

ЛИБРАЦИИ В ДВОЙНЫХ БАРАХ ГАЛАКТИК

© 2022 г. Б. П. Кондратьев^{1, 2, *}, Е. Н. Киреева¹, В. С. Корноухов¹, Н. Г. Трубицына³

¹ Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Главная (Пулковская) Астрономическая обсерватория, Санкт-Петербург, Россия

³ Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия

*E-mail: kond@boris-kondratyev.ru

Поступила в редакцию 19.04.2022 г.

После доработки 09.06.2022 г.

Принята к публикации 21.06.2022 г.

Разработан новый аналитический метод исследования взаимных поворотных колебаний (либраций) гравитирующих звездных эллипсоидов, образующих двойные бары в дисковых галактиках. Модель двойного бара представлена суперпозицией двух концентрических несоосных эллипсоидов (бар 1 и бар 2), имеющих разные масштабы и массы. Рассмотрены два варианта моделей: с однородными барами и со слоисто-неоднородным внешним баром 2. Для каждой модели получены выражения взаимной гравитационной энергии эллипсоидов и рассчитан момент сил между ними, построены лагранжианы и выводятся дифференциальные уравнения нелинейных либраций баров относительно “срединной” плоскости. Найдены решения этих уравнений, вычислены частоты и периоды либраций как в общем нелинейном случае, так и в приближении гармонических колебаний. Обсуждается приложение метода к изучению динамики других подсистем галактик.

Ключевые слова: двойные бары в галактиках, суперпозиция гравитирующих эллипсоидов и их взаимная энергия, лагранжианы, линейные и нелинейные уравнения либрации баров, частоты и периоды колебаний

DOI: 10.31857/S0004629922090067

1. ВВЕДЕНИЕ

Бары (перемычки) являются неотъемлемой частью многих дисковых галактик [1, 2]. Как известно, более половины плоских галактик имеют бар, и чем ближе находятся к нам галактики при $z < 1$, тем чаще они имеют бар [3]. Бары играют важную роль в динамике галактик, и интерес к ним еще более возрос после открытия их сложной структуры; оказалось, что в среднем каждый третий бар может состоять из двух вложенных друг в друга звездных баров, см., например, [4]. В частности, бар в нашей Галактике также имеет сложную структуру [5]. Динамика и устойчивость двойных баров пока полностью не изучены, и их исследование является актуальной задачей [6–8].

В работе [9] была построена фазовая модель звездного цилиндра, вложенного во вращающееся звездное гало. В этой модели было установлено существование сдвиговых течений центроидов вдоль внутренней “трубы”, вследствие чего масса модели могла теряться. В русле этих исследований находится и задача построения модели двойного бара с постоянными массами компонентов.

При постановке задач об эволюции баров важен выбор подходящего метода исследования. Построить нестационарную самосогласованную фазовую модель бара пока не удается из-за значительных математических трудностей. Однако некоторые важные результаты могут быть получены и более простыми методами. В данной работе, как первый шаг к решению проблемы, разработан метод изучения вращательных колебаний (либраций), вложенных друг в друга гравитирующих трехосных звездных баров. Задача сводится к построению лагранжиана, где в качестве потенциального члена используется взаимная гравитационная энергия компонентов двойного бара. Этот метод хорош тем, что производная от взаимной энергии по углу либрации сразу дает момент сил, действующих на внутренний бар со стороны внешнего (справедливо и обратное!). Это позволяет простым и надежным способом выводить дифференциальное уравнение либраций баров относительно друг друга.

В разделе 2 дана постановка задачи, в разделе 3 найдена взаимная гравитационная энергия однородных баров. Лагранжиан для этой задачи получен в разделе 4, где вводится понятие “средин-

ной” плоскости, получено и решено уравнение нелинейных поворотных колебаний баров. В разделе 5 рассматривается задача о взаимной энергии и либрациях баров относительно “среди́нной” плоскости в случае, когда внешний бар представлен неоднородным эллипсоидом. В разделе 6 результаты обсуждаются.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Бар (перемычка, рукав) состоит в основном из звезд и моделируется вытянутым вдоль главной оси однородным трехосным эллипсоидом. Мы рассматриваем модель двойного бара и полагаем, что меньший по размерам бар 1 имеет границу

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \quad (a_1 > a_2 > a_3), \quad (1)$$

а внешний бар 2 есть эллипсоид, полуоси которого будем отмечать штрихами ($a'_1 > a'_2 > a'_3$). Оба эллипсоидальных компонента могут совершать поворотные либрации вокруг оси Ox_3 , внутренние течения в эллипсоидах отсутствуют.

Бар на стадии вековой эволюции находится в слабо неравновесном состоянии. Нас интересует, прежде всего, крупномасштабная нестационарность системы из двух баров в виде их поворотных колебаний относительно друг друга.

Пусть система декартовых координат $Ox_1x_2x_3$ связана с главными (штрихованными) полуосями внешнего бара 2, а система $OX_1X_2X_3$ — с полуосями внутреннего бара 1. Ориентация бара 1 относительно осей бара 2 задается углом $\theta(t)$ (рис. 1).

Введенные системы координат связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 \cos \theta - X_2 \sin \theta; \\ X_1 &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta; \\ x_2 &= X_1 \sin \theta + X_2 \cos \theta; \\ X_2 &= x_2 \cos \theta - x_1 \sin \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Для проверки формул (2) заметим, что квадрат длины отрезка $x_1^2 + x_2^2 = X_1^2 + X_2^2$ одинаков в обеих системах координат.

3. ВЗАИМНАЯ ГРАВИТАЦИОННАЯ ЭНЕРГИЯ ДВУХ БАРОВ С ЕДИНЫМ ЦЕНТРОМ

Для решения задачи о либрациях компонентов двойного бара, находящихся в суперпозиции их гравитационных полей, применим метод, основанный на вычислении взаимной гравитационной энергии W_{mut} внутреннего бара 1 (плотность которого ρ_1) и внешнего бара 2 плотности ρ_2 . В случае однородности обоих компонентов их

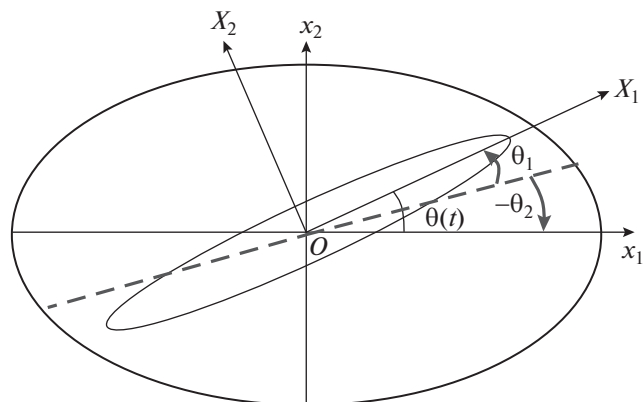


Рис. 1. Схема двойного бара, оба компонента которого имеют форму трехосных эллипсоидов с общим центром O . Показаны две системы декартовых координат и угол наклона $\theta(t)$ баров друг к другу. Ось Ox_3 нормальна к плоскости рисунка. Штрихами намечена “среди́нная линия” и показаны вспомогательные углы наклонов баров $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$.

взаимную энергию можно находить по формуле [10, 11]

$$W_{\text{mut}} = -\rho_1 \iiint_{V_1} \varphi_2(x_i) dV, \quad (3)$$

где интегрирование внутреннего потенциала $\varphi_2(x_i)$ бара 2 происходит по объему бара V_1 . В системе координат $Ox_1x_2x_3$ гравитационный потенциал однородного внешнего эллипсоида во внутренней точке (см., например, [12]) равен

$$\varphi_2 = \pi G \rho_2 (I' - A'_1 x_1^2 - A'_2 x_2^2 - A'_3 x_3^2), \quad (4)$$

где I' и коэффициенты A'_i имеют вид

$$\begin{aligned} I' &= a'_1 a'_2 a'_3 \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta(s)}; & A'_i &= a'_1 a'_2 a'_3 \int_0^\infty \frac{ds}{(a_i'^2 + s) \Delta(s)}; \\ \Delta^2(s) &= (a_1'^2 + s)(a_2'^2 + s)(a_3'^2 + s). \end{aligned} \quad (5)$$

Далее потенциал (4) запишем в системе координат $OX_1X_2X_3$, относящихся к бару 1. Используя формулы (2), получим выражение

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \pi G \rho_2 \left[I' - A'_1 (X_1 \cos \theta - X_2 \sin \theta)^2 - \right. \\ &\quad \left. - A'_2 (X_1 \sin \theta + X_2 \cos \theta)^2 - A'_3 x_3^2 \right], \end{aligned} \quad (6)$$

которое преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \pi G \rho_2 \left[I - (A'_1 \cos^2 \theta + A'_2 \sin^2 \theta) X_1^2 - \right. \\ &\quad \left. - (A'_1 \sin^2 \theta + A'_2 \cos^2 \theta) X_2^2 - \right. \\ &\quad \left. - (A'_2 - A'_1) \sin 2\theta \cdot X_1 X_2 - A'_3 x_3^2 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя гравитационный потенциал (7) под знак интеграла в (3) и учитывая, что тензор инерции второго порядка однородного эллипсоида равен

$$I_{ij} = \rho_1 \iiint_{V_1} X_i X_j dV = \frac{1}{5} M_1 a_i^2 \delta_{ij} \quad (8)$$

(где $M_1 = \frac{4}{3} \pi a_1 a_2 a_3 \rho_1$ — масса бара 1, а δ_{ij} — символ Кронекера), в итоге, после интегрирования находим взаимную энергию двух эллипсоидальных компонентов бара:

$$W_{\text{mut}}(\theta) = \frac{1}{5} \pi G \rho_2 M_1 \left[(A'_1 a_1^2 + A'_2 a_2^2) \cos^2 \theta + (A'_1 a_2^2 + A'_2 a_1^2) \sin^2 \theta + A'_3 a_3^2 - 5I' \right]. \quad (9)$$

В частности, для $\theta = 0$, когда большая ось OX_1 бара 1 совпадает с осью Ox_1 бара 2, взаимная энергия принимает свое минимальное (максимальное по модулю) значение

$$W_{\text{mut}}^0(\theta) = \frac{1}{5} \pi G \rho_2 M_1 \left[A'_1 a_1^2 + A'_2 a_2^2 + A'_3 a_3^2 - 5I' \right]. \quad (10)$$

Далее примем $W_{\text{mut}}^0(\theta)$ за точку отсчета взаимной энергии и составим разность

$$\tilde{W}_{\text{mut}}(\theta) = W_{\text{mut}}(\theta) - W_{\text{mut}}^0. \quad (11)$$

После простых преобразований в (11) находим

$$\tilde{W}_{\text{mut}}(\theta) = \frac{1}{5} \pi G \rho_2 M_1 (A'_2 - A'_1) (a_1^2 - a_2^2) \sin^2 \theta. \quad (12)$$

Отметим, что в формуле (12) присутствует только член, зависящий от угла θ , причем коэффициент при $\sin^2 \theta$ обращается в нуль в двух случаях: (i) при осевой симметрии внешнего бара 2 (когда $A'_1 = A'_2$), а также (ii), когда бар 1 имеет круговую симметрию $a_1 = a_2$. Очевидно, в обоих случаях либрации компонентов бара отсутствуют.

График формулы (12) показан на рис. 2. Из него видно, что минимум взаимной энергии достигается, когда большие оси обоих баров совпадают. Из этого рисунка также следует, что в интервале углов $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ система баров находится в потенциальной яме, причем нормированная взаимная энергия имеет свой локальный минимум при $\theta = 0$. Это означает, что либрацию бара 1 можно представить как колебания материальной точки, перекачивающейся в поле тяжести внутри вогнутой чаши. Такие поворотные колебания бара являются устойчивыми.

Рассмотрим подробнее поворотные либрации баров 1 и 2 друг относительно друга.

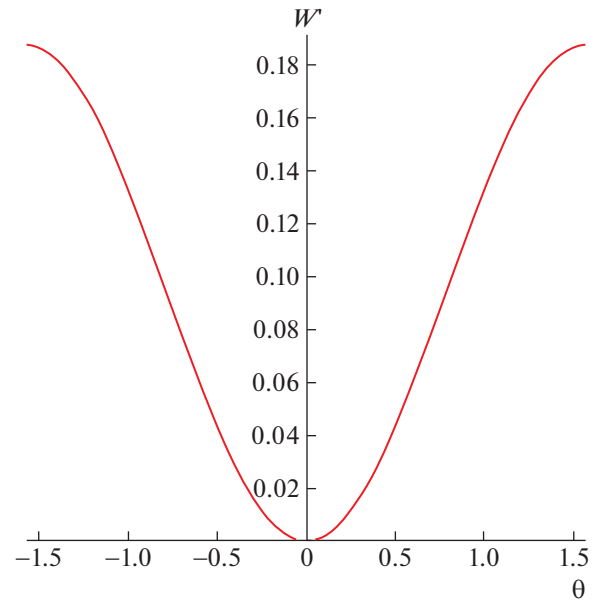


Рис. 2. Зависимость нормированной взаимной гравитационной энергии $W' = \frac{\tilde{W}_{\text{mut}}(\theta)}{\frac{1}{5} \pi G \rho_2 M_1 a_1^2}$ двух баров от угла ориентации θ . Для расчетов взяты значения $A'_1 = 0.15$; $A'_2 = 0.4$; $n = \frac{a_2}{a_1} = 0.5$.

4. МОМЕНТ СИЛ И УРАВНЕНИЯ ЛИБРАЦИИ КОМПОНЕНТОВ В ДВОЙНОМ БАРЕ

При изучении взаимных либраций баров 1 и 2 применим метод, разработанный в работе Кондратьева [13]. Согласно этому методу, момент сил $\mathbf{M}$, действующих на бар 1 со стороны бара 2, мы находим через вычисление производной от функции взаимной энергии компонентов баров по углу либрации θ . В нашем случае единственный отличный от нуля третий компонент момента сил будет равен:

$$M = \frac{\partial \tilde{W}_{\text{mut}}}{\partial \theta}, \quad (13)$$

где $\tilde{W}_{\text{mut}}$ из (12).

Далее исходим из того, что в процессе поворотных колебаний баров 1 и 2 относительно оси Ox_3 их суммарный угловой момент сохраняется

$$I_3^{(1)} \dot{\theta}_1 + I_3^{(2)} \dot{\theta}_2 = 0; \quad I_3^{(1)} = \frac{1}{5} M_1 (a_1^2 + a_2^2), \quad (14)$$

$$I_3^{(2)} = \frac{1}{5} M_2 (a_1'^2 + a_2'^2).$$

Интегрируя (14), получим

$$I_3^{(1)} \theta_1 + I_3^{(2)} \theta_2 = C. \quad (15)$$

По условию задачи, при $\theta_1 = 0$ должно быть и $\theta_2 = 0$, поэтому в (15) следует положить $C = 0$. Таким образом, для вспомогательных углов $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ имеем два уравнения

$$\begin{aligned} \theta_1 - \theta_2 &= \theta, \\ I_3^{(1)}\theta_1 + I_3^{(2)}\theta_2 &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

с решениями

$$\theta_1 = \frac{\theta}{1 + \frac{I_3^{(1)}}{I_3^{(2)}}}, \quad -\theta_2 = \frac{\theta}{1 + \frac{I_3^{(2)}}{I_3^{(1)}}}. \quad (17)$$

Для нахождения периода колебаний баров составим лагранжиан

$$L = K - W_{\text{mut}}, \quad (18)$$

где K — кинетическая энергия колебаний, а W_{mut} — потенциальная энергия системы двух баров. Кинетическая энергия будет равна

$$K = \frac{1}{2}I_3^{(1)}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_3^{(2)}\dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \frac{I_3^{(1)} \cdot I_3^{(2)}}{I_3^{(1)} + I_3^{(2)}}, \quad (19)$$

где для преобразований мы использовали выражения вспомогательных углов (17). Потенциальная часть лагранжиана (18) дана в (12). Поскольку нас интересуют только величины, зависящие от угла θ , мы не включили в K из (19) энергию полного вращения T_{rot} всей системы баров вокруг оси Ox_3 (очевидно, включение этой постоянной T_{rot} не изменило бы форму уравнения Лагранжа).

Таким образом, оставляя для системы баров только ту часть лагранжиана $L(\theta)$, которая зависит от угла θ , имеем редуцированный лагранжиан в виде

$$\begin{aligned} L(\theta) &= K - \tilde{W}_{\text{mut}} = \frac{1}{2}\tilde{I}_3\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \\ &- \frac{1}{5}\pi G\rho_2 M_1 \left[(A_2' - A_1')(a_1^2 - a_2^2) \sin^2 \theta \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где для краткости через $\tilde{I}_3$ обозначен приведенный момент инерции системы

$$\tilde{I}_3 = \frac{I_3^{(1)} \cdot I_3^{(2)}}{I_3^{(1)} + I_3^{(2)}}. \quad (21)$$

Обратимся теперь ко второму уравнению движения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) - \frac{dL}{d\theta} = 0, \quad (22)$$

где член $\frac{dL}{d\dot{\theta}}$ равен моменту сил в левой части (13). Подставляя в (22) лагранжиан из (20), в итоге по-

лучим искомое дифференциальное уравнение колебаний для угла $\theta(t)$:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin 2\theta = 0. \quad (23)$$

Входящая в (23) величина ω^2 имеет размерность квадрата частоты колебаний и связана с характеристиками обоих баров

$$\omega^2 = \pi G\rho_2 \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} (A_2' - A_1') \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \right). \quad (24)$$

Дифференциальное уравнение (23) дает решение поставленной задачи о нелинейных либрациях в двойном однородном баре.

В частности, при малых θ либрации бара описываются уравнением гармонических колебаний

$$\ddot{\theta} + \kappa^2 \theta = 0. \quad (25)$$

Замечание 1. В данной работе вначале рассмотрим случай малых (гармонических) вращательных колебаний компонентов двойного бара. Общий случай нелинейных вращательных колебаний, представленных уравнением (23), будет рассмотрен в разделе 5.

Частота указанных малых колебаний есть

$$\begin{aligned} \kappa &= \sqrt{2}\omega = \\ &= \sqrt{2\pi G\rho_2 \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} (A_2' - A_1') \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \right)}, \end{aligned} \quad (26)$$

а период колебаний равен

$$T_0 = \frac{2\pi}{\kappa}. \quad (27)$$

Решение уравнения (25) имеет вид

$$\theta = \theta_0 \sin(\kappa t + \theta'). \quad (28)$$

На рис. 3 показано 3D изображение формулы (27).

Для примера, возьмем следующие относительные размеры компонентов в двойном баре:

$$a_1' = 3, \quad a_2' = 2, \quad a_3' = 1; \quad n = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{3}. \quad (29)$$

Тогда коэффициенты внутреннего потенциала однородного гало, рассчитанные по формулам (5), будут равны

$$A_1' = 0.3126014; \quad A_2' = 0.5343081. \quad (30)$$

Среднюю плотность бара 2 возьмем равной $\rho_2 \approx 5 \times 10^{-22} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Тогда по формулам (26) и (27) находим период малых либраций

$$T_0 \approx 4.43 \times 10^7 \text{ лет}. \quad (31)$$

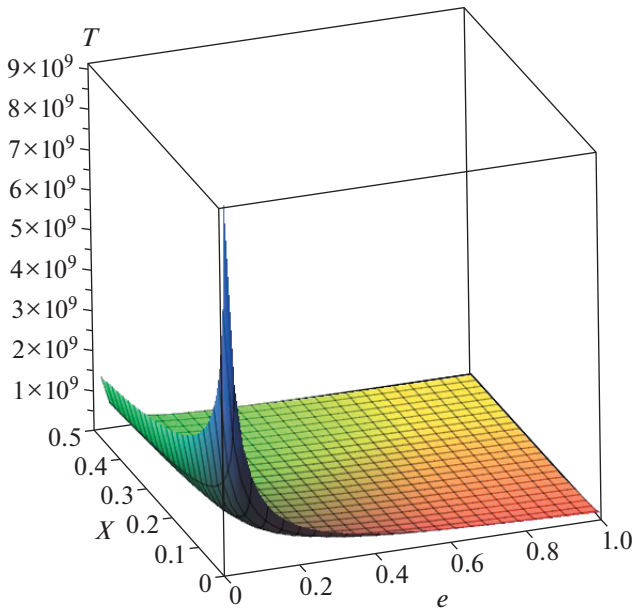


Рис. 3. 3D изображение периода T_0 (в земных годах) гармонических либраций компонентов двойного бара.

Здесь $e = \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{a_1^2}}$ есть эксцентриситет экваториального сечения внутреннего бара, а $x = A_2' - A_1'$ — разность коэффициентов потенциала для внешнего бара 2. Расчет сделан по формуле (27), в которой взято

$$\rho_2 = 7.5 M_\odot \text{ пк}^{-3} \approx 5 \times 10^{-22} \text{ г/см}^3 \text{ и } \frac{I_3^{(1)}}{I_3^{(2)}} = \frac{1}{3}.$$

Найденный в (31) период малых либрационных колебаний бара равен примерно 44 млн. лет, что примерно в 5 раз меньше, чем вращение Солнца вокруг центра Галактики. Далее в разделе 5 мы покажем, что учет неоднородности бара 2 может заметно замедлить процесс колебаний компонентов двойного бара и увеличить период их либраций.

При больших амплитудах θ_0 бар, согласно уравнению (23), совершает нелинейные колебания, частота и период которых равны

$$\mu = \frac{\pi}{2} \frac{\kappa}{K(\kappa)}, \quad T = \frac{2\pi}{\mu}. \quad (32)$$

Здесь $K(\kappa)$ — стандартный полный эллиптический интеграл первого рода. С хорошей точностью период нелинейных колебаний с амплитудой θ_0 может быть представлен формулой

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \theta_0 \right), \quad (33)$$

где T_0 дано в (27). Расчет периода нелинейных колебаний как функции от амплитуды показан на рис. 4.

5. ЛИБРАЦИИ КОМПОНЕНТОВ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ВНЕШНЕМ БАРЕ 2

5.1. Плотность и внутренний потенциал в баре 2

В качестве другой модели бара 2 рассмотрим неоднородный трехосный эллипсоид с параболическим законом плотности $\rho(m)$ и массой M_2

$$\rho = \rho_0(1 - m^2); \quad m^2 = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2}; \quad M_H = \frac{8}{15} \pi a_1' a_2' a_3' \rho_0. \quad (34)$$

Замечание 2. Эллипсоид с параболическим законом плотности (34) является одним из самых простых после однородного. Мы рассмотрим его в качестве примера, чтобы оценить влияние неоднородности на взаимную энергию системы “бар 1–бар 2” и на период либраций компонентов бара. В техническом плане расчеты для этой модели более сложные, чем для модели с однородными компонентами.

Внутренний потенциал такого слоисто-неоднородного эллипсоида дается формулой (см. [14], а также [10, 11])

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \pi G \rho_0 a_1' a_2' a_3' \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta(s)} \left(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i'^2 + s} \right)^2, \quad (35)$$

где $\Delta(s)$ дано в (5). Раскрывая скобки и интегрируя в (35), получим выражение

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \frac{1}{2} \pi G \rho_0 \{ & I' - 2A_1' x_1^2 - 2A_2' x_2^2 - 2A_3' x_3^2 + \\ & + A_1' x_1^4 + A_2' x_2^4 + A_3' x_3^4 + \\ & + 2A_{12}' x_1^2 x_2^2 + 2A_{13}' x_1^2 x_3^2 + 2A_{23}' x_2^2 x_3^2 \}. \end{aligned} \quad (36)$$

Напомним, что здесь φ_2 есть потенциал бара 2; коэффициенты A_i' даны в (5), а двойные индексы Чандрасекара [12] равны

$$A_{ij}' = a_1' a_2' a_3' \int_0^\infty \frac{ds}{(a_i'^2 + s)(a_j'^2 + s)\Delta(s)}. \quad (37)$$

Подставляя в (36) формулы (2), получим выражение потенциала внутри эллипсоида бара 2 в виде

$$\begin{aligned} \varphi_H = \frac{1}{2} \pi G \rho_0 \{ & I + A_{33}' x_3^4 + R_{111} X_1^4 + R_{222} X_2^4 + \\ & + R_{1122} X_1^2 X_2^2 + R_{1133} X_1^2 x_3^2 + R_{2233} X_2^2 x_3^2 - \\ & - R_{22} X_2^2 - R_{11} X_1^2 - 2A_2' x_3^2 \}. \end{aligned} \quad (38)$$

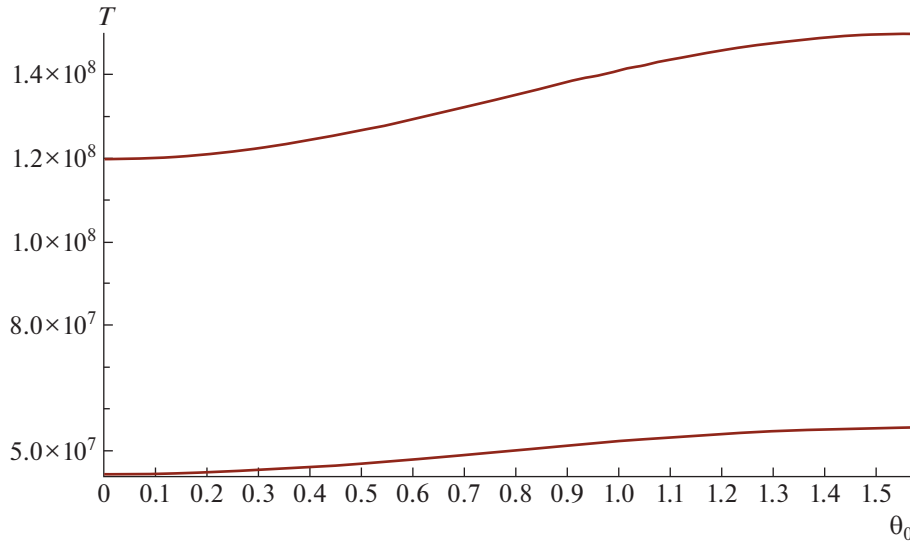


Рис. 4. Период нелинейных колебаний T компонентов двойного бара как функция от амплитуды θ_0 . Расчет по формуле (33). Нижняя кривая — для однородных баров 1 и 2 с коэффициентом T_0 из (31), верхняя кривая — для модели “однородный бар 1 — неоднородный бар 2” с коэффициентом T_0 из (57).

Входящие сюда коэффициенты равны

$$R_{11} = 2A'_1 \cos^2 \theta + 2A'_2 \sin^2 \theta;$$

$$R_{22} = 2A'_1 \sin^2 \theta + 2A'_2 \cos^2 \theta;$$

$$R_{1111} = A'_{11} \cos^4 \theta + 2A'_{12} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + A'_{22} \sin^4 \theta;$$

$$R_{2222} = A'_{11} \sin^4 \theta + 2A'_{12} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + A'_{22} \cos^4 \theta; \quad (39)$$

$$R_{1122} = (6A'_{11} - 8A'_{12} + 6A'_{22}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 2A'_{11} \cos^4 \theta + 2A'_{12} \sin^4 \theta;$$

$$R_{1133} = 2A'_{12} \cos^2 \theta + 2A'_{23} \sin^2 \theta;$$

$$R_{2233} = 2A'_{13} \sin^2 \theta + 2A'_{23} \cos^2 \theta.$$

Замечание 3. В (39) не включены три *несимметричных* члена R_{1112} , R_{1222} , R_{1233} , так как при последующем интегрировании по симметричному объему внутреннего эллипсоидального бара 1 эти члены дают ноль.

5.2. Взаимная энергия однородного бара 1 и неоднородного бара 2

Чтобы не усложнять объем выкладок, бар 1 по-прежнему считаем однородным. Для нахождения взаимной энергии системы “бар 1 — бар 2” подставим гравитационный потенциал (38) под знак интеграла в (3). Интегрируя по объему бара 1 и учитывая (8), а также формулы

$$I_{iiii} = \rho_b \iiint_{V_b} X_i^4 dV = \frac{3}{35} M_b a_i^4, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$I_{ijij} = \rho_b \iiint_{V_b} X_i^2 X_j^2 dV = \frac{1}{35} M_b a_i^2 a_j^2, \quad (40)$$

$$ij = 1122, 1133, 2233;$$

$$I_{1233} = I_{1222} = I_{1112} = 0,$$

находим взаимную энергию системы “однородный бар 1 — неоднородный бар 2”:

$$W_{\text{mut}} = -\frac{1}{10} \pi G \rho_0 M_b \left\{ 5I - R_{11} a_1^2 - R_{22} a_2^2 - 2A'_3 a_3^2 + \frac{3}{7} A'_{33} a_3^4 + \frac{3}{7} R_{1111} a_1^4 + \frac{3}{7} R_{2222} a_2^4 + \frac{1}{7} R_{1122} a_1^2 a_2^2 + \frac{1}{7} R_{1133} a_1^2 a_3^2 + \frac{1}{7} R_{2233} a_2^2 a_3^2 \right\}. \quad (41)$$

Подставляя далее в (41) коэффициенты из (39), после преобразований находим

$$W_{\text{mut}} = -\frac{1}{10} \pi G \rho_0 M_b \left\{ S_4 \sin^4 \theta + C_4 \cos^4 \theta + CS \cos^2 \theta \sin^2 \theta + S_2 \sin^2 \theta + C_2 \cos^2 \theta + R \right\}. \quad (42)$$

Здесь для краткости введены следующие обозначения:

$$S_4 = \frac{3}{7} A'_{11} a_2^4 + \frac{3}{7} A'_{22} a_1^4 + \frac{2}{7} A'_{12} a_1^2 a_2^2;$$

$$C_4 = \frac{3}{7} A'_{22} a_2^4 + \frac{3}{7} A'_{11} a_1^4 + \frac{2}{7} A'_{12} a_1^2 a_2^2;$$

Таблица 1. Коэффициенты внутреннего потенциала однородного (A'_1, A'_2, A'_3) и неоднородного (третий, четвертый и пятый столбцы) трехосного эллипсоидального бара 2. Также приводятся коэффициенты D_2 и D_4 , используемые в уравнении нелинейных колебаний (53)

$a'_1 = 3, a'_2 = 2, a'_3 = 1;$ $a_1 = 1, a_2 = 2/3,$ $a_3 = 1/3.$	$A'_1 = 0.3126014,$ $A'_2 = 0.5343081,$ $A'_3 = 1.1530905,$	$A'_{11} = 0.0242733$ $A'_{12} = 0.0443413$ $A'_{13} = 0.1050611$ $A'_{23} = 0.2062608$ $A'_{22} = 0.0831326$ $A'_{33} = 0.562893$	$S4 = 0.0433138$ $C4 = 0.0205228$ $CS = 0.063908$ $S2 = -1.338454$ $C2 = -1.093898$	$D_2 = 0.2216933$ $D_4 = 0.0000717$
--	---	---	---	--

$$CS = \frac{6}{7} A'_{12} a_1^4 + \frac{6}{7} A'_{12} a_2^4 + \frac{1}{7} (6A'_{11} - 8A'_{12} + 6A'_{22}) a_1^2 a_2^2;$$

$$S_2 = -2A'_1 a_2^2 + \frac{2}{7} A'_{13} a_2^2 a_3^2 + \frac{2}{7} A'_{23} a_1^2 a_3^2 - 2A'_2 a_1^2; \quad (43)$$

$$C_2 = -2A'_2 a_2^2 + \frac{2}{7} A'_{13} a_1^2 a_3^2 + \frac{2}{7} A'_{23} a_2^2 a_3^2 - 2A'_1 a_1^2;$$

$$R = 5I - 2A'_3 a_3^2 + \frac{3}{7} A'_{33} a_3^4.$$

При $\theta = 0$ (см. также раздел 2), когда наибольшие оси баров Ox_1 совпадают, взаимная энергия (42) принимает свое минимальное (максимальное по модулю) значение:

$$W_{\text{mut}}^0(\theta = 0) = -\frac{1}{10} \pi G \rho_0 M_b [C_4 + C_2 + R]. \quad (44)$$

Составляя по аналогии с разделом 2 разность

$$\tilde{W}_{\text{mut}}(\theta) = W_{\text{mut}}(\theta) - W_{\text{mut}}^0, \quad (45)$$

после преобразований находим

$$\tilde{W}_{\text{mut}}(\theta) = \frac{1}{10} \pi G \rho_0 M_b \{D_4 \sin^4 \theta + D_2 \sin^2 \theta\}, \quad (46)$$

где

$$D_2 = 2C_4 - CS + C_2 - S_2 \geq 0;$$

$$D_4 = CS - S_4 - C_4 \geq 0. \quad (47)$$

Замечание 4. Проверка выражения (46) подтверждает: в случае *круговой симметрии* внутреннего бара $a_1 = a_2$ действительно выполняются равенства

$$D_4 = D_2 = 0, \quad (48)$$

и тогда взаимные либрации баров исчезают. Но и в случае *трехосного* бара 1 $a_1 \neq a_2$, помещенного в бар 2 с *круговой симметрией*, когда

$$A_1 = A_2; \quad A_{11} = A_{22} = A_{12}; \quad A_{13} = A_{23}, \quad (49)$$

либраций также не будет.

5.3. Лагранжиан и уравнение либраций

Момент сил, действующих со стороны внешнего бара на внутренний бар, согласно формуле (13), будет теперь равен:

$$M = \frac{1}{10} \pi G \rho_0 M_b (D_2 + 2D_4 \sin^2 \theta) \sin 2\theta. \quad (50)$$

Кинетическая энергия колебательного движения системы баров (сравните с разделом 3) также изменится и будет теперь равна

$$K = \frac{1}{2} I_3^{(1)} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_3^{(2)} \dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \frac{I_3^{(1)} \cdot I_3^{(2)}}{I_3^{(1)} + I_3^{(2)}}, \quad (51)$$

$$I_3^{(1)} = \frac{1}{5} M_1 (a_1^2 + a_2^2), \quad I_3^{(2)} = \frac{1}{7} M_2 (a_1^2 + a_2^2).$$

Составим лагранжиан для системы $L(\theta)$:

$$L(\theta) = K - \tilde{W}_{\text{mut}} = \frac{1}{2} \frac{I_3^{(1)} \cdot I_3^{(2)}}{I_3^{(1)} + I_3^{(2)}} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 -$$

$$- \frac{1}{10} \pi G \rho_0 M_1 [D_4 \sin^4 \theta + D_2 \sin^2 \theta]. \quad (52)$$

С учетом лагранжиана (52), второе уравнение движения Лагранжа (22) дает дифференциальное уравнение колебаний для угла $\theta(t)$:

$$\ddot{\theta} + \frac{\pi G \rho_0}{2(a_1^2 + a_2^2)} \left[1 + \frac{I_3^{(1)}}{I_3^{(2)}} \right] \times$$

$$\times (D_2 + 2D_4 \sin^2 \theta) \sin 2\theta = 0. \quad (53)$$

Новое уравнение нелинейных колебаний (53) отличается от полученного ранее уравнения для системы однородных баров (23).

Численные расчеты мы проведем для приемлемых относительных значений полуосей бара 2 и бара 1

$$a'_1 = 3, \quad a'_2 = 2, \quad a'_3 = 1;$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2/3, \quad a_3 = 1/3. \quad (54)$$

Соответствующие коэффициенты A'_i, A'_{ij}, D_2, D_4 и другие приведены в табл. 1. Коэффициенты потенциала с двойными индексами из (37) были найдены численно.

Выясняется, что $\frac{2D_4}{D_2} \sim 10^{-3}$; поэтому, ввиду ма-

лости коэффициента D_4 , членом $2D_4 \sin^2 \theta$ в правой части (53) можно пренебречь, и тогда с хорошим приближением уравнение нелинейных колебаний представим в виде

$$\ddot{\theta} + \frac{\pi G \rho_0 D_2}{2(a_1^2 + a_2^2)} \left[1 + \frac{I_3^{(1)}}{I_3^{(2)}} \right] \sin 2\theta = 0. \quad (55)$$

В линейном приближении по θ уравнение (55) примет вид

$$\ddot{\theta} + \frac{\pi G \rho_0}{a_1^2 + a_2^2} D_2 \left[1 + \frac{I_3^{(1)}}{I_3^{(2)}} \right] \theta = 0. \quad (56)$$

Период малых либраций, согласно уравнению (56), равен

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\pi G \rho_0}{a_1^2 + a_2^2} \left[1 + \frac{I_3^{(1)}}{I_3^{(2)}} \right] D_2}}. \quad (57)$$

Учитывая поправку за неоднородность (37), вместо прежней оценки $\frac{I_3^{(1)}}{I_3^{(2)}} = \frac{1}{3}$ теперь имеем

$$\frac{I_3^{(1)}}{I_3^{(2)}} \approx \frac{7}{15}. \quad (58)$$

Тогда по формуле (57) получим период малых либраций

$$T_0 \approx 1.2 \times 10^8 \text{ лет}. \quad (59)$$

Заметим, найденный период малых либраций оказывается в 2.7 раза длиннее, чем период либраций однородных баров.

Период нелинейных либраций бара 1 в неоднородном баре 2 рассчитывается по найденной выше формуле (33), в которой T_0 из (57), см. рис. 4.

6. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе разработан новый аналитический метод для изучения взаимных поворотных колебаний (либраций) гравитирующих звездных эллипсоидов, образующих двойные бары в дисковых галактиках. Модель двойного бара представлена суперпозицией двух концентрических несоосных эллипсоидов, вложенных друг в друга и имеющих разные размеры и массы. Отметим, что движение звезд в эллипсоидальных компонентах двойного бара является (в звездно-динамическом смысле) бесстолкновительным, вследствие чего бары не вытесняют материю друг друга и представляют собой взаимопроникающую суперпозицию компонентов. Такие модели с суперпозицией потенциалов нескольких компонентов

(гало-бар-диск) часто используются в динамике звездных систем, см., например, [5, 15].

Мы рассмотрели два случая: модель с однородными эллипсоидами и технически более сложную модель с неоднородным внешним баром 2. Для каждой модели получены выражения взаимной гравитационной энергии эллипсоидальных компонентов и рассчитан момент сил между ними. Алгоритм вычисления момента сил в данном методе очень простой — для этого достаточно найти производную от взаимной энергии по углу либрации. Это заметно упрощает вывод дифференциальных уравнений нелинейных либраций баров относительно их “срединной” плоскости.

Так как колебания в общем случае нелинейные, то при изучении динамики двойных баров важным является вопрос правильной оценки из наблюдений взаимной ориентации составляющих его трехосных компонентов.

Изучение глобальных либраций в двойных барах актуально в связи с тем, что несмотря на заметный прогресс в изучении образования и эволюции плоских галактик, исследователи до сих пор не пришли к согласию в вопросе о доминирующем механизме образования баров, в том числе и двойных (о механизмах образования бар-мод см., например, [16]). Так как бар-мода является самой крупномасштабной, изучение динамики и эволюции галактик удобно начинать с изучения именно баров.

В данной работе найдены решения уравнений либрации компонентов двойного бара, причем как для нелинейного случая, так и в приближении гармонических колебаний. Были вычислены частоты и периоды либраций компонентов двойного бара. Установлено, что периоды либраций компонентов в двойном баре составляют десятки миллионов земных лет. С учетом неоднородности в распределении плотности у компонентов бара, периоды таких либраций могут, по-видимому, быть близкими к периодам движения звезд в окрестностях двойного бара. Весьма желательны поэтому прямая наблюдательная проверка данных эффектов и проведение дальнейших исследований с уточнением структуры компонентов в двойных барах.

Выше отмечалось, что кроме вращательных либраций существуют и другие механизмы взаимодействия бара с внешними подсистемами в галактиках. Так, эффект замедления вращения бара возможен как за счет передачи углового момента звездам [2], так и за счет влияния динамического трения между баром и гало [17]. Существует и так называемый “buckling” — эффект изменения формы бара [18], приводящий к округлению его формы и к дополнительному разогреву звездного диска. Предложенный в нашей работе метод расчета момента сил на бар указывает на существова-

ние еще одного механизма, влияющего на вращение (торможение или ускорение) бара через гравитационное влияние на него внешнего гало.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *J. A. Sellwood and A. Wilkinson*, Reports on Progress in Physics, **56**, 173 (1993).
2. *E. Athanassoula*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **341**, 117903 (2003).
3. *T. Kim, E. Athanassoula, K. Sheth, et al.*, Astrophys. J. **922**, 196 (2021).
4. *P. Erwin*, Astron. and Astrophys. **415**, 941 (2004).
5. *M. C. Sormani, O. Gerhard, M. Portail, et al.*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **514**, L1 (2022).
6. *K. Saha and W. Maciejewski*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **433**, L44 (2013).
7. *H. Wozniak*, Astron. and Astrophys. **575**, A7 (2015).
8. *A. de Lorenzo-Caceres, J. Mendez-Abreu, B. Thorne, and L. Costantin*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **484**, 665 (2019).
9. *B. P. Kondratyev and E. N. Kireeva*, Baltic Astronomy **25**, 247 (2016).
10. *Б. П. Кондратьев*, Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур (М.: Наука, 1989).
11. *Б. П. Кондратьев*, Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями (М.: Мир, 2007).
12. *S. Chandrasekhar*, *Ellipsoidal Figures of Equilibrium* (Yale University Press, New Haven, 1969).
13. *B. P. Kondratyev*, Solar System Research **46**, 352 (2014).
14. *B. P. Kondratyev*, Soviet Astron. **26**, 279 (1982).
15. *A. T. Bajkova and V. V. Bobylev*, Astron. Rep., **65**, 737 (2021).
16. *E. V. Polyachenko*, Astron. Lett., **39**, 72 (2013).
17. *J. A. Sellwood*, Astrophys. J., **637**, 567 (2006).
18. *R. Chiba and R. Schönrich*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc., **505**, 2412 (2021).