

ОБ УЧЕТЕ ЭФФЕКТА ЯРКОВСКОГО В СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА, СВЯЗАННЫХ С РАДИУСОМ-ВЕКТОРОМ И ВЕКТОРОМ СКОРОСТИ

© 2022 г. Т. Н. Санникова*

ФГБУН Крымская астрофизическая обсерватория РАН, Научный, Крым, Россия

*E-mail: tnsannikova@craocrimea.ru

Поступила в редакцию 11.03.2022 г.

После доработки 31.03.2022 г.

Принята к публикации 31.03.2022 г.

Рассмотрено движение астероида в центральном гравитационном поле при наличии дополнительного возмущающего ускорения, возникающего за счет эффекта Ярковского. Долгосрочная эволюция орбиты исследована с помощью аналитического решения осредненных уравнений движения в двух орбитальных системах отсчета: \mathcal{O}_1 , связанной с радиусом-вектором, и \mathcal{O}_2 , связанной с вектором скорости. Значения компонентов ускорения Ярковского найдены как средние за орбитальный период на основе теплофизических характеристик и параметров вращения малого тела в рамках линейной теплофизической модели силы Ярковского для сферических астероидов. Для модельных астероидов с различными эксцентриситетами орбит для обеих систем отсчета найдены дрейфы средней аномалии и большой полуоси, а также смещение относительно невозмущенного положения за 1000 орбитальных оборотов. В результате получено, что дрейфы большой полуоси и средней аномалии, также как и смещения, отличаются менее чем на 1% при малых эксцентриситетах (до 0.5). При $e_0 > 0.5$ величины, найденные в системе \mathcal{O}_1 , всегда больше тех же величин в системе \mathcal{O}_2 . При $e_0 \sim 0.5-0.7$ их отличие не превышает 6%, постепенно увеличиваясь с ростом e_0 . При $e_0 > 0.7$ эти отличия растут экспоненциально. Таким образом, при моделировании эффекта Ярковского трансверсальным ускорением ожидаемые значения дрейфов и смещения для объектов с высокоэллиптическими орбитами могут оказаться завышенными, что может быть одним из факторов низкого обнаружения эффекта Ярковского непосредственно из астрометрических наблюдений.

Ключевые слова: общие вопросы небесной механики, эффект Ярковского, тангенциальное ускорение, трансверсальное ускорение, радиальное ускорение, нормальное ускорение, дрейф большой полуоси, дрейф средней аномалии, смещение относительно невозмущенного положения, астероиды, сближающиеся с Землей

DOI: 10.31857/S0004629922070052

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время человечество осознало реальность угрозы столкновения Земли с малыми телами Солнечной системы. Для предотвращения этой угрозы необходимо выявить потенциально опасные объекты, определить их орбиты и оценить вероятность их столкновения или тесного сближения с Землей. Для повышения точности прогнозирования движения тела необходимо учитывать негравитационные эффекты, в частности эффект Ярковского. Этот эффект возникает вследствие теплового излучения вращающегося тела, имеющего ненулевую тепловую инерцию, и вызывает вековые изменения эксцентриситета, большой полуоси и, прежде всего, средней аномалии, изменение которой квадратично растёт со временем. Таким образом, эффект Ярковского играет существенную роль в эволюции орбит ма-

лых тел, поэтому определение величины этого эффекта и изучение его влияния на астероиды, сближающиеся с Землей (АСЗ), являются необходимой составляющей для расчета их орбит и оценки их потенциальной опасности для Земли. Также эффект Ярковского считается одной из причин миграции астероидов в резонансные зоны Главного пояса, после чего они могут пополнить популяцию АСЗ. Кроме того, покрытие объекта специальным веществом для изменения орбиты с помощью эффекта Ярковского предлагается как один из способов воздействия на космические объекты, угрожающие столкновением с Землей.

Для учета эффекта Ярковского и изучения его влияния на долгосрочную эволюцию орбиты малого тела необходимо знать значения компонентов возмущающего ускорения, возникающего благодаря этому эффекту. В настоящее время

наиболее распространенным методом оценки величины эффекта Ярковского является дифференциальная коррекция орбиты [1–4]. Поскольку эффект Ярковского приводит к вековым возмущениям большой полуоси, используется трансверсальное ускорение в виде

$$\mathbf{a}_r = A_2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \hat{\mathbf{t}},$$

где r – гелиоцентрическое расстояние до астероида, $r_0 = 1$ а.е., A_2 – динамический параметр, определяемый в орбитальной подгонке вместе с элементами орбиты. Далее оценивается дрейф большой полуоси орбиты, и этот дрейф учитывается при прогнозировании движения астероида. Тем не менее значительная часть эффекта при определении его этим способом остается неучтенной, что может вызвать заметные ошибки при прогнозировании движения тела на основе найденной орбиты [5].

Более точным, на наш взгляд, является вычисление компонентов ускорения на основе какой-либо модели силы Ярковского. В настоящее время ведется обширная работа по определению теплофизических характеристик малых тел с помощью наблюдений, получаемых в наземных и орбитальных обсерваториях, например, определение формы и параметров вращения астероидов по их фотометрии [6, 7], определение диаметра и геометрического альbedo по общему тепловому излучению тел, полученному в результате 4-полосной тепловой инфракрасной съемки всего неба, проведенной находящимся на околоземной орбите инфракрасным телескопом (проект NEOWISE) [8], уточнение тепловых характеристик поверхности при лабораторных исследованиях образцов метеоритного и астероидного вещества [9], а также в результате космических миссий к астероидам [10–12]. В будущем, при расширении знаний о свойствах малых тел явный учет эффекта Ярковского станет более предпочтительным.

Как упоминалось выше, при оценке дрейфа большой полуоси вследствие эффекта Ярковского возмущающее ускорение обычно моделируют трансверсальным компонентом. Однако тангенциальный компонент ускорения оказывает более непосредственное влияние на изменение скорости объекта и, как следствие, на дрейфы большой полуоси и средней аномалии. Это не принципиально для круговых орбит и при малых эксцентриситетах, когда трансверсальная и тангенциальная составляющие практически совпадают. Но для высокоэллиптических орбит это не так. Очевидно также, что величина изменения элементов орбиты не должна зависеть от выбора системы отсчета. Далее мы определим дрейфы элементов и смещение относительно невозмущен-

ного положения за 1000 орбитальных оборотов для модельных астероидов с теплофизическими характеристиками как у астероида 101 955 Bennu, но с различными эксцентриситетами орбит в двух орбитальных системах и сравним их.

Для этого рассмотрим движение точки нулевой массы \mathcal{A} (Астероида) под действием притяжения к центральному телу \mathcal{S} (Солнцу) и возмущающего ускорения \mathbf{P}' , обратно пропорционального квадрату расстояния до \mathcal{S} , т.е. $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/r^2$, и малого по сравнению с основным ускорением κ^2/r^2 :

$$\max \frac{|\mathbf{P}'|}{\kappa^2 r^{-2}} = \max \frac{|\mathbf{P}|}{\kappa^2} = \mu \ll 1. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{r} = \mathcal{S}\mathcal{A}$, $r = |\mathbf{r}|$, κ^2 – произведение постоянной тяготения на массу \mathcal{S} , μ – малый параметр. Пусть ускорение \mathbf{P}' обязано эффекту Ярковского. В этом случае удовлетворяется условие (1), так как для АСЗ диаметром менее 1 км типичное значение трансверсального параметра $A_2 \sim 10^{-15} - 10^{-13}$ а.е./сут², и для расстояния 1 а.е. $\mu \approx 10^{-9} \ll 1$. Компоненты вектора \mathbf{P} – постоянные и малые порядка μ величины. Для этой задачи в статье [13] получены эволюционные уравнения движения в средних элементах в первом порядке малости по μ для различных систем отсчета. В [14, 15] эти уравнения проинтегрированы для двух орбитальных систем отсчета: \mathbb{O}_1 , связанной с радиусом-вектором, и \mathbb{O}_2 , связанной с вектором скорости. В разделе 2 приведены частные решения, необходимые для исследования долгосрочной эволюции большой полуоси и средней аномалии.

Рассмотрим две системы отсчета с началом в \mathcal{S} : \mathbb{O}_1 с осями, направленными по радиусу-вектору, трансверсали (перпендикулярю к радиусу-вектору в плоскости оскулирующей орбиты в сторону движения) и бинормали (направленной по вектору площадей) и \mathbb{O}_2 с осями по вектору скорости, нормали к нему в плоскости оскулирующей орбиты и бинормали. Пусть вектор \mathbf{P} имеет компоненты P_r, P_t, P_n в системе \mathbb{O}_1 и $P_{\mathcal{X}}, P_{\mathcal{Y}}, P_n$ в \mathbb{O}_2 . Обозначим средние за орбитальный период значения компонентов вектора \mathbf{P} следующим образом: $S = \bar{P}_r, T = \bar{P}_t, \mathcal{X} = \bar{P}_{\mathcal{X}}, \mathcal{Y} = \bar{P}_{\mathcal{Y}}, W = \bar{P}_n$ и будем называть их радиальным, трансверсальным, тангенциальным, нормальным и бинормальным параметрами соответственно. В статье [16] выведены соответствующие выражения для параметров S, T, W на основе формул для составляющих ускорения Ярковского в проекции на оси системы \mathbb{O}_1 , полученных в рамках линейной

теплофизической модели силы Ярковского для сферических астероидов [17] и опубликованных в [18]. В настоящей статье выведены тангенциальный \mathfrak{Z} и нормальный \mathfrak{N} параметры (см. раздел 3).

В разделе 4 для модельных астероидов в двух орбитальных системах отсчета найдены дрейфы большой полуоси и средней аномалии, а также смещение относительно невозмущенного положения за счет эффекта Ярковского и проведено их сравнение.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Как показано в [16], бинормальный компонент P_n в среднем за орбитальный период равен нулю ($W = 0$), поэтому используем частные аналитические решения.

Для системы отсчета \mathcal{O}_1 [14]:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\kappa^2}{n_0 T} \left(\frac{\eta_0}{1 - \eta_0} \right)^3 \left(2 \ln \frac{\eta}{\eta_0} + \frac{1}{\eta} - \eta - \frac{1}{\eta_0} + \eta_0 \right), \\ a &= a_0 \left[\frac{\eta_0 (1 - \eta)}{\eta (1 - \eta_0)} \right]^2, \\ i &= i_0, \quad \Omega = \Omega_0, \quad \omega = \omega_0, \\ M &= M_0 + \frac{\kappa^2 - 2S}{T} \left(\eta + \ln \frac{1 - \eta}{1 - \eta_0} - \eta_0 \right), \end{aligned} \quad (2)$$

и для \mathcal{O}_2 [15]:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\pi \eta_0^3 \kappa^2}{4 n_0 \mathfrak{Z}} \int_{e_0}^e \frac{e}{\eta^3 [\mathbf{E}(e) - \eta^2 \mathbf{K}(e)]} \times \\ &\times \left(\exp \int_{e_0}^e \frac{3x \mathbf{K}(x) dx}{2[\mathbf{E}(x) - (1 - x^2) \mathbf{K}(x)]} \right) de, \\ a &= a_0 \left(\frac{\eta_0}{\eta} \right)^2 \exp \left[\int_{e_0}^e \frac{e \mathbf{K}(e) de}{[\mathbf{E}(e) - \eta^2 \mathbf{K}(e)]} \right], \\ i &= i_0, \quad \Omega = \Omega_0, \\ \omega &= \omega_0 + \int_{e_0}^e \left\{ \frac{e \mathbf{K}(e)}{2[\mathbf{E}(e) - \eta^2 \mathbf{K}(e)]} \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{Z}} \right\} de, \\ M &= M_0 + \int_{e_0}^e \left\{ \frac{\pi \kappa^2 e}{4[\mathbf{E}(e) - \eta^2 \mathbf{K}(e)] \mathfrak{Z}} + \right. \\ &\left. + \frac{e \eta \mathbf{K}(e)}{2[\mathbf{E}(e) - \eta^2 \mathbf{K}(e)]} \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{Z}} \right\} de. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее индексом 0 отмечены значения переменных в начальную эпоху $t = 0$, e – эксцентриситет, a – большая полуось, $n = \kappa a^{-3/2}$ – сред-

нее движение, $\eta = \sqrt{1 - e^2}$, i – наклон, Ω – долгота восходящего узла, ω – аргумент перицентра, M – средняя аномалия, а также использованы стандартные обозначения для полных эллиптических интегралов в нормальной тригонометрической форме [19]:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(e) &= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 x}}, \\ \mathbf{E}(e) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 x} dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение (3) содержит определенные интегралы от комбинаций полных эллиптических интегралов, которые можно найти численными методами.

Первое выражение в системах (2), (3) представляет собой кинематическое уравнение, с помощью которого можно найти время, за которое произойдет заданное изменение эксцентриситета, и, наоборот, решая кинематическое уравнение $t(e) = \Delta t$ относительно e , найти изменение эксцентриситета за время Δt .

Область определения решений (2), (3) указана в [14, 15]. Там же даны представления этих решений в виде разложений в ряд по степеням эксцентриситета. Согласно [16] в случае решения (2) для системы отсчета \mathcal{O}_1 при $e \leq 0.8$ необходимо использовать степенные ряды, поэтому приведем их здесь:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\kappa^2}{n_0 T} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} e_0^{2k} \right]^{-3} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(2k+3)!!}{(2k+4)!!} - \frac{1}{k+3} \right) \left(\frac{e^6}{e_0^6} e^{2k} - e_0^{2k} \right), \\ a &= a_0 \left(\frac{e}{e_0} \right)^4 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} e_0^{2k} \right]^{-2} \times \\ &\times \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} e^{2k} \right]^2, \\ M &= M_0 + \frac{\kappa^2 - 2S}{T} \times \\ &\times \left[2 \ln \left(\frac{e}{e_0} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!}{2^{2k} (k!)^2} (e^{2k} - e_0^{2k}) \right]. \end{aligned}$$

Приведем также решение для круговой орбиты, которое предпочтительнее использовать вместо (2), (3) при $e \approx 0$:

$$a = a_0 \left(1 + \frac{t}{t_1} \right)^{2/3}, \quad i = i_0, \quad \Omega = \Omega_0, \quad \omega = \omega_0,$$

$$\lambda = \lambda_0 + n_0 t_1 \left(1 + \frac{2\mathfrak{N}l}{\mathfrak{K}^2} \right) \ln \left(1 + \frac{t}{t_1} \right) \quad \text{при} \quad t_1 = \frac{\mathfrak{K}^2}{3\mathfrak{Z}n_0},$$

где средняя долгота $\lambda = \Omega + \omega + M$. Это решение справедливо и в системе отсчета \mathbb{O}_1 при замене $\mathfrak{Z} \rightarrow T, \mathfrak{N}l \rightarrow -S$.

3. МОДЕЛЬ УСКОРЕНИЯ ЯРКОВСКОГО

В рамках линейной теплофизической модели ускорения Ярковского для сферических астероидов [17] радиальный, трансверсальный и бинормальный компоненты этого ускорения в системе отсчета \mathbb{O}_1 имеют вид [18, Ф-лы (12)]:

$$P_r' = \frac{P_r}{r^2} = \frac{4\alpha\Phi}{9(1+\chi)} \{ E_{R_s'} \sin(\delta_{R_s'} + \lambda) \sin \lambda \sin^2 \gamma + E_{R_d'} \cos \delta_{R_d'} [\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda \cos^2 \gamma] \},$$

$$P_t' = \frac{P_t}{r^2} = \frac{4\alpha\Phi}{9(1+\chi)} \{ E_{R_s'} \sin(\delta_{R_s'} + \lambda) \cos \lambda \sin^2 \gamma - E_{R_d'} [\cos \delta_{R_d'} \sin \lambda \cos \lambda \sin^2 \gamma + \sin \delta_{R_d'} \cos \gamma] \}, \quad (5)$$

$$P_n' = \frac{P_n}{r^2} = \frac{4\alpha\Phi}{9(1+\chi)} \{ E_{R_s'} \sin(\delta_{R_s'} + \lambda) \sin \gamma \cos \gamma - E_{R_d'} [\cos \delta_{R_d'} \sin \lambda \sin \gamma \cos \gamma - \sin \delta_{R_d'} \cos \lambda \sin \gamma] \},$$

где индекс s соответствует сезонному эффекту Ярковского, d – суточному. В (5) γ – наклон оси вращения астероида относительно нормали к плоскости его орбиты, $\lambda = \omega_{\text{rev}}(t - t_0)$ – средняя долгота, ω_{rev} – среднее движение, t – время, t_0 – момент начала отсчета времени, $\alpha = 1 - A$ – коэффициент оптического поглощения, A – альбедо Бонда,

$$\Phi = \frac{\mathfrak{E}_* \pi R^2}{mc}, \quad \chi = \frac{\Theta_s}{\sqrt{2R_s'}}, \quad \Theta_s = \frac{\Gamma \sqrt{\omega_{\text{rev}}}}{\epsilon \sigma T_*^3},$$

$$\Gamma = \sqrt{K\rho C}, \quad T_* = \left(\frac{\alpha \mathfrak{E}_*}{\epsilon \sigma} \right)^{1/4},$$

Γ – тепловая инерция поверхности, T_* – температура подсолнечной точки, $\mathfrak{E}_* = L_\odot / (4\pi a^2)$ – поток излучения Солнца на гелиоцентрическом расстоянии a , $L_\odot = 3.86 \times 10^{26}$ Вт – светимость Солнца, $c = 299792458$ м/с – скорость света, $\sigma = 5.670374419 \times 10^{-8}$ Вт м⁻² К⁻⁴ – постоянная Стефана–Больцмана, $m, R, \rho, \epsilon, K, C$ – масса, радиус, объемная плотность, тепловая излучательная способность, теплопроводность и удель-

ная теплоемкость астероида соответственно. Далее,

$$R_s' = \frac{R}{l_s}, \quad l_s = \frac{\Gamma}{\rho C \sqrt{\omega_{\text{rev}}}}, \quad \omega_{\text{rev}} = \frac{2\pi}{P_{\text{rev}}},$$

$$R_d' = \frac{R}{l_d}, \quad l_d = l_s \sqrt{\frac{\omega_{\text{rev}}}{\omega_{\text{rot}}}}, \quad \omega_{\text{rot}} = \frac{2\pi}{P_{\text{rot}}},$$

где P_{rev} – период обращения астероида вокруг Солнца, P_{rot} – период его вращения вокруг оси. Кроме того, в (5) амплитуда $E_{R'} = E(\sqrt{2R'})$ и фаза $\delta_{R'} = \delta(\sqrt{2R'})$ определены, как и в [17], соотношениями

$$E_{R'} \exp(i\delta_{R'}) = \frac{A(x) + iB(x)}{C(x) + iD(x)},$$

$$E_{R'} \exp(-i\delta_{R'}) = \frac{A(x) - iB(x)}{C(x) - iD(x)}, \quad (6)$$

где $i = \sqrt{-1}$, $x = \sqrt{2R'}$ и вспомогательные функции

$$A(x) = -(x+2) - e^x [(x-2)\cos x - x\sin x],$$

$$B(x) = -x - e^x [x\cos x + (x-2)\sin x],$$

$$C(x) = A(x) + \frac{\chi}{1+\chi} (3(x+2) + e^x [3(x-2)\cos x + x(x-3)\sin x]),$$

$$D(x) = B(x) + \frac{\chi}{1+\chi} (x(x+3) - e^x [x(x-3)\cos x - 3(x-2)\sin x]).$$

С учетом (6) получим

$$E_{R'} \cos \delta_{R'} = \frac{A(x)C(x) + B(x)D(x)}{C(x)^2 + D(x)^2},$$

$$E_{R'} \sin \delta_{R'} = \frac{B(x)C(x) - A(x)D(x)}{C(x)^2 + D(x)^2}. \quad (7)$$

Линейная теплофизическая модель [17] разработана в рамках упрощающих предположений: круговая орбита вокруг Солнца и сферическая форма астероида. Для эллиптической орбиты коэффициент Φ будет зависеть от гелиоцентрического расстояния r как $\Phi = (\Phi_0 r_0^2) / r^2$, где $r_0 = 1$ а.е., Φ_0 – это Φ , вычисленное для расстояния 1 а.е. Эта обратная пропорциональность квадрату расстояния уже заложена в наши уравнения движения (2), (3) согласно поставленной во Введении задаче. Далее, заменим среднюю долготу λ , описывающую положение тела на орбите, на среднюю аномалию M и проведем осреднение по средней аномалии за орбитальный период выражений для тангенциального $P_{\mathfrak{Z}}$ и нор-

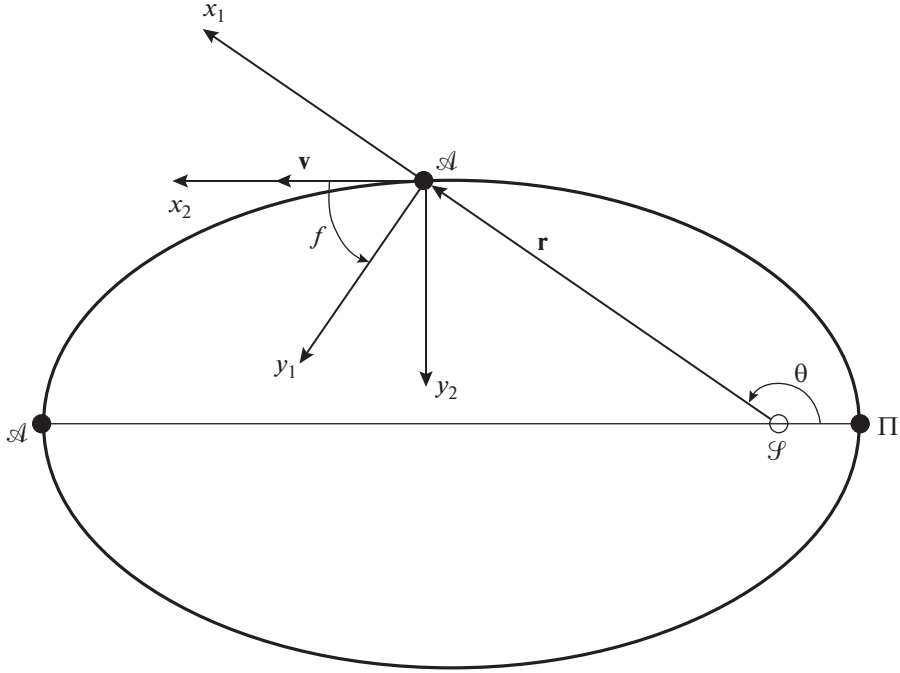


Рис. 1. Угол поворота f вектора скорости \mathbf{v} до совмещения с трансверсалью. Оси системы \mathbb{O}_1 – радиальная x_1 и трансверсальная y_1 . Оси системы \mathbb{O}_2 – тангенциальная x_2 и нормальная y_2 . Бинормальные оси z_1, z_2 направлены на нас, ортогонально к орбитальной плоскости. Угол θ – истинная аномалия.

мального $P_{\text{н}}$ компонентов вектора \mathbf{P} , при этом учтем, что

$$\begin{aligned} P_{\text{т}} &= P_r \sin f + P_t \cos f, \\ P_{\text{н}} &= -P_r \cos f + P_t \sin f, \end{aligned} \quad (8)$$

где P_r, P_t – радиальная и трансверсальная составляющие вектора \mathbf{P} , f – угол, на который надо повернуть вектор скорости до совмещения с трансверсалью (рис. 1),

$$\cos f = \frac{\eta}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 E}}, \quad \sin f = \frac{e \sin E}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 E}}, \quad (9)$$

E – эксцентриская аномалия, $M = E - e \sin E$.

При осреднении мы предположим, что ориентация оси вращения астероида и периоды $P_{\text{rev}}, P_{\text{rot}}$ не изменяются со временем.

Учитывая в (5), что $\Phi = (\Phi_0 r_0^2)/r^2$, запишем выражения для P_r и P_t в виде:

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{2\alpha\Phi_0 r_0^2}{9(1+\chi)} \{E_{R_s} \sin^2 \gamma [\sin \delta_{R_s} \sin 2M + \\ &\quad + \cos \delta_{R_s} (1 - \cos 2M)] + \\ &\quad + E_{R_d} \cos \delta_{R_d} [1 + \cos 2M + (1 - \cos 2M) \cos^2 \gamma]\}, \\ P_t &= \frac{2\alpha\Phi_0 r_0^2}{9(1+\chi)} \{E_{R_s} \sin^2 \gamma [\sin \delta_{R_s} (1 + \cos 2M) + \end{aligned} \quad (10)$$

$$+ \cos \delta_{R_s} \sin 2M] -$$

$$- E_{R_d} [\cos \delta_{R_d} \sin 2M \sin^2 \gamma + 2 \sin \delta_{R_d} \cos \gamma]\}.$$

Подставим (10) в (8) и приведем подобные слагаемые:

$$\begin{aligned} P_{\text{т}} &= \frac{2\alpha\Phi_0 r_0^2}{9(1+\chi)} \{E_{R_s} \sin^2 \gamma [\sin \delta_{R_s} (\cos f + \\ &\quad + \cos 2M \cos f + \sin 2M \sin f) + \\ &\quad + \cos \delta_{R_s} (\sin f - \cos 2M \sin f + \\ &\quad + \sin 2M \cos f)] + \\ &\quad + E_{R_d} [\cos \delta_{R_d} ([1 + \cos^2 \gamma] \sin f + \\ &\quad + \sin^2 \gamma [\cos 2M \sin f - \sin 2M \cos f]) - \\ &\quad - 2 \sin \delta_{R_d} \cos \gamma \cos f]\}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} P_{\text{н}} &= \frac{2\alpha\Phi_0 r_0^2}{9(1+\chi)} \{E_{R_s} \sin^2 \gamma [\sin \delta_{R_s} (\cos 2M \sin f - \\ &\quad - \sin 2M \cos f + \sin f) + \\ &\quad + \cos \delta_{R_s} (\sin 2M \sin f + \cos 2M \cos f - \\ &\quad - \cos f)] - E_{R_d} [\cos \delta_{R_d} ([1 + \cos^2 \gamma] \cos f + \end{aligned} \quad (12)$$

$$+ \sin^2 \gamma [\cos 2M \cos f + \sin 2M \sin f] + 2 \sin \delta_{R_d} \cos \gamma \sin f \}.$$

Проведем осредняющую процедуру выражений (11), (12):

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{Z}} &= \bar{P}_{\mathfrak{Z}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{\mathfrak{Z}}(M) dM = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{\mathfrak{Z}}(E) (1 - e \cos E) dE, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{N}} &= \bar{P}_{\mathfrak{N}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{\mathfrak{N}}(M) dM = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{\mathfrak{N}}(E) (1 - e \cos E) dE, \end{aligned}$$

и, учитывая результаты, приведенные в Приложении А (ф-лы (A14)), получим тангенциальный и нормальный параметры:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z} &= \frac{2\alpha\Phi_0 r_0^2}{9\pi(1+\chi)} \left\{ E_{R_s} \sin \delta_{R_s} \sin^2 \gamma (2\eta \mathbf{K}(e) - \right. \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} g_{1k} e^{2k} [2e^2(I_{k+1} - I_{k+2}) + \eta(2I_{k+1} - I_k)] + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k} e^{2k+2} (2I_{k+2} - I_{k+1} + 2\eta(I_{k+2} - I_{k+1})) \left. \right) - \\ &- 4\eta \mathbf{K}(e) E_{R_d} \sin \delta_{R_d} \cos \gamma \left. \right\}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} &= \frac{2\alpha\Phi_0 r_0^2}{9\pi(1+\chi)} \left\{ E_{R_s} \cos \delta_{R_s} \sin^2 \gamma \left(-2\eta \mathbf{K}(e) + \right. \right. \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} g_{1k} e^{2k} [\eta(I_k - 2I_{k+1}) - 2e^2(I_{k+1} - I_{k+2})] - \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k} e^{2k+2} [I_{k+1} - 2I_{k+2} + 2\eta(I_{k+1} - I_{k+2})] \left. \right) - \\ &- E_{R_d} \cos \delta_{R_d} \left[2\eta \mathbf{K}(e) (1 + \cos^2 \gamma) + \right. \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &+ \sin^2 \gamma \sum_{k=0}^{\infty} g_{1k} e^{2k} [\eta(I_k - 2I_{k+1}) - 2e^2(I_{k+1} - I_{k+2})] - \\ &- \sin^2 \gamma \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k} e^{2k+2} [2\eta(I_{k+1} - I_{k+2}) + I_{k+1} - 2I_{k+2}] \left. \right\}, \end{aligned}$$

где $E_{R_s} \cos \delta_{R_s}$, $E_{R_s} \sin \delta_{R_s}$ определены формулами (7), I_k выражены рекуррентной формулой:

$$I_k = \begin{cases} 2\mathbf{K}(e) & \text{при } k = 0, \\ \frac{2}{e^2} [\mathbf{E}(e) - \eta^2 \mathbf{K}(e)] & \text{при } k = 1, \\ \frac{(2e^2 - 1)(2k - 2)}{e^2(2k - 1)} I_{k-1} + \frac{(1 - e^2)(2k - 3)}{e^2(2k - 1)} I_{k-2} & \\ \text{при } k > 1, \end{cases}$$

коэффициенты g_{1k} , g_{2k} даны в Приложении А (ф-лы (A7)), их значения при $k = 0-15$ приведены в таблице 4 Приложения А.

Выражения для радиального, трансверсально-го и бинормального параметров получены в статье [16]. Запишем их в виде:

$$\begin{aligned} S &= \frac{2\alpha\Phi_0 r_0^2}{9(1+\chi)} \{ E_{R_s} \cos \delta_{R_s} \sin^2 \gamma + \\ &+ E_{R_d} \cos \delta_{R_d} (1 + \cos^2 \gamma) \}, \\ T &= \frac{2\alpha\Phi_0 r_0^2}{9(1+\chi)} \{ E_{R_s} \sin \delta_{R_s} \sin^2 \gamma - \\ &- 2E_{R_d} \sin \delta_{R_d} \cos \gamma \}, \quad W = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Сравнивая (13), (14) с (15), увидим, что тангенциальный и нормальный параметры отличаются от трансверсального и радиального умножением суточного и сезонного компонентов на коэффициенты, зависящие от эксцентриситета. Учитывая выражение (A15) в Приложении, при $e = 0$ получим $-\mathfrak{N} = S$, $\mathfrak{Z} = T$, т.е. для круговых орбит триэдр (S, T, W) совпадает с триэдром $(-\mathfrak{N}, \mathfrak{Z}, W)$, как и должно быть. При $e = 1$ эллиптическая орбита вырождается в прямолинейное движение и процедура осреднения за орбитальный период теряет смысл, поэтому формулы (13)–(15) неприменимы при $e = 1$.

Замечание 1. Радиальный S , трансверсальный T и бинормальный W параметры являются аналогами негравитационных параметров A_1 , A_2 и A_3 [20]. Они связаны соотношениями $A_1 = S/r_0^2$, $A_2 = T/r_0^2$, $A_3 = W/r_0^2$, где $r_0 = 1$ а.е.

Замечание 2. Выражения (13)–(15) позволяют оценить величину эффекта Ярковского, но требуют знания таких характеристик тела, как диаметр, объемная плотность, скорость вращения, наклон оси вращения к плоскости орбиты, альbedo Бонда, тепловая инерция поверхности, удельная теплоемкость, тепловая излучательная способность.

4. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ МОДЕЛЬНЫХ АСТЕРОИДОВ

Рассмотрим модельные объекты с различными эксцентриситетами орбит от 0 до 0.99, при этом все остальные орбитальные и теплофизические харак-

Таблица 1. Элементы орбиты, теплофизические характеристики и параметры вращения астероида 101955 Bennu

Параметр	Значение	Ссылка
Большая полуось a_0 , а.е.	1.126391025894812	[20]
Среднее движение n_0 , °/сут	0.8244613503320309	[20]
Наклон i_0 , °	6.03494377024794	[20]
Долгота восходящего узла Ω_0 , °	2.06086619569642	[20]
Аргумент перицентра ω_0 , °	66.22306084084298	[20]
Средняя аномалия M_0 , °	101.703952002457	[20]
Период обращения вокруг Солнца P_{rev} , сут	436.6487281120201	[20]
Период обращения вокруг Солнца P_{rev} , годы	1.195479063961725	[20]
Тепловая инерция Γ , Дж·м ⁻² с ^{-1/2} К ⁻¹	300	[12]
Удельная теплоемкость C , Дж·кг ⁻¹ К ⁻¹	750	[9]
Тепловая излучательная способность ϵ	0.95	[12]
Радиус R , м	242.22	[12]
Период вращения вокруг оси P_{rot} , час	4.2960015	[12]
Объемная плотность ρ , кг·м ⁻³	1194	[12]
Альbedo Бонда A	0.0170	[22]
Прямое восхождение полюса α , °	85.45218	[12]
Склонение полюса δ , °	-60.36780	[12]
Наклон оси вращения γ , °	177.53514	

Примечание. Как и в [12], мы предполагаем удельную теплоемкость $C = 750$ Дж·кг⁻¹ К⁻¹, основанную на измерениях метеоритов класса CM (углеродистые хондриты) [9]. γ вычислено по экваториальным координатам полюса в соответствии с методикой, приведенной в [23]. Эпоха элементов орбиты 2455562.5 (2011–Jan–01.0) TDB (дата обращения к базе данных JPL 03.02.2022).

теристикам соответствуют астероиду 101955 Bennu (табл. 1). Найдем для них средние по орбите значения компонентов вектора \mathbf{P} , дрейфы элементов и смещение относительно невозмущенного положения в двух системах отсчета. Отметим дрейфы элементов и смещение нижним индексом “1”, если они определены в системе отсчета \mathcal{O}_1 , и “2” в системе \mathcal{O}_2 .

Для сравнения также вычислим дрейф средней аномалии и смещение по оценочным формулам, приведенным в [21]:

$$\Delta M \simeq 0.01'' \dot{a}_4 (\Delta_{10} t)^2 a_{AU}^{-5/2}, \quad (16)$$

$$\Delta \rho \simeq 7 \dot{a}_4 (\Delta_{10} t)^2 a_{AU}^{-3/2} \text{ км}, \quad (17)$$

где ΔM – изменение средней аномалии в угловых секундах; $\Delta \rho$ – смещение в километрах; \dot{a}_4 – дрейф большой полуоси за счет эффекта Ярковского в единицах 10^{-4} а.е./млн. лет (значения приведены в 8-м столбце табл. 2); $\Delta_{10} t = 119.5479063961725$ – период времени, за который производится оценка, в десятках лет; a_{AU} – большая полуось в астрономических единицах (табл. 1). Оценки (16), (17)

получены в системе отсчета \mathcal{O}_1 , пренебрегая членами четвертого порядка по эксцентриситету.

В табл. 2 приведены тангенциальный \mathfrak{T} и нормальный \mathfrak{N} параметры для различных значений начального эксцентриситета e_0 . Согласно (15) радиальный S и трансверсальный T параметры не зависят от эксцентриситета, $S = 9.91079 \times 10^{-14}$ а.е.³/сут², $T = -5.10168 \times 10^{-14}$ а.е.³/сут² для всех e_0 . На рис. 2 показано отличие T от \mathfrak{T} в процентном соотношении при $e_0 > 0.7$: при $e_0 \in (0.7, 0.9)$ T превышает \mathfrak{T} на величину от 19 до 58%, а в интервале $e_0 \in (0.9, 0.99)$ это отличие составляет от 58 до 230%. Аналогично поведение отличия S от \mathfrak{N} .

Используя значения компонентов ускорения и формулы (2), (3), найдем изменения средней аномалии dM_1 , dM_2 и большой полуоси da_1 , da_2 за 1000 оборотов вокруг Солнца (≈ 1195.48 лет) при различных начальных эксцентриситетах e_0 (см. табл. 2). Отличие dM_1 от dM_2 и da_1 от da_2 менее 1% при малых эксцентриситетах (до 0.5). При e_0 от 0.5 до 0.7 их отличие не превышает 6%, постепен-

Таблица 2. Тангенциальный \mathfrak{T} и нормальный \mathfrak{N} параметры, изменения средней аномалии dM_1, dM_2 и большой полуоси da_1, da_2 за 1000 оборотов вокруг Солнца (≈ 1195.48 лет) в зависимости от начального эксцентриситета e_0

e_0	$\mathfrak{T}, 10^{-14}$ а.е. ³ /сут ²	$\mathfrak{N}, 10^{-14}$ а.е. ³ /сут ²	$dM_1, '$	$dM_2, '$	$da_1, 10^{-4}$ а.е.	$da_2, 10^{-4}$ а.е.	$\dot{a}_4, 10^{-4}$ а.е./млн лет	$\Delta M, '$
0	-5.10168	-9.91079	35.083	35.083	-0.0244	-0.0244	-20.4226	36.126
0.001	-5.10168	-9.91079	35.083	35.091	-0.0244	-0.0244	-20.4226	36.126
0.01	-5.10155	-9.91054	35.086	35.094	-0.0244	-0.0244	-20.4246	36.130
0.05	-5.09849	-9.90457	35.169	35.179	-0.0245	-0.0245	-20.4738	36.217
0.10	-5.08887	-9.88585	35.436	35.445	-0.0246	-0.0246	-20.6289	36.491
0.20	-5.04976	-9.80969	36.541	36.544	-0.0254	-0.0254	-21.2735	37.631
0.30	-4.98212	-9.67805	38.555	38.511	-0.0268	-0.0268	-22.4424	39.699
0.40	-4.88179	-9.48280	41.767	41.592	-0.0291	-0.0289	-24.3125	43.007
0.50	-4.74156	-9.20998	46.783	46.252	-0.0325	-0.0322	-27.2298	48.168
0.60	-4.54897	-8.83547	54.827	53.404	-0.0381	-0.0371	-31.9094	56.445
0.70	-4.28099	-8.31451	68.808	65.068	-0.0478	-0.0452	-40.0414	70.830
0.80	-3.88832	-7.55138	97.475	86.772	-0.0678	-0.0603	-56.7181	100.330
0.85	-3.60997	-7.01056	126.470	106.582	-0.0879	-0.0741	-73.5681	130.137
0.90	-3.22864	-6.26976	184.719	142.155	-0.1284	-0.0988	-107.4058	189.993
0.95	-2.62669	-5.10050	359.973	230.430	-0.2503	-0.1602	-209.0021	369.709
0.97	-2.23295	-4.33575	593.878	326.187	-0.4129	-0.2268	-344.0411	608.583
0.99	-1.53792	-2.98595	1763.840	673.643	-1.2263	-0.4684	-1008.9714	1784.796

Примечание. Для всех значений e_0 радиальный параметр $S = 9.91079 \times 10^{-14}$ а.е.³/сут², трансверсальный параметр $T = -5.10168 \times 10^{-14}$ а.е.³/сут². В 8 и 9 столбцах: \dot{a}_4 – дрейф большой полуоси; ΔM – изменение средней аномалии, вычисленное по формуле (16), за 1000 орбитальных оборотов.

но увеличиваясь с ростом e_0 . При $e_0 > 0.7$ эти отличия растут экспоненциально от 6 до 160%. В последнем столбце табл. 2 приведено изменение средней аномалии, вычисленное по формуле (16). Сравнение столбцов dM_1 и ΔM дает хорошее согласие этих величин (расхождение не превышает 3%).

По известным формулам небесной механики [24] определим смещение d малого тела относительно невозмущенного положения, которое произойдет за счет эффекта Ярковского. Для этого вычислим прямоугольные координаты тела по невозмущенным и возмущенным элементам орбиты, а затем найдем расстояние между этими положениями. В табл. 3 приведены значения смещений d_1, d_2 за 1000 орбитальных оборотов (≈ 1195.48 лет) при различных e_0 , а на рис. 3 показано отличие d_1 от d_2 в процентном соотношении при $e_0 > 0.7$. При увеличении начального эксцентриситета от 0.7 до 0.9 превышение смещения d_1 над d_2 изменяется от 6 до 30%, а при e_0 от 0.9 до 0.99 отличие составляет от 30 до 127%.

При вычислении смещения d_2 учтено также изменение аргумента перицентра $d\omega_2$, но за рассматриваемый период времени оно невелико, менее угловой секунды, и мало зависит от эксцентриситета орбиты. Также малы изменения эксцентриситета de_1, de_2 . Если их не учитывать, то смещения d_1, d_2 изменятся не более, чем на 0.01%. В табл. 3 приведены разности $d_1 - d'_1, d_2 - d'_2$, где d'_1, d'_2 – смещения, вычисленные без учета de_1, de_2 . Если же не учитывать также и изменение средней аномалии, то за счет только изменения большой полуоси смещение относительно невозмущенного положения будет незначительным (столбцы d''_1, d''_2 в табл. 3). Также для сравнения в пятом столбце табл. 3 приведено смещение Δp , вычисленное по формуле (17). При $e_0 > 0.7$ оценка Δp превышает d_1 в 1.65–3.2 раза, а d_2 в 1.75–7.3 раза, что говорит о том, что оценка смещения, вычисленная по формуле (17), может быть значительно завышена. Это, возможно, объясняет низкое обнаружение эффекта Ярковского непосредственно из астрометрических наблюдений: в базе ма-

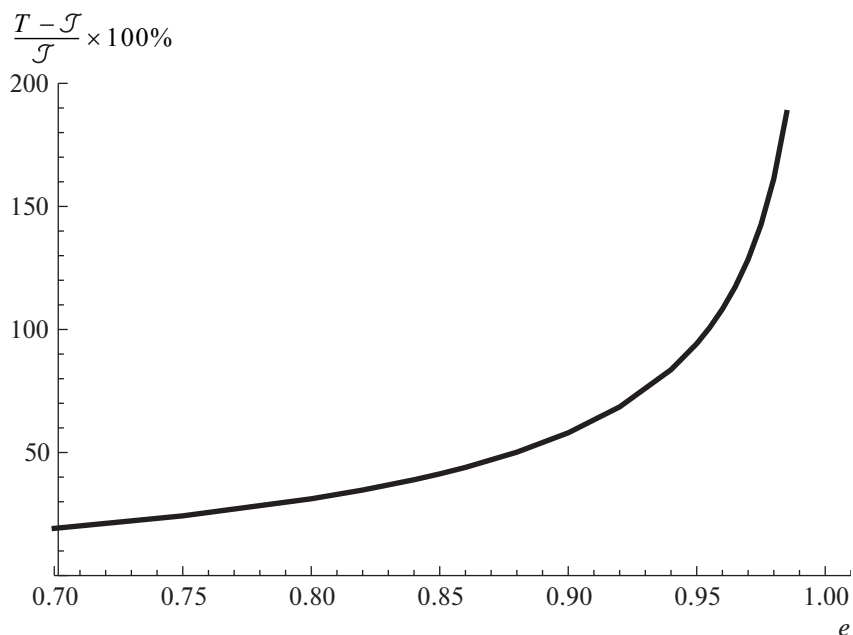


Рис. 2. Отличие трансверсального T параметра от тангенциального \bar{T} в процентном соотношении при $e_0 > 0.7$.

лых тел JPL среди АСЗ диаметром менее 5 км параметр A_2 определен у 45 из 588 объектов с эксцентриситетами орбит до 0.5, и лишь у 18 из

640 объектов с $e > 0.5$, хотя оценочное значение смещения при таких эксцентриситетах больше при прочих равных условиях.

Таблица 3. Смещения d_1 , d_2 малого тела относительно невозмущенного положения за 1000 орбитальных оборотов (≈ 1195.48 лет) в зависимости от начального эксцентриситета e_0

e_0	d_1 , млн км	$d_1 - d_1'$, км	d_1'' , км	$\Delta\rho$, млн км	d_2 , млн км	$d_2 - d_2'$, км	d_2'' , км
0	1.71966	0.	365.075	1.70907	1.71966	0.	365.075
0.001	1.71928	0.178	365.149	1.70907	1.71930	0.357	365.149
0.01	1.71604	1.781	365.887	1.70924	1.71609	3.561	365.887
0.05	1.70196	8.824	370.565	1.71335	1.70209	17.632	370.564
0.10	1.68551	17.446	379.653	1.72633	1.68555	34.760	379.647
0.20	1.65829	34.101	409.154	1.78028	1.65802	67.165	409.049
0.30	1.64528	50.193	455.852	1.87809	1.64295	96.892	455.244
0.40	1.65490	66.235	524.900	2.03460	1.64752	124.061	522.577
0.50	1.70106	83.050	626.827	2.27873	1.68132	149.033	619.599
0.60	1.80741	101.888	783.857	2.67034	1.76016	172.153	763.404
0.70	2.02727	124.791	1048.942	3.35087	1.91706	193.350	991.838
0.80	2.51687	155.639	1582.061	4.74646	2.24191	210.957	1408.131
0.85	3.02407	176.492	2116.054	6.15655	2.55239	216.375	1783.212
0.90	4.04230	203.772	3184.583	8.98827	3.12305	215.809	2450.715
0.95	7.02744	242.184	6390.858	17.49037	4.56189	198.477	4090.901
0.97	10.80306	261.979	10666.079	28.79112	6.12077	177.893	5858.310
0.99	26.24914	269.915	32042.028	84.43589	11.55552	127.993	12238.077

Примечание. d_1' , d_2' – смещения, вычисленные без учета дрейфа эксцентриситета; d_1'' , d_2'' – смещения, вычисленные без учета дрейфов эксцентриситета и средней аномалии; $\Delta\rho$ – смещение, вычисленное по формуле (17).

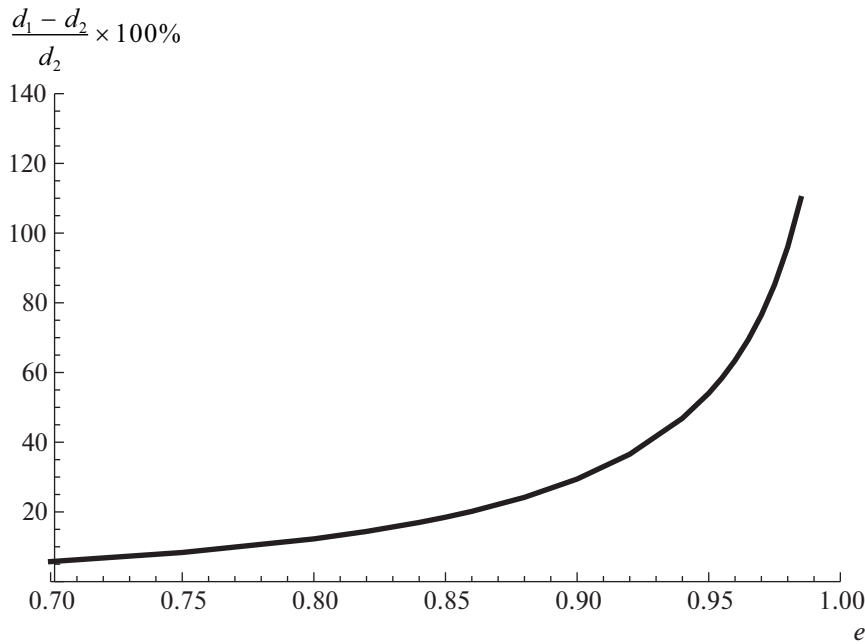


Рис. 3. Отличие смещения d_1 от смещения d_2 в процентном соотношении при $e_0 > 0.7$.

В системе \mathcal{O}_2 параметры \mathfrak{T} и \mathfrak{N} постепенно уменьшаются с ростом e_0 , но несмотря на это уменьшение дрейфы элементов и смещение относительно невозмущенного положения увеличиваются. В системе \mathcal{O}_1 рост дрейфов элементов и смещения с ростом e_0 значительно больше, чем в \mathcal{O}_2 , при одинаковых T и S для всех e_0 . Таким образом, при моделировании эффекта Ярковского радиальным и трансверсальным ускорением оценки дрейфов элементов и смещения относительно невозмущенного положения для объектов с высокоэллиптическими орбитами могут оказаться завышенными. Для таких объектов необходима разработка специальных методов учета эффекта Ярковского.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выведены выражения для средних за орбитальный период значений тангенциального и нормального компонентов ускорения Ярковского на основе параметров вращения и теплофизических характеристик астероида в рамках линейной теплофизической модели силы Ярковского для сферических астероидов. При $e \rightarrow 0$ $\mathfrak{T} \rightarrow T$, $\mathfrak{N} \rightarrow -S$, как и должно быть. Для эллиптической орбиты тангенциальный и нормальный параметры по абсолютной величине всегда меньше, чем трансверсальный и радиальный, и их отличие растет с ростом эксцентриситеты орбиты. Дрейфы большой полуоси и средней аномалии, а так-

же смещения относительно невозмущенного положения, вычисленные для двух орбитальных систем отсчета, при малых эксцентриситетах ($e_0 < 0.5$) почти одинаковые. При $e_0 > 0.5$ величины, найденные в системе \mathcal{O}_1 , всегда больше тех же величин в системе \mathcal{O}_2 . При e_0 от 0.5 до 0.7 отличие умеренное (<6%), но постепенно увеличивается, а при $e > 0.7$ наблюдается экспоненциальный рост отличия дрейфов и смещения. Таким образом, при моделировании эффекта Ярковского радиальным и трансверсальным ускорением оценки дрейфов элементов и смещения относительно невозмущенного положения для объектов с высокоэллиптическими орбитами могут оказаться завышенными. Для таких объектов необходима разработка специальных методов учета эффекта Ярковского.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЙ АНОМАЛИИ

В основной части статьи встречаются средние значения функций $\sin f$, $\cos f$, $\sin 2M \sin f$, $\sin 2M \cos f$, $\cos 2M \sin f$, $\cos 2M \cos f$. Все они могут быть выражены явно как аналитические 2π -периодические функции эксцентрисической аномалии, зависящие от параметра e , $0 \leq e < 1$.

Функции $\sin f$, $\sin 2M \cos f$, $\cos 2M \sin f$ являются нечетными по E , так как, согласно (9),

$$\begin{aligned}\sin f &= \frac{e \sin E}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 E}} = -\frac{e \sin(-E)}{\sqrt{1-e^2 \cos^2(-E)}}, \\ \sin 2M &= \sin[2(E - e \sin E)] = \\ &= -\sin[2(-E - e \sin(-E))].\end{aligned}$$

Среднее значение нечетной функции равно нулю [24]. Поэтому ограничимся четными функциями, для которых среднее значение равно

$$\mathcal{E}w = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi w dM = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi w(1 - e \cos E) dE. \quad (\text{A1})$$

Полезными могут оказаться свойства:

$$\int_0^\pi w(\cos x) dx = 0, \quad (\text{A2})$$

если $w(\cos x) = -w(-\cos x)$,

$$\int_0^\pi w(\cos x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} w(\cos x) dx, \quad (\text{A3})$$

если $w(\cos x) = w(-\cos x)$.

Найдем средние значения нужных нам функций. С учетом (9), (A1), (A2), (A3) и (4)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos f dM &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\eta}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 E}} dE - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{e\eta \cos E}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 E}} dE &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\eta}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 E}} dE = (\text{A4}) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi \frac{\eta}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} dx = \frac{2\eta}{\pi} \mathbf{K}(e),\end{aligned}$$

где новая переменная $x = E + \frac{\pi}{2}$. Выразим $\cos 2M$ и $\sin 2M$ через x и представим в виде:

$$\begin{aligned}\cos 2M &= \cos[2(E - e \sin E)] = \\ &= -\cos(2x + 2e \cos x) = \\ &= -\cos 2x \sum_{k=0}^{\infty} g_{1k} e^{2k} \cos^{2k} x + \\ &+ \sin 2x \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k} e^{2k+1} \cos^{2k+1} x,\end{aligned} \quad (\text{A5})$$

$$\begin{aligned}\sin 2M &= \sin[2(E - e \sin E)] = \\ &= -\sin(2x + 2e \cos x) = \\ &= -\sin 2x \sum_{k=0}^{\infty} g_{1k} e^{2k} \cos^{2k} x - \\ &- \cos 2x \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k} e^{2k+1} \cos^{2k+1} x,\end{aligned} \quad (\text{A6})$$

где

$$g_{1k} = (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}, \quad g_{2k} = (-1)^k \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (\text{A7})$$

Разложения (A5), (A6) получены с помощью стандартных формул сложения углов и разложения тригонометрических функций в степенные ряды [19]. Значения коэффициентов g_{1k} , g_{2k} при $k = 0-15$ приведены в табл. 4 в виде рациональных и десятичных дробей, что позволит судить об их поведении. В (A5), (A6) у знаков суммы указан бесконечный верхний предел, но так как с ростом k величины коэффициентов быстро уменьшаются, на практике достаточно использовать 15–20 слагаемых. Разложения в ряд функций $\cos(2e \cos x)$ и $\sin(2e \cos x)$ сходятся при любых значениях $2e \cos x$: $-\infty < 2e \cos x < \infty$, следовательно, они сходятся и при всех $e \in [0, 1]$.

С учетом (9), (A1) и (A5), а также коммутативности операций интегрирования и суммирования найдем:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos 2M \cos f dM &= \\ &= -\frac{\eta}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} g_{1k} e^{2k} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\cos 2x \cos^{2k} x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} dx + \\ &+ \frac{\eta}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k} e^{2k+1} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\sin 2x \cos^{2k+1} x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} dx + \\ &+ \frac{\eta}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} g_{1k} e^{2k+1} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\sin x \cos 2x \cos^{2k} x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} dx - \\ &- \frac{\eta}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k} e^{2k+2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\sin x \sin 2x \cos^{2k+1} x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} dx.\end{aligned} \quad (\text{A8})$$

Обратным переходом к E легко показать, что в силу (A2) второе и третье слагаемое в выражении (A8) равны нулю. После небольших тригонометрических преобразований приведем (A8) к виду:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos 2M \cos f dM &= \\ &= \frac{\eta}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} g_{1k} e^{2k} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\cos^{2k} x - 2 \cos^{2k+2} x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} dx - \\ &- \frac{2\eta}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k} e^{2k+2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\cos^{2k+2} x - \cos^{2k+4} x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} dx.\end{aligned} \quad (\text{A9})$$

Таблица 4. Значения g_{1k} , g_{2k} в виде рациональных (вверху) и десятичных (внизу) дробей

k	g_{1k}	g_{2k}	k	g_{1k}	g_{2k}
0	1	2	8	$\frac{2}{638512875}$	$\frac{4}{10854718875}$
	1.0	2.0		3.13×10^{-9}	3.69×10^{-10}
1	-2	$-\frac{4}{3}$	9	$-\frac{4}{97692469875}$	$-\frac{8}{1856156927625}$
	-2.0	-1.3333		-4.09×10^{-11}	-4.31×10^{-12}
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	10	$\frac{4}{9280784638125}$	$\frac{8}{194896477400625}$
	0.6667	0.2667		4.31×10^{-13}	4.10×10^{-14}
3	$-\frac{4}{45}$	$-\frac{8}{315}$	11	$-\frac{8}{2143861251406875}$	$-\frac{16}{49308808782358125}$
	-0.0889	-0.0254		-3.73×10^{-15}	-3.24×10^{-16}
4	$\frac{2}{315}$	$\frac{4}{2835}$	12	$\frac{4}{147926426347074375}$	$\frac{8}{3698160658676859375}$
	0.0063	0.0014		2.70×10^{-17}	2.16×10^{-18}
5	$-\frac{4}{14175}$	$-\frac{8}{155925}$	13	$-\frac{8}{48076088562799171875}$	$-\frac{16}{1298054391195577640625}$
	-2.82×10^{-4}	-5.13×10^{-5}		-1.66×10^{-19}	-1.23×10^{-20}
6	$\frac{4}{467775}$	$\frac{8}{6081075}$	14	$\frac{8}{9086380738369043484375}$	$\frac{16}{263505041412702261046875}$
	8.55×10^{-6}	1.32×10^{-6}		8.80×10^{-22}	6.07×10^{-23}
7	$-\frac{8}{42567525}$	$-\frac{16}{638512875}$	15	$-\frac{16}{3952575621190533915703125}$	$-\frac{32}{122529844256906551386796875}$
	-1.88×10^{-7}	-2.51×10^{-8}		-4.05×10^{-24}	-2.61×10^{-25}

Аналогичным образом получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2M \sin fdM = \\ & = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} g_{1k} e^{2k+1} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\sin 2x \cos^{2k+1} x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} dx - \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} g_{1k} e^{2k+2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\sin x \sin 2x \cos^{2k+1} x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} dx + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k} e^{2k+2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\cos 2x \cos^{2k+2} x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} dx - \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k} e^{2k+3} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\sin x \cos 2x \cos^{2k+2} x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} dx, \end{aligned}$$

где первое и последнее слагаемые равны нулю. В результате

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2M \sin fdM = \\ & = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} g_{1k} e^{2k+2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{(\cos^{2k+2} x - \cos^{2k+4} x)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} dx - \quad (A10) \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k} e^{2k+2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{(\cos^{2k+2} x - 2 \cos^{2k+4} x)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} dx. \end{aligned}$$

Таким образом, определение необходимых средних значений сведено к интегралам вида

$$I_k = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\cos^{2k} x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} dx \quad \text{при } k \geq 0. \quad (A11)$$

В [19] дана формула:

$$\int \frac{\cos^n x}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} dx = \frac{\cos^{n-3} x}{(n-1)k^2} \sin x \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} + \frac{n-2}{n-1} \frac{2k^2-1}{k^2} \int \frac{\cos^{n-2} x}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} dx + \frac{n-3}{n-1} \frac{1-k^2}{k^2} \int \frac{\cos^{n-4} x}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} dx,$$

с помощью которой получим рекуррентное соотношение для вычисления (A11):

$$I_k = \frac{2k-2}{2k-1} \frac{2e^2-1}{e^2} I_{k-1} + \frac{2k-3}{2k-1} \frac{1-e^2}{e^2} I_{k-2}. \quad (\text{A12})$$

Первые члены последовательности I_k легко найти с помощью справочника [19]:

$$I_0 = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} = 2\mathbf{K}(e), \quad (\text{A13})$$

$$I_1 = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\cos^2 x dx}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} = \frac{2}{e^2} [\mathbf{E}(e) - \eta^2 \mathbf{K}(e)].$$

С учетом (A4), (A9), (A10) и (A11) запишем окончательные выражения для искомых средних значений:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos fdM = \frac{2\eta}{\pi} \mathbf{K}(e),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos 2M \cos fdM = \frac{\eta}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} g_{1k} e^{2k} (I_k - 2I_{k+1}) - \frac{2\eta}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k} e^{2k+2} (I_{k+1} - I_{k+2}), \quad (\text{A14})$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin 2M \sin fdM = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} g_{1k} e^{2k+2} (I_{k+1} - I_{k+2}) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k} e^{2k+2} (I_{k+1} - 2I_{k+2}).$$

Рассмотрим поведение интегралов (A14) при $e = 0$. Последние два выражения справа содержат неопределенность вида $0 : 0$ в силу (A12) и (A13). Поэтому положим $e = 0$ в исходных интегралах и вычислим их:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos fdM = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dE = 1,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos 2M \cos fdM = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos 2E dE = 0, \quad (\text{A15})$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin 2M \sin fdM = 0.$$

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена в рамках государственного задания “Исследование объектов околоземного космического пространства”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *D. Farnocchia, S. R. Chesley, D. Vokrouhlický, A. Milani, F. Spoto, and W. F. Bottke*, Icarus **224**, 1 (2013).
2. *C. Tardioli, D. Farnocchia, B. Rozitis, D. Cotto-Figueroa, S. R. Chesley, T. S. Statler, and M. Vasile*, Astron. and Astrophys. **608**, id. A61 (2017).
3. *A. Del Vigna, L. Faggioli, A. Milani, F. Spoto, D. Farnocchia, and B. Carry*, Astron. and Astrophys. **617**, id. A61 (2018).
4. *Т. Ю. Галушина, О. М. Сюсина*, Изв. Вузов. Физика **63** (3), 65 (2020).
5. *В. А. Шор, О. М. Кочетова, Л. Л. Соколов, Ю. А. Чернетенко*, В сб. *Астероидно-кометная опасность: вчера, сегодня, завтра. Глава 7*, под ред. Б. М. Шустова, Л. В. Рыхловой (М.: Физматлит, 2010).
6. *J. Āurech, M. Delbó, B. Carry, J. Hanuš, and V. Ali-Lagoa*, Astron. and Astrophys. **604**, id. A27 (2017).
7. *J. Āurech, D. Vokrouhlický, P. Pravec, J. Hanuš, et al.*, Astron. and Astrophys. **609**, id. A86 (2018).
8. *J. R. Masiero, C. Nugent, A. K. Mainzer, E. L. Wright, et al.*, Astron. J. **154**(4), 168 (2017).
9. *C. P. Opeil, D. T. Britt, R. J. Macke, G. J. Consolmagno*, Meteor. and Planet. Science **55** (8), id. E1 (2020).
10. *S. Tachibana, H. Sawada, R. Okazaki, Y. Takano, et al.*, Science, **375**(6584), 1011 (2022).
11. *D. S. Lauretta, A. E. Bartels, M. A. Barucci, E. B. Bierhaus, et al.*, Meteor. and Planet Science **50**, 834 (2015).
12. *M. G. Daly, O. S. Barnouin, J. A. Seabrook, J. Roberts, et al.*, Science Advances **6** (41), id. eabd3649 (2020).
13. *Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников*, Астрон. журн. **96**(5), 418 (2019).
14. *Т. Н. Санникова, К. В. Холшевников*, Астрон. журн. **97**(9), 747 (2020).
15. *Т. Н. Санникова*, Астрон. журн. **98**(12), 1030 (2021).
16. *Т. Н. Санникова*, Астрон. журн. **98**(4), 321 (2021).
17. *D. Vokrouhlický*, Astron. and Astrophys. **344**, 362 (1999).

18. *Y.-B. Xu, L.-Y. Zhou, C. Lhotka, and W.-H. Ip*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **493**(1), 1447 (2020).
19. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, *Таблицы интегралов, рядов и произведений*, под ред. А. Джеффри, Д. Цвиллингера, 7 изд-е., пер. с англ. под ред. В. В. Максимова (СПб.: БХВ-Петербург, 2011).
20. JPL Small-Body Database Search Engine, *Jet Propulsion Laboratory NASA*, https://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb_query.cgi.
21. *D. Vokrouhlický, A. Milani, and S. R. Chesley*, Icarus **148**, 118 (2000).
22. *C. W. Hergenrother, C. K. Maleszewski, M. C. Nolan, J.-Y. Li, et al.*, Nature Comm. **10**, 1291 (2019).
23. *C. Lhotka, J. Souchay, and A. Shahsavari*, Astron. and Astrophys. **556**, id. A8 (2013).
24. *К. В. Холшевников, В. Б. Тутов*, *Задача двух тел* (СПб.: изд. СПбГУ, 2007).