АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2022, том 99, № 7, с. 531–536

НЬЮТОНОВСКАЯ КОСМОЛОГИЯ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ

И. Д. Новиков[1, 2, 3, *], И. Д. Новиков Младший[1, 4, **]

[1] Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Астрокосмический центр, Москва, Россия

[2] Niels Bohr International Academy, Niels Bohr Institute, Copenhagen, Denmark

[3] Федеральное государственное бюджетное учреждение Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия

[4] Centre for Astrophysics and Planetary Science, The University of Kent, Canterbury, U.K.

*E-mail: novikov@asc.rssi.ru

**E-mail: inovikov@asc.rssi.ru

Поступила в редакцию 18.04.2022 г.
После доработки 16.05.2022 г.
Принята к публикации 16.05.2022 г.

Данная работа опровергает ошибочные утверждения, возникшие в теоретической космологии почти 90 лет назад. Рассматривается принятый в литературе метод вывода локальных свойств Фридмановской космологической модели, пользуясь только теорией Ньютона, без обращения к теории Эйнштейна. Мы показали, что обычный метод такого вывода недостаточен для получения правильного результата, и ведет к ошибкам. Сформулированы требования, являющиеся достаточными для того, чтобы Ньютоновская модель действительно являлась приближением к релятивистской теории.

Ключевые слова: Ньютоновская космология, релятивистская теория космологии, общая теория относительности Эйнштейна

DOI: 10.31857/S0004629922080096

1. ВВЕДЕНИЕ

В пионерских работах [1–3] и других было замечено, что вывод о нестационарности Вселенной и закон ее динамической эволюции могут быть получены из Ньютоновской теории без обращения к теории Эйнштейна. С тех пор изложение космологической проблемы в популярных книжках (см., напр., [4–6]), как правило, делается с использованием именно Ньютоновской теории. Более того, даже профессиональные монографии начинают изложения космологии часто с Ньютоновской теории (см., напр., [7–10]). При таком подходе подчеркивается, что закон тяготения Ньютона, описывающий ускорение, создаваемое гравитацией, является асимптотически правильным выражением закона Эйнштейна в случае слабых полей тяготения и сферических распределений вещества и скорости движения элементов объема, где скорости должны быть малыми по сравнению со световой. Как правило, при сравнении законов Эйнштейна и Ньютона этим и ограничиваются. В данной работе мы показываем, что такое ограничение недостаточно для понимания сути дела и, более того, ведет к ошибкам.

2. НЬЮТОНОВСКАЯ КОСМОЛОГИЯ

Как уже было сказано, начиная с пионерских работ [1–3] и других, Ньютоновская космология используется для “простого” введения в современную космологию. Чтобы выделить основные идеи, рассмотрим простейшую идеальную космологическую модель. Пусть однородное вещество без давления равномерно заполняет всю Вселенную. В подобной модели галактики рассматриваются в большом объеме как точки в таком веществе. Выделим мысленно в этом веществе шар произвольного радиуса с центром в произвольной точке. Рассмотрим сначала силы тяготения, создаваемые на поверхности этого шара только веществом самого шара, и не будем пока рассматривать все остальное вещество Вселенной. Пусть радиус шара выбран не слишком большим, так что поле тяготения, создаваемое веществом шара, относительно слабо, и для вычисления силы тяготения применима теория Ньютона. Тогда точки, находящиеся на граничной сфере, будут притягиваться к центру шара с силой, пропорциональной массе шара M и обратно пропорциональной квадрату его радиуса R.

Теперь вспомним о всем остальном веществе Вселенной вне шара, и попытаемся учесть создаваемые им силы тяготения. Для этого будем рассматривать последовательно сферические оболочки все большего и большего радиуса, охватывающие шар. Но известно, что сферически-симметричные слои вещества никаких гравитационных сил внутри полости не создают. Следовательно, все эти сферически-симметричные оболочки (т.е. все остальное вещество Вселенной) ничего не добавят к силе притяжения, которое испытывает точка A на поверхности шара к его центру O.

Итак, можно вычислить ускорение одной точки A по отношению к другой точке O. Мы приняли O за центр шара, а точка A находится на расстоянии R от O. Это ускорение обусловлено тяготением только вещества шара радиусом R. Согласно закону Ньютона оно есть

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}. \tag{1}$$

Знак минус означает, что ускорение соответствует притяжению, а не отталкиванию. Итак, любые две точки, находящиеся в однородной Вселенной на расстоянии R, испытывают относительное ускорение (отрицательное) $\ddot{R}$, задаваемое формулой (1). Это и означает, что Вселенная должна быть нестационарной. Действительно, если бы мы представили, что в некоторый момент времени галактики покоятся, т.е. $\dot{R} = 0$, и плотность вещества во Вселенной не меняется, то в следующий момент галактики получили бы скорости под действием взаимного тяготения всего вещества, так как имеется ускорение тяготения, даваемое формулой (1). Итак, покой галактик друг относительно друга возможен лишь на мгновение. В начальный момент времени можно выбрать не покой, а расширение друг относительно друга. В общем же случае галактики должны двигаться – они должны или удаляться, или сближаться, радиус шара R должен меняться со временем, плотность вещества также должна изменяться со временем.

Вселенная должна быть нестационарной, ибо в ней действует тяготение – таков основной вывод теории. Формулу (1) можно переписать, заменив в ней массу выражением $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, тогда получим силу тяготения на единицу массы в виде

$$\ddot{R} = -\frac{4}{3}\pi G\rho R. \tag{2}$$

Точка означает производную по времени, ρ – плотность вещества. Выбор точки O был произволен. Наша модель однородна, следовательно, формула (2) справедлива для любой точки пространства Вселенной. Формула (2) описывает закон изменения радиуса произвольного шара со временем и также описывает закон изменения плотности вещества со временем, так как плотность вещества $\rho \sim \frac{1}{R^3}$ для пыли, когда давление $P = 0$. С учетом этого соотношения уравнение (2) можно проинтегрировать:

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho R^2 + E, \tag{3}$$

где E – произвольная константа интегрирования. Формула (3) позволяет легко анализировать динамику эволюции разных масштабов и эволюцию плотности Вселенной. Выражение (3) можно рассматривать как закон сохранения энергии при эволюции поверхности шара: E – полная энергия, равная сумме кинетической (член с $\dot{R}^2$) и потенциальной (член с постоянной G). Отрицательное слагаемое в выражении $E = \left(\frac{1}{2}\right)\dot{R}^2 - \left(\frac{4}{3}\right)\pi G\rho R^2$ называют потенциалом, он изображен на рис. 1. Эволюция модели происходит с постоянной энергией $E = \text{const}$, изображенной на рис. 1 горизонтальной линией. Если $E_1 > 0$, то расширение происходит от $R = 0$ до $R = \infty$. Если $E_2 < 0$, то расширение происходит от $R = 0$ до встречи с потенциальной кривой, и затем происходит сжатие до $R = 0$. Величина $E = \text{const}$ может выбираться произвольно, так как начальные условия в Ньютоновской теории никак не связаны с уравнением тяготения. К сказанному еще добавляют, что шар достаточно мал, чтобы не только силы тяготения на его поверхности были малы, но и скорости вещества тоже малы по сравнению со световой c. Сказанное составляет суть Ньютоновской космологии, которая, как утверждается, совпадает локально с релятивистской космологией. Но как мы увидим, это утверждение требует существенных уточнений.

3. УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

Механика релятивистской космологии (теория Фридмана) основана на уравнениях Эйнштейна. Уравнения Эйнштейна описывают структуру и эволюцию геометрии пространства-времени с помощью метрического тензора g_{ik} (см., напр., [11]) совместно с эволюцией физических свойств материи [11], описываемых тензором T_{ik}. В отличие от уравнения тяготения Ньютона, уравнения Эйнштейна содержат в себе уравнение движения. Вся система является системой дифференциальных уравнений частных

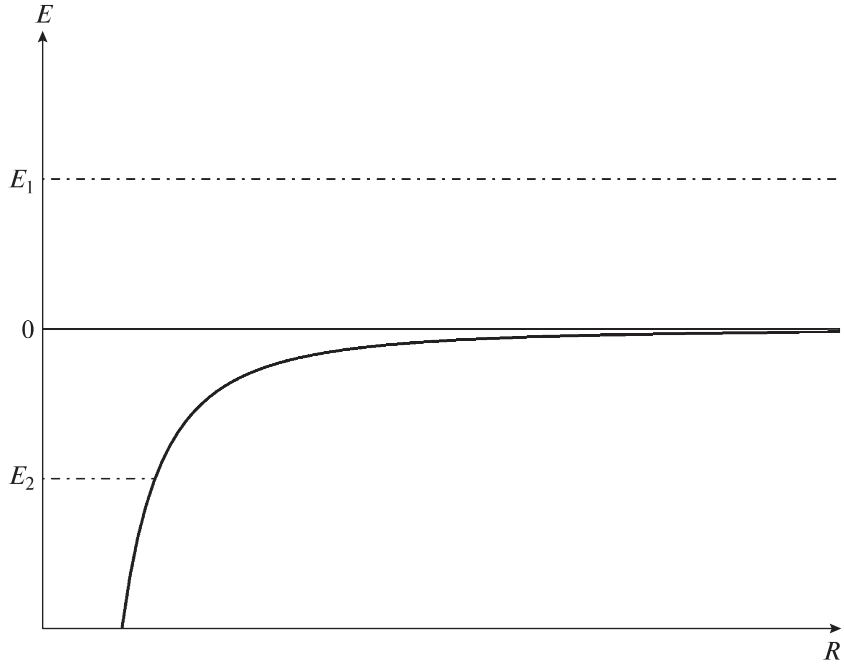

Рис. 1. Графическое изображение потенциала $E = -\frac{4}{3}\pi G\rho R^2$ Ньютоновской модели, $\rho = \frac{\rho_0 R_0^3}{R^3}$. E_1 и E_2 – линии постоянных значений энергии, вдоль которых происходит эволюция модели.

производных второго порядка компонент метрического тензора по координатам x^0, x^1, x^2, x^3. Система может быть записана в виде

$$G_i^k = \frac{8\pi G}{c^4} T_i^k. \tag{4}$$

Здесь G – постоянная тяготения; $i,k = 0,1,2,3$; G_i^k – тензор кривизны Эйнштейна; T_i^k – тензор энергии–импульса материи. Эти уравнения делятся на две группы.

1) Уравнения, не содержащие вторых производных по времени x^0. Это уравнения на начальные условия при $x^0 = 0$:

$$G_i^0 = \frac{8\pi G}{c^4} T_i^0. \tag{5}$$

2) Уравнения эволюции, содержащие вторые производные по x^0:

$$G_\alpha^\beta = \frac{8\pi G}{c^4} T_\alpha^\beta, \quad \alpha,\beta \neq 0. \tag{6}$$

При этом, если уравнения (5) выполняются при $x^0 = 0$, а уравнения (6) выполняются при всех x^0, x^1, x^2, x^3, то уравнения (5) так же выполняются при всех x^0, x^1, x^2, x^3. Мы считаем, что Λ – член релятивистской теории, включен в выражение для тензора T_i^k. В данной статье полагаем, что $\Lambda = 0$.

4. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КОСМОЛОГИИ

Мы будем рассматривать однородные изотропные релятивистские модели. Их строение и эволюция описываются радиусом кривизны трехмерного пространства $a(t)$. Будем считать давление $P = 0$. Для таких моделей уравнения Эйнштейна переписываются в виде

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} a\rho, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 = \frac{4\pi G}{3} a^2\rho - \frac{kc^2}{2}, \tag{8}$$

где k может принимать значение $k = 0, \pm 1$. Случай $k = 0$ является вырожденным и мы его здесь не рассматриваем. В нашем случае $P = 0$ и $\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3$. Уравнения (7), (8) похожи на (2), (3), но вместо произвольного радиуса шара R здесь

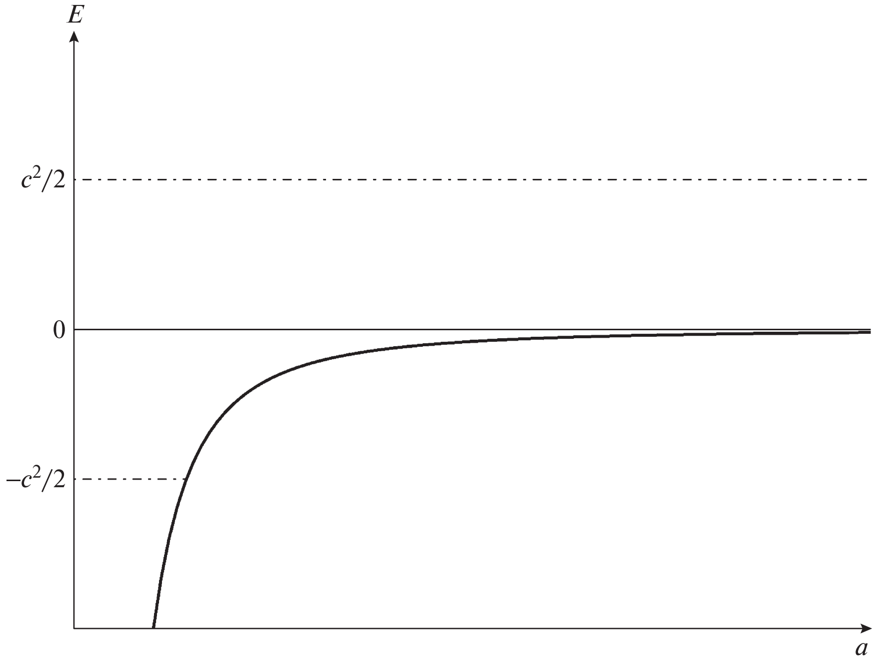

Рис. 2. Графическое изображение потенциала $E = E(a)$. Штрихпунктирные линии – постоянные значения энергии, вдоль которых происходит эволюция модели.

стоит конкретный радиус кривизны a, характеризующий масштаб всей Вселенной. Вдобавок к этому заметим, что уравнение (8) похоже на интеграл (3) теории Ньютона, отличаясь лишь тем, что вместо произвольной константы E здесь стоит $-\frac{kc^2}{2}$. Отличие весьма существенное, т.к. без произвольной E уравнение (8) является ограничением на начальные условия, чего принципиально нет в теории Ньютона.

Для сравнения с Ньютоновской теорией введем функцию $E = \frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{4\pi G}{3}a^2\rho$, $\rho \sim \frac{1}{a^3}$ для пыли, когда $P = 0$. Эту функцию будем называть энергией. Величину $E = E(a)$ при $\frac{\dot{a}^2}{2} = 0$ будем называть потенциалом, он изображен на рис. 2. Похожесть систем (2), (3) и (7), (8) позволяла заменять вторую систему первой для анализа локальных величин. При этом различию между (3) и (8) значение не придавалось и не обсуждалось. А принципиальное различие состоит в том, что теперь в уравнении (8) речь идет не о шаре произвольного выбранного размера R, а о конкретной величине a – радиусе кривизны трехмерного сечения Вселенной, и выражение (8) становится условием на начальные значения параметров задачи.

5. НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ И НЬЮТОНОВСКАЯ КОСМОЛОГИЯ

Для того чтобы обсудить разницу в подходе двух теорий – Ньютоновской и релятивистской – к описанию даже локальных свойств Вселенной, давайте выполним в релятивистской теории операцию выделения небольшого шара, как мы делали в Ньютоновской теории в разделе 2, и затем проанализируем возникающие различия. В Ньютоновской теории мы мысленно выделили в однородном веществе Вселенной небольшой шар произвольного радиуса R в произвольный момент времени t_0, когда плотность вещества равна ρ_0 с центром в произвольной точке O. При этом требовалось, чтобы ускорение $\ddot{R}$, вычисляемое согласно уравнению (1), мало отличалось от ускорения по релятивистской формуле (7). Для этого, как известно, необходимо уравнение (8), чтобы гравитационный радиус r_g шара массой M был много меньше физического радиуса R:

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \ll R. \tag{9}$$

При этом иногда добавлялось или предполагалось, что скорости движения вещества R должны быть нерелятивистскими,

$$v \ll c. \tag{10}$$

Из (9) следует

$$R \ll \frac{c}{\sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho_0}}. \tag{11}$$

В Ньютоновской теории для построения конкретной космологической модели, т.е. для интегрирования единственного уравнения модели (2), требуется задать начальные условия в момент времени t_0:

$$t = t_0, \tag{12}$$

$$R = R_0, \quad \rho = \rho_0, \quad \dot{R} = \dot{R}_0. \tag{13}$$

После этого решение находится однозначно. Модель построена. Обратимся к релятивистской теории. Обозначим, насколько выбранный нами радиус шара R меньше a:

$$N \equiv \frac{a}{R}. \tag{14}$$

Это отношение $N \equiv \frac{a}{R}$ постоянно по времени. Прежде всего для нашего маленького шарика должно выполняться динамическое уравнение (7), переписанное для поверхности шара R. Подставим (13) в (7):

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3}GR\rho. \tag{15}$$

Но помимо этого уравнения во Фридмановской теории должно еще выполняться уравнение для начальных данных (8), переписанное снова для поверхности шара R. Подставим (14) в (8), получаем:

$$\frac{\dot{R}^2}{2} = \frac{4\pi}{3}GR^2\rho - \frac{kc^2}{2N^2}. \tag{16}$$

Это условие накладывает на начальные данные в момент $t = t_0$ жесткие соотношения. Начальные данные

$$R = R_0, \quad \rho = \rho_0, \quad \dot{R} = \dot{R}_0, \tag{17}$$

связаны условиями (16). Это то, чего нет в Ньютоновской теории. Из проведенного рассмотрения следует, что для того, чтобы сделать Ньютоновскую теорию близкой к релятивистской, недостаточно взять шар малым и задать скорость его однородного расширения много меньше световой. Надо еще, чтобы при заданных R_0 и ρ_0 скорость на поверхности шара удовлетворяла соотношению (16). Пренебрежение этим условием ведет к ошибкам. Для иллюстрации рассмотрим шар в начальный момент времени t_0. Зададим $N\frac{a}{R}$, т.е. выберем размер шара по отношению к a. Пусть этот выбор удовлетворяет необходимым условиям малости. Но теперь мы не можем произвольно выбрать достаточно малую скорость расширения. Она должна быть такой, чтобы полная энергия была равна $\frac{-kc^2}{2N^2}$ (см. (16)). На диаграмме рис. 1 это соответствует движению точки, представляющей решение уравнений эволюции, по горизонтальной линии постоянной энергии

$$E = -\frac{kc^2}{2N^2}. \tag{18}$$

Становится понятной причина существенной разницы рис. 1 и 2. На рис. 2 горизонтали $E = \pm\frac{c^2}{2}, 0$ изображают эволюцию всей Вселенной при $k = \pm 1, 0$ соответственно. На рис. 1 горизонтали $E = \text{const}$ изображают эволюцию шаровой части. При этом $E_{1,2} = \text{const}$ может принимать не любые значения, а только указанные нами значения, определяемые необходимыми начальными условиями релятивистской теории, даваемые выражением (16).

Таким образом, следует помнить, что правильное приближение Ньютоновской космологии к релятивистской теории требует учет не только близкого значения ускорения согласно обоим теориям, т.е. условия (11), но и обязательного выполнения условий (16). При построении динамики однородной, изотропной космологической модели без релятивистской теории Эйнштейна не обойтись. Невыполнение условий (16) ведет к совсем другой неправильной картине эволюции.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят В.А. Рубакова за обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *E. A. Milne*, Quart. J. Math. **5**, 64 (1934).
2. *W. H. McCrea and E. A. Milne*, Quart. J. Math. **5**, 73 (1934).
3. *Я. Б. Зельдович*, Успехи физ. наук **80**, 357 (1963).
4. *И. Д. Новиков*, *Эволюция Вселенной* (М.: Наука, 1979).

5. *А. М. Черепащук, А. Д. Чернин*, *Вселенная, Жизнь, Черные Дыры* (Фрязино: Век 2, 2003), с. 207.

6. *В. М. Липунов*, *От большого взрыва до великого молчания* (М.: АСТ, 2018), с. 56.

7. *И. Д. Новиков*, *Как взорвалась Вселенная* (М.: Наука, 1988).

8. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, *Релятивистская астрофизика* (М.: Наука, 1967).

9. *Y. B. Zeldovich and I. D. Novikov*, *Universe and Relativity. The structure and Evolution of the Universe* (Chicago: University of Chicago Press, 1983).

10. *Л. П. Грищук, Я. Б. Зельдович*, *Космология*, в сб. *Физика Космоса*, под ред. Р. А. Сюняева (М.: Советская Энциклопедия, 1986).

11. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц*, *Теория поля* (М.: Наука, 1988).