

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ ПО ГРАДИЕНТОМЕТРИЧЕСКИМ ИЗМЕРЕНИЯМ

© 2022 г. А. А. Ключков\*

*Институт астрономии РАН, Москва, Россия*

*\*E-mail: kaa5774@yandex.ru*

Поступила в редакцию 21.12.2021 г.

После доработки 21.04.2022 г.

Принята к публикации 16.05.2022 г.

В статье рассмотрены цели и задачи проекта GOCE, используемые измерительная информация и стратегия обработки данных при определении параметров гравитационного поля Земли, а также продукты, получаемые в результате математической обработки данных различного уровня. Кроме этого, рассмотрены системы координат и времени, используемые при обработке измерительной информации. Затем выполнен анализ уравнения поправок градиентометрических измерений, и приведен алгоритм вычисления коэффициентов и свободных членов уравнений поправок в случае использования прямого подхода при математической обработке измерительной информации с целью определения параметров гравитационного поля Земли.

*Ключевые слова:* гравитационное поле Земли, тензор гравитационного потенциала, система координат, градиентометр, математическая обработка измерений, метод наименьших квадратов

**DOI:** 10.31857/S0004629922080084

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Глубокое понимание процессов, происходящих в системе “Земля”, не может быть достигнуто без достаточно большого количества наблюдений параметров, характеризующих эти процессы. В последнее время значительный прогресс в этих исследованиях был достигнут благодаря комплексному подходу к изучению процессов в системе “Земля” с привлечением разнообразных данных, в том числе и данных о гравитационном поле Земли, полученных спутниковыми бортовыми сенсорными системами.

С началом космической эры определение параметров модели глобального гравитационного поля Земли стало одной из главных задач фундаментальной науки. Первый период определения параметров глобального гравитационного поля Земли, охватывающий около 40 лет, характеризуется комбинированием спутниковых наблюдений (оптических, лазерных, доплеровских) и наземных гравиметрических наблюдений. С 2000 г. началась новая эра в области изучения гравитационного поля Земли. Началом этой эры можно считать практическую реализацию проектов CHAMP, GRACE и GOCE. В результате практической реализации этих проектов пользователи получили глобальные высокоточные модели гравитационного поля Земли с высоким пространственным разрешением.

Отличительными особенностями этого периода изучения гравитационного поля Земли являются:

- 1) использование специализированных космических систем для определения параметров гравитационного поля Земли;
- 2) использование для определения параметров гравитационного поля Земли данных только бортовых сенсорных систем;
- 3) использование новых концепций наблюдений (градиентометр, межспутниковое слежение в вариантах “высокий – низкий” и “низкий – низкий”);
- 4) определение высокоточных орбит низкоорбитальных КА по наблюдениям навигационных КА ГНСС;
- 5) использование для определения параметров гравитационного поля Земли новых методов и подходов обработки измерений (метод баланса энергии, полуаналитический метод, time-wise и space-wise).

### 2. ЦЕЛИ ПРОЕКТА GOCE

Проект GOCE – первый спутниковый проект, направленный на изучение геодинамики Земли. Научными целями проекта в геодезической части являются:

1) создание высокоточной модели гравитационного поля Земли (1 см по высотам геоида и 1 мГал по гравитационным аномалиям) с высоким пространственным разрешением (100 км).

2) установление глобальной высокоточной системы высот для использования в качестве основы при исследовании эволюции ледяных полярных шапок и морской топографической поверхности.

Достижение этих уникальных требований поможет решению следующих междисциплинарных проблем:

1) новому пониманию физики внешних процессов, связанных с геодинамикой литосферы, мантии, реологии и процессов субдукции;

2) точной оценке морского геоида, необходимого для количественного определения в комбинации со спутниковой альтиметрией абсолютной циркуляции океана и перемещения океанических масс;

3) оценкам толщины полярных шапок посредством комбинирования данных о толщине слоя полярных льдов, определенных посредством методов космической гравиметрии, и данных, полученных из математической обработки спутниковых альтиметрических измерений.

Решение целевых задач проекта GOCE осуществляется на основе математической обработки измерительной информации следующих сенсорных систем, установленных на борту космического аппарата (КА):

**градиентометра**, измеряющего разности ускорений в трех пространственных направлениях между тест-массами ансамбля акселерометров;

**аппаратуры спутниковой навигации**, по измерениям которой определяется высокоточная орбита спутника GOCE;

**звездной камеры**, по измерениям которой определяется ориентация системы координат градиентометра относительно инерциальной системы координат.

Негравитационное ускорение КА, вызванное атмосферным торможением и световым давлением, одинаковым образом воздействует на все акселерометры и становится пренебрежимо малым при образовании разностей ускорений.

Определение параметров модели гравитационного поля Земли в проекте GOCE осуществляется на основе измерений разностей ускорений в трех пространственных направлениях между тест-массами ансамбля акселерометров.

### 2.1. Данные проекта GOCE

Информационной основой решения целевых задач проекта GOCE служат три основных уровня

данных [1]: данные уровня 0; данные уровня 1b; данные уровня 2.

**Данные уровня 0 (Level 0)** представляют собой “сырые” данные, полученные сенсорными системами. **Данные уровня 1b (Level 1b)** получают из данных уровня 0 путем конвертирования временных рядов данных уровня 0 в технические единицы данных уровня 1b. Они включают в себя:

1) гравитационные градиенты в системе координат градиентометра (GRF – Gradiometer Reference Frame);

2) матрицы преобразования систем координат;

3) линейные ускорения, угловые скорости и ускорения;

4) SST-измерения (в том числе файлы в RINEX формате);

5) орбитальные данные (положения, скорости на моменты времени).

**Данные уровня 2 (Level 2)** генерируются с использованием данных уровня 1b и включают в себя:

1) предварительно обработанные, внешне откалиброванные и скорректированные гравитационные градиенты в системе координат градиентометра (GRF) и в земной системе координат (TRF – Terrestrial Reference Frame);

2) “быстрые” (Rapid) и точные (PSO) орбиты;

3) коэффициенты сферических гармоник, ковариационную матрицу и определяемые величины (высоты геоида, гравитационные аномалии и отклонения отвесной линии), полученные из решения.

Для пользователей доступны данные уровня 1b и данные уровня 2.

При определении параметров гравитационного поля Земли по градиентометрическим измерениям использовались три подхода: direct (прямой), “time-wise” и “space-wise” [1].

**Прямой (direct) подход** определения параметров гравитационного поля Земли основывается на использовании орбитального динамического метода космической геодезии. Математическая обработка измерений по линии “спутник – спутник” и градиентометрических измерений выполняется отдельно; матрицы нормальных уравнений, составленные на их основе, комбинируются. Комбинированная система нормальных уравнений решается по методу наименьших квадратов относительно уточняемых коэффициентов сферических гармоник.

**Time-wise подход** основан на полуаналитическом методе анализа гравитационного поля Земли, разработанном N. Sneeuw. При его использовании градиенты и наблюдения по линии “спутник – спутник” в варианте “высокий – низкий”

представляются в виде временных рядов Фурье вдоль орбитальной дуги. Определение параметров гравитационного поля Земли выполняется на основе использования двумерного преобразования Фурье и метода наименьших квадратов.

При использовании **Space-wise подхода** коэффициенты сферических гармоник определяются по измерениям, которые трансформируются в регулярную сетку на отсчетной поверхности или в пространственную сетку. При этом коэффициенты сферических гармоник определяются на основе применения метода быстрой коллокации.

### 3. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОЕКТЕ GOCE

При математической обработке градиентометрических измерений используются следующие основные системы координат:

- инерциальная геоцентрическая система координат, в которой осуществляется определение орбиты спутника;
- земная геоцентрическая система координат, с которой связаны определяемые параметры модели гравитационного поля;
- локальная североориентированная система координат, в которой вычисляются компоненты тензора геопотенциала;
- система координат градиентометра, в которой выполняются измерения.

Определение параметров гравитационного поля Земли осуществляется с использованием данных уровня 2. При этом компоненты тензора градиента гравитационного потенциала относятся к системе координат градиентометра (GRF), а искомые параметры относятся к земной системе координат (EFRF). Поэтому для решения задачи определения искомых параметров необходимо выполнить преобразование тензора градиента гравитационного потенциала из одной системы в другую.

### 4. АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРЯМОГО (DIRECT) ПОДХОДА

При реализации первого варианта потребуется выполнять преобразование тензора градиента геопотенциала из GRF в EFRF [3]. Однако в этом случае возникает проблема, связанная с тем, что акселерометры имеют две сверхчувствительные и одну менее чувствительную оси, поэтому четыре компонента тензора гравитационного потенциала  $V_{XX}$ ,  $V_{YY}$ ,  $V_{ZZ}$  и  $V_{XZ}$  имеют высокую точность, а два компонента  $V_{XY}$  и  $V_{YZ}$  – меньшую точность. В этом случае прямое вращение тензора гравитационного градиента приведет к тому, что проециро-

вание наименее точных компонентов тензора градиента геопотенциала ( $V_{XY}$  и  $V_{YZ}$ ) приведет к погрешностям в тензоре градиента геопотенциала в Земной системе координат. Поэтому более целесообразно в качестве рабочей системы координат выбрать систему координат градиентометра (GRF).

Тогда уравнение поправок для градиентометрических измерений при определении параметров гравитационного поля Земли на основе использования прямого подхода может быть представлено следующим образом:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}_{\text{GRF}}^{\prime 0}}{\partial (\bar{\mathbf{C}}_{nm}, \bar{\mathbf{S}}_{nm})} (\Delta \bar{\mathbf{C}}_{nm}) - (\bar{\mathbf{V}}_{\text{GRF}}^{\prime} - \bar{\mathbf{V}}_{\text{GRF}}^{\prime 0}), \quad (1)$$

где  $\bar{\mathbf{v}}$  – вектор поправок к измеренным величинам;  $(\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{S}})_{nm}$  – коэффициенты сферических гармоник;  $\Delta(\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{S}})_{nm}$  – поправки к коэффициентам сферических гармоник;  $\bar{\mathbf{T}} = (\bar{\mathbf{V}}_{\text{GRF}}^{\prime} - \bar{\mathbf{V}}_{\text{GRF}}^{\prime 0})$  – свободный член уравнений поправок.

Теперь необходимо преобразовать коэффициенты системы уравнений (1) и тензор гравитационного потенциала, вычисленный по априорной модели гравитационного поля Земли  $\bar{\mathbf{V}}_{\text{EFRF}}^{\prime 0}$ , в систему координат GRF. Это преобразование осуществляется с использованием соотношений

$$\bar{\mathbf{V}}_{\text{GRF}}^{\prime 0} = (\mathbf{C}_{\text{GRF}}^i \cdot \mathbf{C}_i^e) \cdot \bar{\mathbf{V}}_{\text{EFRF}}^{\prime 0} \cdot (\mathbf{C}_{\text{GRF}}^i \cdot \mathbf{C}_i^e)^T, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}_{\text{GRF}}^{\prime 0}}{\partial (\bar{\mathbf{C}}_{im}, \bar{\mathbf{S}}_{im})} = (\mathbf{C}_{\text{GRF}}^i \cdot \mathbf{C}_i^e) \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}_{\text{EFRF}}^{\prime 0}}{\partial (\bar{\mathbf{C}}_{im}, \bar{\mathbf{S}}_{im})} \cdot (\mathbf{C}_{\text{GRF}}^i \cdot \mathbf{C}_i^e)^T. \quad (3)$$

Вычисление тензора гравитационного потенциала  $\bar{\mathbf{V}}_{\text{EFRF}}^{\prime 0}$  осуществляется посредством двойного дифференцирования по прямоугольным пространственным координатам формулы гравитационного потенциала Земли

$$V(r, \phi, \lambda) = \frac{GM_e}{r} + \frac{GM_e}{r} \sum_{n=2}^{L_{\max}} \left( \frac{a_e}{r} \right)^n \times \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \phi), \quad (4)$$

где  $GM_e$  – геоцентрическая гравитационная постоянная;  $a_e$  – большая полуось общего земного эллипсоида;  $r$ ,  $\phi$ ,  $\lambda$  – геоцентрические координаты спутника;  $L_{\max}$  – максимальный порядок разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям;  $\bar{C}_{nm}$ ,  $\bar{S}_{nm}$  – нормированные коэффициенты сферических гармоник;  $\bar{P}_{nm}$  – нормированные присоединенные функции Лежандра степени  $n$  и порядка  $m$ .

В формулах (2) и (3)  $C_i^e$  – матрица преобразования из земной системы координат в инерциальную систему координат, выраженная через кватернионы, имеет следующий вид

$$C_i^e = \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix}_{int}, \quad (5)$$

а  $C_{GRF}^i$  – матрица преобразования из инерциальной системы координат в градиентометрическую систему координат, выраженная через кватернионы, – вычисляется в соответствии с формулой (6) [4]

$$C_{GRF}^{ICRF} = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Причем, в формуле (6)  $q_0 = q_4$ .

Кроме этого, кватернионы в формуле (4) необходимо интерполировать на моменты градиентометрических измерений в соответствии с процедурой, приведенной в [5].

Кватернионы, которые являются компонентами матрицы (5), содержатся в продуктах SST\_PSO\_2 и SST\_PRM\_2, а кватернионы, которые являются компонентами матрицы (6), содержатся в продукте EGG\_NOM\_2.

Далее систему уравнений поправок (1) преобразуем в систему нормальных уравнений, из решения которой по методу наименьших квадратов определяют поправки к коэффициентам сферических гармоник априорной модели гравитационного поля Земли

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{C}_{lm} \\ \Delta \bar{S}_{lm} \end{bmatrix} = (A^T P A + \alpha K)^{-1} (A^T P \bar{l}), \quad (7)$$

где  $(A^T P A)$  – матрица коэффициентов системы нормальных уравнений;  $\alpha$  – параметр регуляризации;  $K$  – матрица регуляризации;  $(A^T P \bar{l})$  – вектор свободных членов системы нормальных;  $P$  – весовая матрица измерений.

Оценка точности полученного решения выполняется по формуле

$$Q = \mu^2 (A^T P A + \alpha K)^{-1}, \quad (8)$$

$$\mu^2 = \frac{v^T P v}{n - u}, \quad (9)$$

где  $Q$  – ковариационная матрица решения;  $\mu$  – средняя квадратическая ошибка единицы веса;  $v$  – вектор поправок в измеренные величины вычисляется в соответствии с формулой (1);  $P$  – весовая матрица измерений;  $n$  – число измерений;  $u$  – число определяемых параметров.

Однако следует заметить, что практическая реализация определения параметров модели гравитационного поля с использованием прямого подхода сопряжена с большими вычислительными трудностями, обусловленными большой размерностью вектора определяемых параметров (так, при учете разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям до 300 порядка число уточняемых параметров может составить более 90000). В связи с этим при определении параметров модели гравитационного поля Земли необходимо использовать методы регуляризации и стратегию параллельных вычислений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А. Ключков, Геодезия и картография **8**, 6 (2014).
2. А.А. Ключков, Геодезия и картография **12**, 4 (2014).
3. А.А. Ключков, Геодезия и картография **2**, 7 (2015).
4. А.А. Ключков, Геодезия и картография **2**, 17 (2016).
5. T. Gruber, R. Rummel, O. Abrikosov *GOCE Level 2 Product Data Handbook* (The European GOCE Gravity Consortium, 2010).