ДВИЖЕНИЕ ЗВЕЗД В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ГАЛАКТИКАХ

 С. А. Гасанов*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга, Москва, Россия
**E-mail: gasanov@sai.msu.ru, gasanovsa57@gmail.com*

Поступила в редакцию 23.07.2021 г.
После доработки 16.10.2021 г.
Принята к публикации 01.11.2021 г.

На основе созданной ранее модели рассмотрена задача о пространственном движении пассивно-гравитирующего тела (ПГТ) в гравитационном поле слоисто-неоднородной эллиптической галактики (СНЭГ). Считается, что СНЭГ состоит из барионной массы (БМ) и темной материи (ТМ), которые обладают отличными друг от друга законами распределения плотности. В качестве ПГТ берется звезда или центр масс шарового скопления, в движении которого учитываются притяжения БМ и ТМ. Для получения точных результатов потенциалы притяжения БМ и ТМ не разлагаются в ряд, а берутся их точные выражения. Найден аналог интеграла Якоби, определена область возможности движения ПГТ, и построены поверхности нулевой скорости. Установлена устойчивость в смысле Ляпунова найденных стационарных решений – точек либрации. Полученные результаты применены к эллиптическим галактикам NGC 4472 (M 49), NGC 4697 и NGC 4374 (M 84).

Ключевые слова: эллиптическая галактика, барионная масса, темная материя, аналог интеграла Якоби, точки либрации, устойчивость в смысле Ляпунова

DOI: 10.31857/S0004629922020049

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] рассмотрена задача о пространственном движении пассивно-гравитирующего тела (ПГТ) в гравитационном поле эллиптической галактики (ЭГ) согласно моделям 1 и 2. Аналогичная задача о движении ПГТ внутри (вблизи) шарового скопления (ШС), принадлежащего ЭГ, исследуется в [3].

Полученные в работах [1–3] результаты применены к модельным эллиптическим галактикам с параметрами, точно совпадающими с параметрами эллиптических галактик NGC 4472 (M 49), NGC 4697 и NGC 4374 (M 84) и приведены в виде рисунков и таблицы.

В работе [4] рассмотрены три новые модели ЭГ (Модели 3, 4 и 5). Наибольший интерес представляет Модель 5, согласно которой ЭГ вместе с гало (вариант 1) или без него (вариант 2) представляет собой неоднородный эллипсоид вращения – вытянутый сфероид, состоящий из БМ и ТМ. В качестве модели трехосной ЭГ выбран именно такой сфероид потому, что его динамические свойства весьма близки к свойствам трехосного эллипсоида [5]. Кроме того, в Модели 5 не следует рассматривать выполнение условий сшивки потенциалов, так как граница раздела между БМ и ТМ в галактике отсутствует. Полученные в [4] результаты применены к шестидесяти ЭГ и приведены в виде таблиц для десяти из них.

Упомянутые выше модели предназначены для решения задач небесной механики и частично астрофизики. В рамках этих моделей сделана еще одна попытка исследовать влияние ТМ на кинематику и динамику ПГТ. Эти модели не могут претендовать на полноту охвата проблемы ТМ в целом. Тем более, по мнению одних авторов [6] основная часть ТМ находится вне светящейся части эллиптической галактики, а по мнению других [7, 8] – содержание ТМ во внутренних областях ЭГ сравнимо с содержанием БМ.

В настоящей работе на основе Модели 5 рассмотрена задача о пространственном движении ПГТ в гравитационном поле СНЭГ, имеющей форму вытянутого сфероида. Найден аналог интеграла Якоби, определена область возможного движения ПГТ, и построены поверхности нулевой скорости. Установлена устойчивость в смысле Ляпунова найденных стационарных решений – точек либрации.

Вопрос о равновесии и устойчивости динамической системы, исследованной в Модели 5, будет рассмотрен отдельно в другой работе автора.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим задачу о пространственном движении ПГТ в поле притяжения СНЭГ, согласно Модели 5 в системе координат $OXYZ$. Условные границы такой галактики определим по значениям величин D_{25} и R_{25} [9]. При этом $OXYZ$ является системой координат с началом в центре ЭГ, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг полярной оси OZ и с осями, направленными по соответствующим главным осям ЭГ. Прямоугольные координаты (x, y, z) ПГТ в этой системе координат определяются из системы уравнений [10]

$$\begin{gathered}\frac{d^2x}{dt^2} - 2\Omega\frac{dy}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x},\\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\Omega\frac{dx}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y},\\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь силовая функция $U = U(x,y,z)$ определяется равенством

$$U = \frac{\Omega^2}{2}(x^2 + y^2) + V, \quad V = U^* + U_G, \tag{2}$$

где первое слагаемое представляет собой потенциал центробежной силы, $V = V(x,y,z)$ – потенциал силы притяжения, а функцию U можно считать потенциалом силы тяжести. $U^* = U^*(x,y,z)$ и $U_G = U_G(x,y,z)$ – потенциалы БМ и ТМ СНЭГ соответственно, явный вид которых приведен в следующих разделах.

Для существования неоднородной ЭГ как фигуры равновесия должно удовлетворяться необходимое условие – неравенство Пуанкаре для угловой скорости вращения [11]:

$$\Omega^2 \le 2\pi G\overline{\rho}, \quad (\Omega^2 \le \pi G\rho_0, \Omega^2 \le 0.4\pi G\overline{\rho}). \tag{3}$$

Здесь G – гравитационная постоянная, а $\overline{\rho}$ – средняя плотность неоднородной эллиптической галактики. Выполнение неравенства Пуанкаре гарантирует направление полной силы тяжести внутрь и неотрицательность давления. В скобках указаны более строгие неравенства Крудели и Кондратьева [12]. В неравенстве Крудели ρ_0 – плотность в центре галактики и она убывает от центра к периферии. Кроме того, о направлении силы тяжести речь не идет.

Очевидно, что система уравнений (1) допускает аналог интеграла Якоби в виде [1, 2, 10]:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2U - 2C, \quad C = \text{const},$$

из которого легко получаются поверхности нулевой скорости и область возможности движения ПГТ,

$$U = C, \quad U \ge C$$

соответственно, где C – аналог постоянной Якоби.

3. ПОТЕНЦИАЛ БАРИОННОЙ МАССЫ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГАЛАКТИКИ

Будем считать, что СНЭГ имеет форму неоднородного вытянутого сфероида, ограниченного сфероидальной поверхностью,

$$\begin{gathered}\frac{x^2}{a^2} + \frac{w^2}{c^2} = m^2, \quad w^2 = y^2 + z^2,\\ a \ge b = c, \quad 0 \le m \le 1,\end{gathered} \tag{4}$$

где значение параметра семейства $m = 0$ соответствует центру СНЭГ, а $m = 1$ – ее внешней границе. Законы распределения плотности $\rho(m)$ и поверхностной яркости $I(m)$ барионной массы определяются выражениями [3, 13, 14]

$$\begin{gathered}\rho(m) = \frac{\rho_0}{(1 + \beta m^2)^{3/2}},\\ I(m) = \frac{I_0}{1 + \beta m^2}\end{gathered} \tag{5}$$

соответственно. Здесь ρ_0 – плотность центра (ядра) эллиптической галактики, m – параметр семейства эллипсоидальных поверхностей (5), из которых состоит ее светящаяся часть, а параметр $\beta \gg 1$ для каждой ЭГ выбирается отдельно [13] и находится выравниванием данных фотометрии [12, 13]. I_0 – центральная поверхностная яркость.

Профиль в виде (5) согласно [12] назовем “астрофизическим”, он согласуется с современными представлениями о строении ЭГ [13, 14].

Потенциал притяжения БМ СНЭГ с плотностью $\rho(m)$ на внешнюю точку $P = P(x,y,z)$ и его производные по координатным осям определяются равенствами [10, 12]

$$\begin{gathered}U^*(P) = \pi G a c^2 \int_\lambda^\infty \frac{\delta(m^2(u))}{\Delta(u)}du,\\ \frac{\partial U^*(P)}{\partial R} = -2\pi G a c^2 R \int_\lambda^\infty \frac{\rho(m^2(u))du}{(A^2 + u)\Delta(u)},\end{gathered} \tag{6}$$

где R – одна из координат (x, y, z), $A^2 = \{a^2, c^2\}$. Если профиль БМ определяется равенством (5), то

$$\delta(m^2(u)) = \int_{m^2(u)}^{1} \rho(v) dv^2 =$$

$$= \frac{2\rho_0}{\beta}\left[-\frac{1}{\sqrt{1+\beta}} + \frac{1}{\sqrt{1+\beta m^2(u)}}\right],$$

$$m^2(u) = \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{w^2}{c^2+u}, \tag{7}$$

$$\Delta^2(u) = (a^2+u)(c^2+u)^2,$$

$$m^2(0) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{w^2}{c^2} > 1,$$

причем выполнение условия $m^2(0) > 1$ для координат внешней точки P СЧ ЭГ является обязательным. Параметр λ является положительным корнем квадратного уравнения $m^2(\lambda) = 1$:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(-p + \sqrt{\delta}),$$

$$\delta = p^2 - 4q > 0,$$

где

$$p = a^2 + c^2 - x^2 - w^2,$$

$$q = a^2c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{w^2}{c^2}\right) = a^2c^2[1 - m^2(0)] < 0.$$

В силу (7) имеем для $p > 0$

$$c^2m^2(0) < x^2 + w^2 < a^2m^2(0),$$

$$a^2 + c^2 - a^2m^2(0) < p < a^2 + c^2 - c^2m^2(0).$$

Очевидно, что потенциал U^* является функцией параметра λ, который, в свою очередь, зависит от координат внешней точки $P = P(x, y, z)$. После вычисления интеграла в (6) для внешнего потенциала получим:

$$U^*(P) \equiv U^*(\lambda) = \frac{2\pi G\rho_0 ac^2}{\beta}\left[-\frac{U_1(\lambda)}{\sqrt{1+\beta}} + U_2(\lambda)\right], \tag{8}$$

где

$$U_1(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(c^2+u)\sqrt{a^2+u}} = \frac{\ln\varphi(\lambda)}{\sqrt{a^2-c^2}},$$

$$\varphi(\lambda) = \frac{\sqrt{a^2+\lambda} + \sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{a^2+\lambda} - \sqrt{a^2-c^2}},$$

$$U_2(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(c^2+u)\sqrt{a^2+u}\sqrt{1+\beta m^2(u)}} =$$

$$= \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{c^2+u}\sqrt{(u-v_1)(u-v_2)}} = \frac{2F(\alpha, n)}{\sqrt{-c^2-v_2}}.$$

Здесь

$$v_1 = \frac{-p_1 + \sqrt{\delta_1}}{2} < 0,$$

$$v_2 = \frac{-p_1 - \sqrt{\delta_1}}{2} < 0,$$

$$\delta_1 = p_1^2 - 4q_1 > 0,$$

$$p_1 = a^2 + c^2 + \beta(x^2 + w^2) > 0,$$

$$q_1 = a^2c^2\left(1 + \beta\frac{x^2}{a^2} + \beta\frac{w^2}{c^2}\right) > 0,$$

причем

$$v_1 + v_2 = -p_1 < 0,$$

$$v_1v_2 = q_1 > 0,$$

$$c^2 + v_2 < c^2 + v_1 < 0,$$

$$0 > v_1 > v_2.$$

Аргумент α и модуль n неполного эллиптического интеграла 1-го рода $F(\alpha, n)$ равны

$$\alpha = \sqrt{\frac{-c^2 - v_2}{\lambda - v_2}}, \quad n = \sqrt{\frac{v_1 - v_2}{-c^2 - v_2}} < 1.$$

Очевидно, что в начале координат (в центре галактики) значение потенциала $U^*(\lambda)$ с учетом следующих равенств:

$$x = 0, \quad w = 0,$$

$$m = 0, \quad m^2(u) = 0,$$

$$\lambda = 0, \quad \rho(m = 0) = \rho_0,$$

$$U_2(\lambda) \equiv U_1(\lambda)$$

будет равно

$$U_0^* = \frac{2\pi G\rho_0 ac^2}{\beta}\frac{\ln\varphi(0)}{\sqrt{a^2-c^2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\beta}}\right),$$

$$\varphi(0) = \varphi(\lambda = 0),$$

функция $\varphi(\lambda)$ определена выше.

Последнее равенство можно получить и из выражения (8) потенциала $U^*(\lambda)$, положив в нем $U_2(\lambda) = U_1(\lambda)$ и $\lambda = 0$.

Положив $z = 0$, $x \neq 0$, $w = y \neq 0$ в соответствующие выражения, определяем параметр λ, корни v_1, v_2, затем значения функций $U_1(\lambda)$ и $U_2(\lambda)$. После чего находим выражение потенциала $U^*(\lambda)$ в плоскости OXY. Аналогично, при $y = 0$, $x \neq 0$, $w = z \neq 0$ находим выражение потенциала $U^*(\lambda)$ в плоскости OXZ.

Далее, в плоскости OYZ имеем

$$x = 0,$$
$$m^2(u) = \frac{w^2}{c^2 + u},$$
$$\lambda = w^2 - c^2,$$
$$v_1 = -a^2,$$
$$v_2 = -c^2 - \beta w^2.$$

Тогда потенциал $U^*(\lambda)$ будет определяться точно таким же равенством, что и (8), но лишь с той разницей, что параметр λ и функция $U_2(\lambda)$ определяются иначе:

$$U_2(\lambda) = \frac{2F(\alpha_0, n_0)}{\sqrt{h^2 - c^2}},$$
$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{h^2 - c^2}{\lambda + h^2}},$$
$$n_0 = \sqrt{\frac{h^2 - a^2}{h^2 - c^2}},$$
$$h^2 = \beta w^2 + c^2.$$

Здесь α_0 и n_0 – аргумент и модуль неполного эллиптического интеграла 1-го рода $F(\alpha_0, n_0)$.

Производная от потенциала $U^*(\lambda)$ по w согласно (6) равна

$$\frac{\partial U^*(\lambda)}{\partial w} = -2\pi G\rho_0 ac^2 w \times$$
$$\times \int_\lambda^\infty \frac{du}{\sqrt{(h^2 + u)^3 (a^2 + u)(c^2 + u)}} =$$
$$= -\frac{4\pi G\rho_0 ac^2}{(h^2 - a^2)\sqrt{\beta}} [F(\alpha_0, n_0) - E(\alpha_0, n_0)],$$

где $F(\alpha_0, n_0)$, $E(\alpha_0, n_0)$ – неполные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода соответственно. Величины α_0, n_0, а также h^2 определены выше. Положив в этих формулах $z = 0$, или $y = 0$ получим выражения потенциала $U^*(\lambda)$ и его производной на координатных осях OY или OZ соответственно. Здесь учтено, что $x = 0$.

Наконец, на координатной оси OX имеем

$$w = 0,$$
$$m^2(u) = \frac{x^2}{a^2 + u},$$
$$\lambda = x^2 - a^2,$$
$$v_1 = -c^2,$$
$$v_2 = -a^2 - \beta x^2.$$

В этом случае в выражении (8) потенциала $U^*(\lambda)$ следует учесть

$$U_2(\lambda) = \int_\lambda^\infty \frac{du}{(c^2 + u)\sqrt{a^2 + u}\sqrt{1 + \beta m^2(u)}} =$$
$$= \int_\lambda^\infty \frac{du}{(c^2 + u)\sqrt{p^2 + u}} = \frac{\ln \varphi_1(\lambda)}{\sqrt{p^2 - c^2}},$$

где

$$\varphi_1(\lambda) = \frac{\sqrt{p^2 + \lambda} + \sqrt{p^2 - c^2}}{\sqrt{p^2 + \lambda} - \sqrt{p^2 - c^2}},$$
$$p^2 = a^2 + \beta x^2.$$

Производная от потенциала $U^*(\lambda)$ по x имеет вид

$$\frac{\partial U^*(\lambda)}{\partial x} = -2\pi G\rho_0 ac^2 x \times$$
$$\times \int_\lambda^\infty \frac{du}{(c^2 + u)\sqrt{(p^2 + u)^3}} =$$
$$= \frac{2\pi G\rho_0 ac^2 x}{p^2 - c^2}\left[\frac{2}{\sqrt{p^2 + \lambda}} - \frac{\ln \varphi_1(\lambda)}{\sqrt{p^2 - c^2}}\right].$$

Функция $\varphi_1(\lambda)$ и параметр p^2 определены выше.

Теперь вычислим производные от потенциала $U^*(\lambda)$ по координатам в общем случае:

$$\frac{\partial U^*(\lambda)}{\partial R} = -2\pi G\rho_0 ac^2 R\bar{R}(\lambda),$$
$$R = \{x, y, z\}, \tag{9}$$
$$\bar{R}(\lambda) = \{X(\lambda), Y(\lambda), Z(\lambda)\},$$

где

$$X(\lambda) = \int_\lambda^\infty \frac{c^2 + u}{\sqrt{c^2 + u}\sqrt{(u - v_1)^3 (u - v_2)^3}} du =$$
$$= S_0 X_0(\lambda) + S_1(\lambda),$$

$$Y(\lambda) = Z(\lambda) =$$
$$= \int_\lambda^\infty \frac{a^2 + u}{\sqrt{c^2 + u}\sqrt{(u - v_1)^3 (u - v_2)^3}} du =$$
$$= S_0 W_0(\lambda) + S_1(\lambda).$$

Здесь

$$S_0 = \frac{2}{(v_1 - v_2)^2\sqrt{-c^2 - v_2}},$$

$$S_1(\lambda) = \frac{2}{(v_1 - v_2)(c^2 + v_1)}\sqrt{\frac{\lambda + c^2}{(\lambda - v_1)(\lambda - v_2)}},$$

$$X_0(\lambda) = 2(c^2 + v_2)E(\alpha, n) - (2c^2 + v_1 + v_2)F(\alpha, n),$$

$$W_0(\lambda) = \frac{(a^2 + c^2)(v_1 + v_2) + 2(a^2c^2 + v_1v_2)}{c^2 + v_1}E(\alpha, n) - \\ - (2a^2 + v_1 + v_2)F(\alpha, n),$$

где корни v_1, v_2, а также аргумент α и модуль n эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода $F(\alpha, n)$ и $E(\alpha, n)$ приведены выше.

Далее можно установить, что потенциал $U^*(\lambda)$, определяемый формулой (7) или (8), обладает всеми характеристическими свойствами силовой функции:

1) является непрерывной функцией от координат x, y, z во всем пространстве;

2) имеет всюду в пространстве непрерывные первые частные производные; эти производные не имеют разрыва на границе эллипсоида, что следует из выражения (7), в котором для получения внутреннего потенциала следует положить $\lambda = 0$;

3) на бесконечности вместе со своими первыми частными производными обращаются в нуль;

4) удовлетворяет уравнению Лапласа вне притягивающего тела СНЭГ, а внутри ($\lambda = 0$) – уравнению Пуассона.

Доказательство этих свойств вытекает, в том числе, из характеристик профиля $\rho(m)$, который является положительной, конечной, непрерывной функцией и обладает непрерывными производными первого и второго порядков. Такой же функцией является и $\delta(m^2(u))$. Следовательно, несобственные интегралы в формуле (7) сходятся, а потенциал $U^*(\lambda)$ и его первые производные по координатам являются конечными, непрерывными функциями от своих аргументов. Кроме того, если ПГТ удаляется в бесконечность, то λ тоже стремится к бесконечности. Поэтому силовая функция $U^*(\lambda)$ и ее первые частные производные в бесконечности обращаются в нуль. Удовлетворение уравнений Лапласа и Пуассона проверяется вычислением частных производных от потенциала $U^*(\lambda)$ второго порядка. Доказательство этого для краткости не приводится.

4. ПОТЕНЦИАЛ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГАЛАКТИКИ

Для краткости и удобства рассмотрим только вариант 2 Модели 5, из которого элементарной подстановкой получим результаты варианта 1. В этом случае внешний потенциал такой галактики определится равенством $\tilde{U}(\lambda) = U^*(\lambda) + U_G(\lambda)$. Здесь $U^*(\lambda)$ представляет собой потенциал БМ с профилем $\rho(m)$ из (5) и определяется равенством (8), а $U_G(\lambda)$ – потенциал ТМ с аналогом профиля $\rho_G(m)$ NFW [4, 15]

$$\rho_G(m) = \frac{K}{\xi m(1 + \xi m)^2}, \quad \xi = \frac{\sqrt[3]{ac^2}}{r_s}, \tag{10}$$

где r_s – радиус-шкала галактики, а функции $m^2(u)$ и $\Delta(u)$ определяются равенством (7). Следовательно,

$$U_G(\lambda) = \pi Gac^2\int_\lambda^\infty \frac{\chi(u)}{\Delta(u)}du, \quad \frac{\partial U_G(\lambda)}{\partial R} = -2\pi Gac^2R\int_\lambda^\infty \frac{\rho_G(m(u))du}{(A^2 + u)\Delta(u)}. \tag{11}$$

Здесь величины A^2, λ и функция $\Delta(u)$ определены выше (см. раздел 3), а $\chi(u)$ есть

$$\chi(u) = \int_{m^2(u)}^1 \rho_G(v)dv^2 = \frac{2K}{\xi^2}\left[\frac{1}{1 + \xi m(u)} - \frac{1}{1 + \xi}\right].$$

Таким образом, потенциал $U_G(\lambda)$ примет вид

$$U_G(\lambda) = \frac{2\pi GKac^2}{\xi^2}[J_1(\lambda) + J_2(\lambda)], \tag{12}$$

где

$$J_1(\lambda) = -\frac{1}{1 + \xi}\int_\lambda^\infty \frac{du}{\Delta(u)},$$

$$J_2(\lambda) = \int_\lambda^\infty \frac{du}{[1 + \xi m(u)]\Delta(u)}.$$

После интегрирования получим

$$J_1(\lambda) = -\frac{\ln\varphi(\lambda)}{(1 + \xi)\sqrt{a^2 - c^2}}, \quad \varphi(\lambda) = \frac{\sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 + \lambda} - \sqrt{a^2 - c^2}}, \tag{13}$$

$$J_2(\lambda) = \frac{1}{u_1 - u_2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left[\sqrt{a^2 + u_k}\ln\psi_k(\lambda) - \right. \tag{14}$$
$$\left. - \xi\sqrt{x^2 + w^2}\frac{\sqrt{f(u_k)}}{c^2 + u_k}\ln\eta_k(\lambda)\right],$$

где

$$u_1 = \frac{-p_2 + \sqrt{\delta_2}}{2} < 0,$$
$$u_2 = \frac{-p_2 - \sqrt{\delta_2}}{2} < 0,$$
$$\delta_2 = p_2^2 - 4q_2,$$
$$0 > u_1 > u_2,$$
$$p_2 = a^2 + c^2 - \xi^2(x^2 + w^2),$$
$$q_2 = a^2c^2[1 - \xi^2m^2(0)],$$
$$u_0 = \frac{c^2x^2 + a^2w^2}{x^2 + w^2},$$
$$c^2 < u_0 < a^2,$$
$$\eta_k(\lambda) =$$
$$= \frac{2\sqrt{f(u_k)f(\lambda)} + (c^2 + u_k)(u_0 + \lambda) + (c^2 + \lambda)(u_0 + u_k)}{(\lambda - u_k)[2\sqrt{f(u_k)} + 2u_k + c^2 + u_0]},$$
$$f(u) = (u_0 + u)(c^2 + u),$$
$$\psi_k(\lambda) = \frac{\sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{a^2 + u_k}}{\sqrt{a^2 + \lambda} - \sqrt{a^2 + u_k}}, \quad (k = 1, 2).$$

В плоскости OZY имеем

$$x = 0,$$
$$m^2(u) = \frac{w^2}{c^2 + u},$$
$$\lambda = w^2 - c^2 > 0.$$

В этом случае потенциал $U_G(\lambda)$ выражается равенством (12), в котором функция $J_1(\lambda)$ точно такая же, но функция $J_2(\lambda)$ определяется иначе:

$$J_2(\lambda) = J_{21}(\lambda) - \xi w J_{22}(\lambda), \tag{15}$$

где

$$J_{21}(\lambda) = \int_\lambda^\infty \frac{du}{(u + h)\sqrt{a^2 + u}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - h}}\ln\frac{\sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{a^2 - h}}{\sqrt{a^2 + \lambda} - \sqrt{a^2 - h}},$$
$$h = c^2 - \xi^2w^2, \quad (h < c^2 < a^2)$$

$$J_{22}(\lambda) = \int_\lambda^\infty \frac{du}{(u + h)\sqrt{(a^2 + u)(c^2 + u)}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(a^2 - h)(c^2 - h)}}\times$$
$$\times\left[\ln\frac{\left(\sqrt{(a^2 + \lambda)(c^2 - h)} + \sqrt{(c^2 + \lambda)(a^2 - h)}\right)^2}{\lambda + h} - \right.$$
$$\left. - \ln\left(\sqrt{a^2 - h} + \sqrt{c^2 - h}\right)^2\right].$$

Положив $w = y$ или $w = z$ в функциях $J_1(\lambda)$ и $J_2(\lambda)$, получим выражения потенциала $U_G(\lambda)$ на координатных осях OY, или OZ соответственно.

На координатной оси OX имеем

$$w = 0,$$
$$m^2(u) = \frac{x^2}{a^2 + u},$$
$$\lambda = x^2 - a^2 > 0.$$

Тогда для функции $J_2(\lambda)$ находим

$$J_2(\lambda) = \frac{1}{a^2 - c^2 - \xi^2x^2}\left[\sqrt{a^2 - c^2}\ln\varphi(\lambda) - \right. \tag{16}$$
$$\left. - \xi\sqrt{x^2}\ln\frac{(\xi\sqrt{x^2} + \sqrt{a^2 + \lambda})^2}{\lambda + c^2}\right].$$

Здесь функция $\varphi(\lambda)$ определена выше. Потенциал $U_G(\lambda)$ при этом выражается равенством (12), в котором выражение функции $J_1(\lambda)$ остается точно таким же, а $J_2(\lambda)$ определяется равенством (16).

Наконец, значение потенциала в начале координат (в центре галактики) равно

$$U_G^0 = U_G(\lambda = 0) = \frac{2\pi GKac^2}{\xi(1 + \xi)}\frac{\ln\varphi(\lambda = 0)}{\sqrt{a^2 - c^2}}, \tag{17}$$

где функция $\varphi(\lambda)$ определена выше.

Заметим, что согласно варианту 1 Модели 5 ЭГ рассматривается как неоднородный вытянутый сфероид, состоящий из БМ и ТМ с соответствующими профилями $\rho(m)$ и $\rho_G(m)$ вместе с гало. Если считать, что СНЭГ вместе с гало ограничена вытянутой сфероидальной поверхностью с полуосями $\tilde{a} > \tilde{b} = \tilde{c}$, то в этом случае в выражениях (8) и (12) потенциалов $U^*(\lambda)$ и $U_G(\lambda)$ и их производных следует произвести замену a, c на $\tilde{a}$, $\tilde{c}$. После чего получим и явное выражение для общего потенциала $\tilde{U}(\lambda) = U^*(\lambda) + U_G(\lambda)$ согласно этому варианту Модели 5, которое для краткости не приведено.

Таблица 1. Координаты (кпк) коллинеарных $L_2(x_0, 0, 0)$, $L_3(-x_0, 0, 0)$ и треугольных $L_4(0, y_0, 0)$, $L_5(0, -y_0, 0)$ точек либрации, найденных согласно вариантам 1 и 2 Модели 5 для трех ЭГ. Галактики считаются неоднородными вытянутыми сфероидами с полуосями $a > b = c$

Эллиптические галактики	Полуоси, кпк		Варианты	Точки либрации	
	a	$b = c$		x_0	y_0
NGC 4374	19.947	17.373	1	442.547	441.301
			2	22.543	22.189
NGC 4472	22.166	18.437	1	532.375	530.406
			2	24.735	24.171
NGC 4697	9.991	6.304	1	508.274	506.522
			2	11.121	10.583

Кроме того, в этом варианте также не существует границы раздела между БМ и ТМ, т.е. нет необходимости определять условия сшивания потенциалов $U^*(\lambda)$ и $\tilde{U}_G(\lambda)$.

5. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ. ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ

Для нахождения стационарных решений системы уравнений (1) в ней положим

$$x = x_0 = \text{const},\quad y = y_0 = \text{const},\quad z = z_0 = \text{const}.$$

Это нам даст систему алгебраических уравнений для нахождения стационарных решений в виде

$$\frac{\partial U(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial U(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial U(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = 0. \tag{18}$$

При решении системы уравнений (18) будем рассматривать варианты 1 с гало и 2 без него Модели 5. Нулевое решение $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ и $z_0 = 0$ системы уравнений (18) соответствует центральной точке либрации, которую обозначим через $L_1 = L_1(0, 0, 0)$. На оси OX и OY имеются по две точки либрации, а именно $L_2 = L_2(x_0, 0, 0)$ и $L_3 = L_3(-x_0, 0, 0)$ на оси OX, $L_4 = L_4(0, y_0, 0)$ и $L_5 = L_5(0, -y_0, 0)$ на оси OY.

В табл. 1 приведены значения координат (в кпк) коллинеарных L_2, L_3 и треугольных L_4, L_5 точек либрации, вычисленные по вариантам 1 и 2 Моделям 5 для трех ЭГ: NGC 4374, NGC 4472 и NGC 4697, считающихся слоисто-неоднородными вытянутыми сфероидами.

6. ТИП И УСТОЙЧИВОСТЬ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Особыми точками семейства $U = C$ являются точки, в которых невозможно построить единственную касательную плоскость. Для определения таких точек получим систему алгебраических уравнений, точно совпадающую с системой (18) для определения точек либрации. Следовательно, точки либрации L_n являются особыми точками.

Для исследования типа и установления устойчивости особых точек — точек либрации — силовая функция U разлагается в ряд Тейлора в окрестности L_n $(n = 1, 2, \cdots, 5)$ и записывается семейство поверхностей нулевой скорости $U = C$ (см. раздел 2). Затем рассматривается движение ПГТ вблизи этих точек, которое выражается системой дифференциальных уравнений в вариациях. После чего записывается характеристическое уравнение этой системы и в зависимости от значений корней этого уравнения, согласно известной теореме Ляпунова, устанавливается устойчивость точек либрации L_n в смысле Ляпунова в первом приближении (или в линейной постановке). Вся эта процедура подробно описана в работах автора [2, 3], поэтому здесь для краткости она не приведена.

Тип и устойчивость центральной точки либрации $L_1(0, 0, 0)$ одинаковы во всех моделях: это изолированная особая точка, устойчивая в смысле Ляпунова в первом приближении и в нелинейной постановке. Найденные согласно Моделям 3, 4 и 5 в данной работе коллинеарные точки либрации L_2 и L_3 являются коническими особыми точками с осью конуса OX и неустойчивы в смысле Ляпунова в первом приближении, а треугольные точки либрации L_4 и L_5 являются особыми точками с осью конуса OZ и они устойчивы. Следовательно, если ПГТ (например, звезда) окажется очень близко к треугольным точкам либрации L_4 или L_5, то она будет там находиться вечно, т.е. имеет место устойчивость по Хиллу.

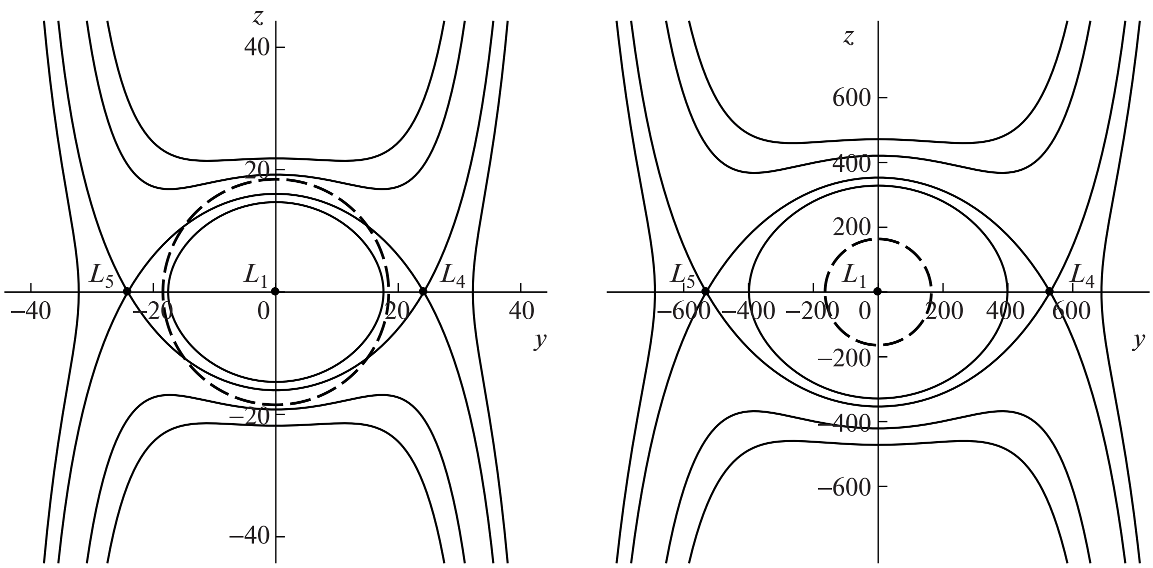

Рис. 1. Поверхности нулевой скорости с коллинеарными L_1 (L_2, L_3) и треугольными L_4, L_5 точками либрации для ЭГ NGC 4472 для Модели 5 в плоскости $x = 0$. Слева – по варианту 2 без гало, а справа – по варианту 1 вместе с гало. Штриховой линией обозначены границы светящейся части галактики (слева) и гало галактики (справа). Координаты указаны в килопарсеках.

Заметим, что в работах [16–18] также показана неустойчивость точек либрации L_2, L_3 и устойчивость L_4 и L_5 в смысле Ляпунова. Кроме того, нелинейный анализ показал, что L_4 и L_5 устойчивы для большинства начальных условий в смысле меры Лебега, исключая лишь некоторые резонансные случаи, когда имеет место неустойчивость [18].

7. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ НУЛЕВОЙ СКОРОСТИ

Процедура и метод построения поверхностей нулевой скорости, или поверхностей Хилла, подробно описаны в работе автора [3] Поэтому здесь на них останавливаться не будем. В качестве примера возьмем эллиптические галактики NGC 4374 типа E1, NGC 4472 типа E2 и NGC 4697 типа E4, которые мы считаем слоисто-неоднородными вытянутыми сфероидами с полуосями $a > b = c$. Ниже приведены значения ключевых параметров этих галактик: звездной массы M^* и массы M_h гало (в массах Солнца), радиус-шкалы r_s в кпк, угловой скорости вращения галактик Ω в радианах на млн. лет, параметров β и K (в массах Солнца на кубический парсек), вычисленных по известной формуле, а также значения полуосей a, $b = c$ в кпк и плотности ρ_0 в центре галактики, выраженной в массах Солнца на кубический парсек:

- **NGC 4374**: $M^* = 3.38844\times10^{11}M_\odot$, $M_h = 1.5674\times10^{13}M_\odot$, $\Omega = 0.01386$, $\beta = 1815$, $r_s = 168.80$, $a = 19.947$, $b = c = 17.373$, $K = 0.167\times10^{-3}$, $\rho_0 = 132.71$;
- **NGC 4472**: $M^* = 4.67735\times10^{11}M_\odot$, $M_h = 2.172\times10^{13}M_\odot$, $\Omega = 0.0139$, $\beta = 858$, $r_s = 197.0$, $a = 22.166$, $b = c = 18.437$, $K = 0.1467\times10^{-3}$, $\rho_0 = 50.844$;
- **NGC 4697**: $M^* = 1.4125\times10^{11}M_\odot$, $M_h = 6.494\times10^{12}M_\odot$, $\Omega = 0.02524$, $\beta = 650$, $r_s = 130.5$, $a = 9.991$, $b = c = 6.304$, $K = 0.3459\times10^{-3}$, $\rho_0 = 194.589$.

На рис. 1 приведены построенные поверхности нулевой скорости с коллинеарными L_1 (L_2, L_3) и треугольными L_4, L_5 точками либрации для ЭГ NGC 4472 по Модели 5 в плоскости $x = 0$. Слева по варианту 2 без гало, а справа по варианту 1 вместе с гало галактики. Координаты указаны в килопарсеках.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе созданной новой Модели 5 для решения задач небесной механики и астрофизики рассмотрено пространственное движение пассивно-гравитирующего тела (ПГТ) в гравитационном поле слоисто-неоднородной эллиптической галактики (СНЭГ). Согласно Модели 5, ЭГ вместе с гало (вариант 1) или без него (вариант 2) представляет собой слоисто-неоднородный вытянутый сфероид, состоящий из БМ и ТМ. Выбор вытянутого сфероида в качестве модели трехосной ЭГ объясняется тем, что его динамические свойства оказываются весьма близкими к свойствам трехосного эллипсоида. В этой модели не существует границы раздела между БМ и ТМ, поэтому определение условий сшивки потенциалов не рассматривается.

В качестве профиля БМ взят так называемый “астрофизический закон”, основанный на законе распределения поверхностной яркости Хаббла и хорошо моделирующий распределение плотности в ЭГ. Для ТМ берется аналог профиля NFW.

Найден аналог интеграла Якоби, определена область возможности движения пассивно-гравитирующего тела и построены поверхности нулевой скорости. Установлена устойчивость в смысле Ляпунова найденных стационарных решений – точек либрации. Найденные согласно Моделям 3, 4 и 5 в данной работе коллинеарные точки либрации L_2 и L_3 являются коническими особыми точками с осью конуса OX и неустойчивы в смысле Ляпунова в первом приближении, а треугольные точки либрации L_4 и L_5 являются особыми точками с осью конуса OZ и устойчивы. Определена поверхность вокруг СЧ ЭГ, внутри которой движения звезд или центра масс ШС оказываются устойчивыми по Хиллу.

Полученные результаты применены к эллиптическим галактикам NGC 4374, NGC 4472 (M 49) и NGC 4697 и приведены в виде рисунка и таблицы. Показано, что для получения точных результатов при нахождении точек либрации и исследовании их на устойчивость, вместо приближенных выражений потенциалов БМ и ТМ следует пользоваться их точными выражениями.

Исследование равновесия и устойчивости рассмотренных динамических систем по этим двум моделям будет проведено автором отдельно.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность профессору Б. П. Кондратьеву за ценные советы и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *С. А. Гасанов*, Астрон. журн. **89** (6), 522 (2012).
2. *С. А. Гасанов*, Астрон. журн. **91** (3), 223 (2014).
3. *С. А. Гасанов*, Астрон. журн. **92** (3), 270 (2015).
4. *С. А. Гасанов*, в печати.
5. *Б. П. Кондратьев*, Астрон. журн. **59**, 458 (1982).
6. *А. В. Засов, А. С. Сабурова, А. В. Хоперсков, С. А. Хоперсков*, Успехи физ. наук **187**, 3 (2017).
7. *G. Bertin, R. P. Saglia, and M. Stiavelli*, **384**, 423 (1992).
8. *M. Oguri, C. E. Rusu, and E. E. Falco*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **439**, 2494 (2014).
9. *G. de Vaucouleurs, A. de Vaucouleurs, H. Corwin, R. J. Buta, G. Paturel, and P. Fouque*, *Third Reference Catalouge of Bright Galaxies. VV.* ***2, 3*** (N.Y.: Springer-Verlag, 1991).
10. *Г. Н. Дубошин. Небесная механика. Основные задачи и методы* (М.: Наука, 1968).
11. *H. Poincaré*, *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques* (Paris: Libraire Scientifique A. Hermann et fils, 1911).
12. *Б. П. Кондратьев*, *Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями* (М.: Мир, 2007).
13. *Б. П. Кондратьев*, *Потенциалы и динамика моделей эллипсоидальных гравитирующих систем.* Кандидатская диссертация (М.: Моск. физ.-техн. ин-т, 1982). 300 с.
14. *E. Hubble*, **71**, 231 (1930).
15. *J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White*, **490**, 493 (1997).
16. *Ю. В. Батраков*, Бюлл. ИТА **6**, 524 (1957).
17. *В. К. Абалакин*, Бюлл. ИТА **6**, 543 (1957).
18. *С. Г. Журавлев*, Астрон. журн. **51**, 1330 (1974).