полуосями ma и mc, а $E(e)$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода. Отсюда легко определяется полная $L_T = L(m = 1)$ и эффективная $L_{\text{eff}} = L(m_{\text{eff}})$ светимости

$$L_T = 2qaE(e)I_0 \frac{\ln(1 + \beta_T)}{\beta_T},$$

$$L_{\text{eff}} = 2qaE(e)I_0 \frac{\ln(1 + \beta_{\text{eff}} m_{\text{eff}}^2)}{\beta_{\text{eff}}},$$

где β_T — значение параметра β, соответствующие $m = 1$. Кроме того, по определению $L_{\text{eff}} = L_T/2$, т.е.

$$\frac{\ln(1 + \beta_{\text{eff}} m_{\text{eff}}^2)}{\beta_{\text{eff}}} \frac{\ln(1 + \beta_T)}{2\beta_T} = \frac{L_T}{4qaE(e)I_0}.$$

Отсюда, считая I_0 и L_T известными, и определяем параметры β_T и β_{eff}. Кроме этого, параметр β_T можно вычислить иначе. Например, если известны звездная масса M^* галактики, ее плотность в центре ρ_0, а также полуоси $a, b = c$, то из формулы (15) для массы $M(m)$ определяем значение параметра β_T как решение уравнения

$$\frac{g_1(\beta_T)}{\beta_T \sqrt{\beta_T}} = \frac{M^*}{4\pi\rho_0 ac^2}, \quad M^* \equiv M(m = 1),$$

где функция $g_1(\beta_T) \equiv g_1(m = 1, \beta = \beta_T)$ определяется равенством (12).

Радиус-шкалу r_s ЭГ можно определить исходя из условия

$$M_h = M^* + M_G + M_S(r_s) = \\ = M_{bm} + M_S(r_s) = M_{bm} + M_{dm}.$$

Здесь звездная масса M^*, масса газа M_G (равные в сумме барионной массе M_{bm}), а также масса гало галактики M_h считаются известными. При этом полная масса $M_{dm} = M_S(r_s)$ неоднородного слоя (модель 3), состоящего из ТМ, определяется равенством (25) при $r = r_s$. В выражении (25) нормализующий коэффициент K заменим на его приближенное значение

$$K \approx \left(\frac{r_s}{10}\right)^{-2/3}, \tag{43}$$

где r_s выражается в пк [13]. Тогда, считая большую полуось a ЭГ известной, массу $M_{dm} = M_S(r_s)$ представим как функцию только от радиус-шкалы и подставим ее в выражение M_h. Это нам даст уравнение для определения значения r_s:

$$M_h - M_{bm} = B(r_s) r_s^{7/3}, \\ B(r_s) = 4\pi\sqrt[3]{100}\left[\ln\frac{2r_s}{a + r_s} - \frac{r_s - a}{2(a + r_s)}\right]. \tag{44}$$

Значение r_s, определяемое из уравнения (44), соответствует модели 3.

В модели 4 значение r_s находится из выражения M_h при $M_{dm} M_G(\mu)$:

$$M_h - M_{bm} = A(r_s) r_s^{7/3}, \\ A(r_s) = 4\pi\sqrt[3]{100}\left[\ln\frac{1 + \xi}{1 + \xi\mu} - \frac{\xi(1 - \mu)}{(1 + \xi)(1 + \xi\mu)}\right]. \tag{45}$$

Здесь

$$\xi = \frac{\sqrt[3]{\tilde{a}\tilde{c}^2}}{r_s} = \frac{\sqrt[3]{ac^2}}{a}, \quad \mu = \frac{a}{r_s}.$$

Теперь считая известным r_s (в пк), определяем нормализующий коэффицент K, выраженный в массах Солнца на кубический парсек по формуле (43). Найденные таким образом значения радиус-шкал r_s, и значит, коэффициента K по формуле (43) по моделям 3 и 4 для десяти ЭГ, приведены в разделе Примеры.

Итак, приведенные в этом разделе формулы позволяют определить значения таких ключевых параметров ЭГ, как плотности ρ_0 в центре галактики, ее радиус-шкалы r_s. Значения ρ_0 и r_s конкретных ЭГ в базе данных или в трудах других авторов не приводятся. В работе [28] в качестве радиус-шкалы r_s для ЭГ берется радиус ее диска — радиальная шкала. При этом угловые значения малой c и большой a осей определяются из наблюдений. Для определения этих параметров, согласно приведенным выше формулам, необходимо знать звездную (или барионную) массу и массу гало галактики, ее эффективный радиус и значение дисперсии скоростей, вычисленное на расстоянии эффективного радиуса ЭГ. В базе данных и в трудах других авторов эти данные имеются.

8. ПРИМЕРЫ

В качестве примера взяты десять эллиптических галактик, необходимые для вычисления, параметры которых приведены в табл. 1–4.

Величины D_{25} и R_{25}, которые измеряются в фотометрической полосе B до расстояния с предельной яркостью 25 звездных величин с квадратной секунды дуги, а также гелиоцентрическое расстояние D взяты из базы данных HyperLeda[1]. С помощью D_{25} и R_{25}, приведенных в [7], определяют-

[1] leda.univ-lyon1.fr

Таблица 1. Значения гелиоцентрического расстояния D и барионной массы M_{bm} ЭГ

NGC	D, Мпк	M_{bm}	Модели	M_{dm}	M_h	r_s	K
4365 E3	23.3	0.6842	3	14.5814	15.2656	157.80	1.590
			4	14.5694	15.2536	176.00	1.478
4374 E1 (M 84)	18.5	0.7258	3	15.2556	15.9814	160.60	1.571
			4	15.2597	15.9855	168.80	1.520
4406 E3 (M 86)	16.8	0.8268	3	12.6832	13.5100	148.30	1.657
			4	12.6746	13.5014	165.50	1.540
4472 E2 (M 49)	17.1	1.1330	3	21.0525	22.1856	184.20	1.434
			4	21.0657	22.1988	197.00	1.371
4494 E2	16.6	0.1734	3	4.4278	4.6012	94.47	2.238
			4	4.4240	4.5974	102.70	2.117
4621 E4	14.9	0.2586	3	5.9330	6.1916	106.70	2.063
			4	5.9285	6.1871	124.60	1.861
4636 E2	14.3	0.4680	3	11.5722	12.0402	141.70	1.708
			4	11.5560	12.0239	152.90	1.623
4649 E2 (M 60)	17.3	0.9479	3	17.9113	18.8593	171.40	1.504
			4	17.9158	18.8637	181.80	1.446
4697 E4	11.4	0.2433	3	6.3532	6.5964	109.60	2.027
			4	6.3512	6.5944	130.50	1.804
7454 E2	23.2	0.0741	3	1.9067	1.9808	65.60	2.854
			4	1.9061	1.9802	72.02	2.681

Примечание. Приведены массы темной материи M_{dm} и гало M_h, а также радиус-шкалы r_s (в кпк), вычисленные по моделям 3 и 4. Массы выражены в 10^{12} $M_{\odot}$, а нормализующий коэффициент K – в 10^{-3} $M_{\odot}/\text{пк}^3$.

Таблица 2. Значения большой a, малой c полуосей ЭГ и эффективного радиуса $R_{\rm eff}$

NGC	a, кпк	c, кпк	β_T	$m_{\rm eff}$	$\beta_{\rm eff}$	$R_{\rm eff}$, кпк
4365 E3	20.896	15.490	1485.30	0.284	2086.13	6.775
4374 E1 (M 84)	19.947	17.373	2555.69	0.223	3333.71	5.492
4406 E3 (M 86)	18.114	13.428	1032.91	0.341	1547.86	10.140
4472 E2 (M 49)	22.166	18.437	554.84	0.447	915.70	8.661
4494 E2	11.556	9.179	2014.97	0.247	2706.64	3.764
4621 E4	11.114	7.343	790.19	0.397	1253.04	3.219
4636 E2	12.824	10.424	415.36	0.542	742.45	6.50
4649 E2 (M 60)	18.228	15.515	452.54	0.476	763.50	6.421
4697 E4	9.991	6.304	854.44	0.375	1324.18	3.922
7454 E2	6.889	5.348	913.44	0.346	1366.87	2.692

Примечание. Величины β_T и $\beta_{\rm eff}$ соответствуют значениям параметров $m = 1$ и $m_{\rm eff}$.

ся видимые значения больших и малых полуосей a и c ЭГ, которая рассматривается как вытянутый сфероид с полуосями $a > b = c$. Для таких галактик и галактик, имеющих форму трехосного эллипсоида, ось вращения не совпадает с видимой малой осью, а изофоты окажутся несоосными. Вариант ЭГ как сжатый сфероид – более удобный или простой вариант, для которого видимая ось совпадает с осью вращения и не нарушается соосность изофот, не рассматривается.

Таблица 3. Значения центральной σ_0 и пространственной дисперсии скоростей $\sigma(R_{\text{eff}})$ на расстоянии эффективного радиуса и плотности ρ_0 в центре ЭГ

NGC	σ_0, км/с	$\sigma(R_{\text{eff}})$, км/с				ρ_0, $M_\odot/\text{пк}^3$		
		1	2	3	4	5	6	7
4365 E3	255.90	221.31	289.33	221.09	118.90	68.194	10.73	39.46
				387.66	382.24			
4374 E1 (M 84)	288.40	258.23	388.14	239.80	128.80	132.71	17.52	75.113
				377.34	371.51			
4406 E3 (M 86)	216.80	190.55	500.52	219.23	118.61	22.58	3.45	13.0138
				426.45	380.13			
4472 E2 (M 49)	288.30	250.04	527.89	255.82	137.85	50.844	7.89	29.366
				442.19	419.12			
4494 E2	261.80	224.39	248.31	152.10	81.82	98.34	21.42	59.878
				266.16	265.60			
4621 E4	223.90	197.69	188.99	195.54	105.02	254.57	37.97	146.27
				293.71	298.20			
4636 E2	199.50	181.55	627.01	195.39	105.58	48.12	5.18	26.650
				358.66	349.67			
4649 E2 (M 60)	314.80	267.92	519.45	262.99	141.57	105.36	13.22	59.289
				410.56	394.82			
4697 E4	180.70	169.43	263.52	183.70	98.93	129.73	22.31	76.017
				301.03	307.87			
7454 E2	231.70	223.36	240.49	118.60	63.90	113.05	18.10	65.572
				210.25	209.71			

Примечание. Столбцы, обозначенные цифрами 1 и 2, соответствуют значениям $\sigma(R_{\text{eff}})$, приведенному в [29] и вычисленному согласно (29). В столбцах 3 и 4 в первой строке указаны значения $\sigma_s(R_{\text{eff}})$ с учетом только составляющей БМ, а во второй – значения $\sigma(R_{\text{eff}})$ с учетом составляющих ТМ. Столбцы 5 и 6 соответствуют значениям ρ_0, а столбец 7 – среднему значению ρ_0.

В табл. 1 приведены значения гелиоцентрического расстояния D (в Мпк), барионной массы M_{bm}, массы темной материи M_{dm} и массы M_h гало, радиус-шкалы r_s (в кпк), а также нормализующего коэффициента K (в 10^{-3} $M_\odot/\text{пк}^3$), определенные по моделям 3 и 4. Массы M_{bm}, M_{dm} и M_h выражены в 10^{12} массах Солнца.

В табл. 2 приведены значения большой a, малой c полуосей ЭГ (в кпк), параметров β_T, m_{eff} и β_{eff}, а также эффективного радиуса R_{eff} (в кпк) из [29, 30]. Параметры β_T и β_{eff} соответствуют значениям $m = 1$ и $m = m_{\text{eff}}$, а последнее – значению R_{eff}.

Значения звездных масс M^*, барионной массы M_{bm} и массы гало галактик M_h приведены в [29–32]. Для M_h можно использовать ее приближенную зависимость от звездной массы галактики M^*, $M_h = M^*(56 + \Delta M)$, где величина ΔM варьируется от $\Delta M = -10$ до 16 [33]. При этом барионные массы M_{bm} для ЭГ можно определить по приведенным в [33, 34] оценочным значениям масс нейтрального водорода M_{HI}, молекулярного M_{H_2} и центрального молекулярного M_{HIc} газов. Кроме того, в работе [35] приведена приближенная формула определения барионной массы ЭГ в виде $M_{bm}/M_h \approx \Omega_b/\Omega_m \approx 0.17$.

В табл. 3 приведены значения центральной дисперсии скоростей σ_0 и пространственной дисперсии скоростей $\sigma(R_{\text{eff}})$ (в км/с) на расстоянии эффективного радиуса, а также плотности ρ_0 в центре ЭГ. Столбец 1 соответствует значению $\sigma_s(R_{\text{eff}})$, приведенному в [29], а столбец 2 – ее значение, вычисленное по формуле (29). В столбцах 3 и 4 в первой строке указаны значения $\sigma_s(R_{\text{eff}})$, вычисленные по формулам (35) и (36), т.е. без учета составляющей ТМ. Это соответствует вари-

Таблица 4. Значения полных гравитационных энергий W и кинетических энергий вращения T ЭГ, вычисленных по моделям 3, 4 и 5

NGC	Модели	W	T	NGC	Модели	W	T
	3	(a) −1.0238	0.1727		3	(a) −0.2567	0.0419
		(b) −1.0303	0.1728			(b) −0.2574	0.0419
4365	4	(a) −9.4667	0.3803	4621	4	(a) −2.0220	0.1124
		(b) −9.4689	0.3803			(b) −2.0223	0.1125
	5	(1) −1951.72	78.516		5	(1) −2372.6	132.12
		(2) −0.0461	0.0018			(2) −0.0139	0.0008
	3	(a) −1.1024	0.1843		3	(a) −0.7105	0.1177
		(b) −1.1089	0.1843			(b) −0.7122	0.1178
4374	4	(a) −12.644	0.2339	4636	4	(a) −7.8006	0.2168
		(b) −1.1089	0.1843			(b) −7.8012	0.2168
	5	(1) −2466.2	45.666		5	(1) −6223.4	173.13
		(2) −0.0568	0.0011			(2) −0.0258	0.0007
	3	(a) −0.8899	0.1415		3	(a) −1.4781	0.2379
		(b) −0.8946	0.1416			(b) −1.4836	0.2379
4406	4	(a) −7.7024	0.3093	4649	4	(a) −16.171	0.3492
		(b) −7.7042	0.3093			(b) −16.173	0.3492
	5	(1) −3570.2	143.63		5	(1) −897.39	193.99
		(2) −0.0561	0.0023			(2) −0.0909	0.0020
	3	(a) −1.8781	0.3079		3	(a) −0.2809	0.0462
		(b) −1.8881	0.3081			(b) −0.2815	0.04621
4472	4	(a) −19.874	0.4906	4697	4	(a) −2.1293	0.1315
		(b) −19.877	0.4906			(b) −2.1295	0.1315
	5	(1) −5665.061	140.03		5	(1) −4244.45	262.47
		(2) −0.1022	0.00253			(2) −0.0111	0.0007
	3	(a) −0.1501	0.0261		3	(a) −0.0412	0.0068
		(b) −0.1535	0.0262			(b) −0.0414	0.0069
4494	4	(a) −1.6082	0.0497	7454	4	(a) −0.4231	0.0144
		(b) −1.6084	0.0497			(b) −0.4232	0.0145
	5	(1) −289.60	8.9556		5	(1) −178.75	6.0820
		(2) −0.0052	0.0002			(2) −0.0014	0.00005

Примечание. По моделям 3 и 4 приведены значения величин W и T согласно вариантам (a) и (b), а по модели 5 – по вариантам (1) и (2). Значения энергий выражены в единицах 10^{55} Дж.

анту (a): СЧ ЭГ не содержит ТМ. Во второй строке этих столбцов приведены ее значения с учетом составляющих ТМ: $\sigma(R_{\rm eff}) = \sqrt{\sigma_s^2(R_{\rm eff}) + \sigma_d^2(R_{\rm eff})}$, где $\sigma_d^2(R_{\rm eff})$ вычисляется с помощью формул (37) и (38). Столбцы 5 и 6 соответствуют значениям ρ_0, а столбец 7 – среднему значению ρ_0, выраженные в $M_\odot$/пк^3.

Расхождения в значениях $\sigma_s(R_{\rm eff})$ связаны с тем, что в настоящей работе в качестве закона распределения плотности взят “астрофизический закон” (6).

В табл. 4 приведены значения полных гравитационных и кинетических энергий вращения (в Джоулях) десяти эллиптических галактик, вычисленных по моделям 3, 4 и 5. Для модели 5 приведены значения этих величин по варианту (1) и (2), а для моделей 3 и 4 – согласно двум вариантам: (a) основная часть темной материи содержится вне светящейся части ЭГ и (b) доли темной и барионной материи в центральных областях галактики сопоставимы.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для решения некоторых задач небесной механики и астрофизики созданы три новые модели эллиптической галактики (ЭГ), хорошо согласующиеся с современными представлениями о строении таких галактик. Согласно этим моделям ЭГ вместе с гало рассматривается как двухслойный неоднородный эллипсоид вращения — вытянутый сфероид, для которого как и для трехосного эллипсоида ось вращения не совпадает с видимой малой осью, а изофоты оказываются несоосными. Случай сжатого сфероида, для которого видимая ось совпадает с осью вращения и не нарушается соосность изофот, не рассматривается. При этом внешний и внутренний слои считаются подобными и концентрическими, их центры совпадают с центром ЭГ. Светящаяся часть эллиптической галактики (СЧ ЭГ) считается внутренним слоем и представляет собой неоднородный вытянутый сфероид со сфероидальным распределением плотности. В СЧ ЭГ преобладает барионная масса (БМ) с “астрофизическим законом” распределения плотности. Внешняя часть представляет собой неоднородный сферический слой со сферическим законом распределения плотности (модель 3) или сфероидальный слой со сфероидальным распределением плотности (модель 4). Согласно модели 3 внешний слой и гало галактики ограничены сферой радиуса, равного радиус-шкале ЭГ, а согласно модели 4 — они ограничены сфероидальной поверхностью с большой полуосью, равной радиус-шкале галактики. Считается, что сферический и сфероидальный слои в основном состоят из темной материи (ТМ) и в зависимости от ее наличия в центральных областях ЭГ, в моделях 3 и 4 рассматриваются два варианта: (a) основная часть ТМ находится вне СЧ ЭГ и (b) содержание ТМ во внутренних областях ЭГ сравнимо с содержанием БМ. При этом определяются условия сшивки потенциалов на границе раздела СЧ ЭГ и сферического (сфероидального) слоя.

Согласно модели 5, ЭГ вместе с гало (вариант 1) или без него (вариант 2) представляет собой неоднородный эллипсоид вращения — вытянутый сфероид, состоящий из БМ и ТМ. В модели 5 не существует границы раздела между СЧ ЭГ и гомеоида, поэтому выполнение условий сшивки потенциалов не рассматривается.

В рамках созданных трех новых моделей слоисто-неоднородной эллиптической галактики (ЭГ) определены полная гравитационная (потенциальная) энергия, кинетическая энергия вращения и дисперсия скоростей на расстоянии эффективного радиуса галактики. Предложен новый способ определения средних значений радиус-шкалы ЭГ, плотности в ее центре, а также значение параметра β, соответствующее эффективному радиусу галактики.

Полученные результаты применены к шестидесяти ЭГ и приведены в виде таблиц для десяти галактик.

Исследование равновесия и устойчивости динамической системы, созданной на основе моделей 3 и 4, будет проведено автором отдельно.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность профессору Б.П. Кондратьеву за ценные советы и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *С. А. Гасанов*, Астрон. журн. **89**, 522 (2012).
2. *С. А. Гасанов*, Астрон. журн. **91**, 223 (2014).
3. *С. А. Гасанов*, Астрон. журн. **92**, 270 (2015).
4. *А. В. Засов, А. С. Сабурова, А. В. Хоперсков, С. А. Хоперсков*, Успехи физ. наук **187**, 3 (2017).
5. *G. Bertin, R. P. Saglia, and M. Stiavelli*, Astrophys. J. **384**, 423 (1992).
6. *M. Oguri, C. E. Rusu and E. E. Falco*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **439**, 2494 (2014).
7. *G. de Vaucouleurs, A. de Vaucouleurs, H. Corwin, R. J. Buta, G. Paturel, and P. Fouque*, *Third Reference Catalouge of Bright Galaxies* (N.Y.: Springer-Verlag, Vol. 2, 3, 1991).
8. *Б. П. Кондратьев, Л. М. Озерной*, Письма в Астрон. журн. **5**, 67 (1979).
9. *B. P. Kondratyev and V. S. Kornoukhov*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **478**, 3159 (2018).
10. *Б. П. Кондратьев*, *Потенциалы и динамика моделей эллипсоидальных гравитирующих систем*, Канд. диссертация (М., 1982).
11. *Б. П. Кондратьев Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями* (М.: Мир, 2007).
12. *E. Hubble*, Astrophys. J. **71**, 231 (1930).
13. *J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White*, Astrophys. J. **490**, 493 (1997).
14. *P. Côtè, D. E. McLaughlin, J. G. Cohen, and J. P. Blakeslee*, Astrophys. J. **591**, 850 (2003).
15. *J. Binney and S. Tremaine*, *Galactic Dynamics*, (Princeton Univ. Press, 2008).
16. *W. Dehnen*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **265**, 250 (1993).
17. *S. Tremaine, D. O. Richstone, Y.-I. Byun, A. Dressler, S. M. Faber, C. Grillmair, J. Kormendy, and T. R. Lauer*, Astron. J. **107**, 634 (1994).
18. *L. Hernquist*, Astrophys. J. **356**, 359 (1990).
19. *W. Jaffe*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **202**, 995 (1983).
20. *Г. Н. Дубошин Небесная механика. Основные задачи и методы* (М.: Наука, 1968).

21. *J. P. Ostriker and P. J. E. Peebles*, Astrophys. J. **186**, 467 (1973).
22. *В. Л. Поляченко, А. М. Фридман. Равновесие и устойчивость гравитирующих систем* (М.: Наука, 1976).
23. *J. Binney*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **190**, 873 (1980).
24. *J. Binney*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **190**, 421 (1980).
25. *Ph. Prugniel and F. Simien*, Astron. and Astrophys. **321**, 111 (1997).
26. *B. Terzić and A. W. Graham*, arXiv:astro-ph/0506192 (2005).
27. *R. L. Davies, E. M. Sadler, and R. F. Peletier*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **262**, 650 (1993).
28. *S. Samurović*, Astron. and Astrophys. **470**, id. A132 (2014).
29. *M. Cappellari, E. Emsellem, D. Krajnović, R. M. McDermit, et al.*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **413**, 813 (2011).
30. *M. Cappellari, N. Scott, K. Alatalo, L. Blitz, et al.*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **432**, 1709 (2013).
31. *L. R. Spitler, A. F. Dunkan, J. Strader, J. P. Brodie, and J. S. Gallagher*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **385**, 361 (2008).
32. *D. A. Forbes, L. Sinpertu, G. Savorgnan, A. J. Romanowsky, C. Usher, and J. Brodie*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **464**, 4611 (2017).
33. *E. van Uitert, M. Cacciato, H. Hoekstra, M. Brower, et al.*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **459**, 3251 (2016).
34. *D.-W. Kim and G. Fabbiano*, Astrophys. J. **812**, 127 (2015).
35. *D. N. Spergel, R. Bean, O. Dorè, M. R. Nolta, et al.*, Astrophys. J. Suppl. **170**, 377 (2007).