

## ГАЛАКТИКИ И СКОПЛЕНИЯ ГАЛАКТИК В НАБЛЮДЕНИЯХ И ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЯХ

© 2022 г. М. Демянский<sup>1, 2</sup>, А. Дорошкевич<sup>3, 4, \*</sup>, Т. Ларченкова<sup>3</sup>, С. Пилипенко<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Institute of Theoretical Physics, University of Warsaw, Warsaw, Poland*

<sup>2</sup> *Department of Astronomy, Williams College, Williamstown, USA*

<sup>3</sup> *Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, Россия*

<sup>4</sup> *Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия*

\*E-mail: dorr@asc.rssi.ru

Поступила в редакцию 12.05.2022 г.

После доработки 11.07.2022 г.

Принята к публикации 18.07.2022 г.

Анализ свойств 1157 галактик, групп и скоплений галактик подтверждает зависимость вириальной скорости от массы гало  $v_{\text{vir}} = v_m(M_{\text{vir}}/10^{12} M_{\odot})^{1/3}$  с единым показателем степени и разными значениями  $v_m \simeq 400$  км/с для галактик с  $M_{\text{vir}} \leq 10^{12} M_{\odot}$  и  $v_m \simeq 160$  км/с для скоплений галактик с  $M_{\text{vir}} \geq 10^{12} M_{\odot}$ . Единый показатель степени подтверждает высокую степень универсальности процессов образования гало темной материи, а различие значений  $v_m$  соответствует хорошо известному различию средних плотностей галактик и скоплений галактик и вводит новый масштаб  $M \simeq 10^{12} M_{\odot}$  в спектр мощности возмущений. Современные численные модели, использующие спектр мощности, полученный по наблюдениям WMAP и Planck, хорошо воспроизводят наблюдаемые свойства скоплений галактик, но не могут воспроизвести наблюдаемые параметры галактик. Также показано, что касп в профиле плотности темной материи приводит к конечной плотности газа и звезд в центре гало (профиль Бюркerta).

*Ключевые слова:* космология, галактики, скопления галактик, темное гало

DOI: 10.31857/S0004629922100048

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Стандартная космологическая модель (СКМ) основана на измерениях реликтового излучения космическими аппаратами WMAP [1] и Planck [2, 3]. СКМ успешно описывает многие свойства галактик и скоплений галактик, а также их собиранье в элементы крупномасштабной структуры — филаменты и сверхскопления. Основные результаты СКМ суммированы в обзорах [4–14], современные методы численного моделирования этих процессов рассматривались в работах [15–17]. Обсуждение возможных расширений СКМ можно найти в статьях [18–20].

Согласно СКМ, все гало темной материи (ТМ) образованы под действием гравитационной неустойчивости из случайных начальных возмущений, которые описываются спектром мощностей. Структура вириализованных объектов зависит от универсального процесса релаксации конденсирующихся частиц ТМ и барионов [21–24], ведущего к эффективному росту их плотности и энтропии. Численные модели [25–28] подтвержда-

ют, что и высокая степень универсальности процессов образования всех гало ТМ, и качественное подобие их свойств базируются на законах ньютоновской механики и гравитации.

Эти свойства гало ТМ можно сравнить с наблюдаемыми свойствами галактик и скоплений галактик [29–43]. Такое сравнение показывает [44, 45], что свойства гало ТМ с массами  $M \geq 10^{12} M_{\odot}$  и с массами  $M \leq 10^{12} M_{\odot}$  отличаются. Это различие не появляется в численных моделях, оно может быть связано с формой спектра мощности возмущений и заслуживает отдельного рассмотрения.

Важно отметить, что галактики представляют особую популяцию гало ТМ, эволюция которой привела к образованию звезд. Это условие выделяет галактики среди множества гало ТМ, и по современным оценкам [7, 46] в них содержится лишь около 20% барионов. Свойства галактик могут отличаться и от свойств большинства гало ТМ той же массы, и от большинства гало ТМ в

численных моделях. Большое разнообразие свойств галактик ведет к дальнейшему дроблению их популяции и усложнению выбора соответствующих гало ТМ в численных моделях.

В наблюдениях ожидаемая универсальность процессов образования гало ТМ проявляется как единый показатель степени в выражении для средней вириальной плотности (см. ниже выражение (4)) и для зависимости вириальной скорости  $v_{\text{vir}}$  от вириальной массы гало  $M_{\text{vir}}$ :

$$v_{\text{vir}} \simeq v_m (M_{\text{vir}}/10^{12} M_{\odot})^{1/3}. \quad (1)$$

Эти соотношения выполняются и в численных моделях [47, 48] (см. далее выражения (6) и (7)), что позволяет рассматривать все гало ТМ – от карликовых галактик до скоплений галактик – как однопараметрическую последовательность, в которой все параметры зависят от массы гало. Такой подход позволяет связать характеристики наблюдаемых гало с составом ТМ и спектром возмущений [44, 45, 49]. При этом хорошо известные различия вириальных плотности и скорости галактик и скоплений галактик подтверждают, что свойства возмущений отличаются для масс  $10^{12} M_{\odot} \leq M_{\text{vir}}$  и  $10^{12} M_{\odot} \geq M_{\text{vir}}$ . Эти различия в настоящее время проявляются в сложной форме спектра возмущений, и можно ожидать, что они возникают на ранних стадиях эволюции Вселенной. Но нельзя исключить и возможное (ограниченное) влияние последующей эволюции возмущений.

Отсутствие надежных и представительных каталогов наблюдаемых гало ТМ, а также их анализа в численных моделях с разными спектрами мощности, не позволяют однозначно ответить на вопрос о причинах возникновения обсуждаемых различий. Тем не менее полезен и анализ уже имеющихся на сегодняшний день наблюдений. Поэтому в настоящей работе были проанализированы шесть каталогов наблюдаемых скоплений галактик [29–34], включающих 406 скоплений, каталог групп галактик [37], содержащий параметры 349 групп, и шесть каталогов галактик [38–43], включающих 519 галактик. Несмотря на значительные неопределенности оценок, данные наблюдений подтверждают зависимость (1) вириальной скорости от массы гало во всем рассмотренном интервале масс  $10^6 \leq M_{\text{vir}}/M_{\odot} \leq 10^{15}$ .

Сделанные в настоящей работе выводы подтверждают результаты анализа численных моделей скоплений галактик [48], позволяют распространить это описание на галактики вплоть до масс  $10^6 M_{\odot}$ , а также подчеркивают принципиальное значение различия параметров галактик и скоплений галактик. Наши результаты позволяют связать свойства гало ТМ со спектром мощно-

сти возмущений, вводят характерную массу  $M \simeq 10^{12} M_{\odot}$  и дают феноменологическое описание процесса образования гало ТМ.

В настоящей работе мы характеризуем гало ТМ круговой скоростью  $v_{\text{vir}}$  на вириальном радиусе, что предполагает сферическую симметрию гало. Вместо этой величины можно использовать дисперсию скоростей  $\sigma_v^2$ , которая, однако, чувствительна к внутренней структуре гало ТМ. Сравнение этих описаний станет возможным, когда будет накоплено достаточно наблюдательных данных.

В разделе 2 кратко суммируются важнейшие свойства гало ТМ, полученные в численных моделях. В разделе 3 приведены результаты анализа галактик, групп и скоплений галактик. Особенности восстановления свойств гало ТМ по наблюдениям звезд и газа и решение известной проблемы “ядро–касп” (“core–cusp”) рассмотрены в разделе 4. Полученные результаты обсуждаются в разделе 5. В разделе 6 сформулированы основные выводы. В Приложениях I и II более подробно рассмотрены отдельные свойства гало ТМ.

### 1.1. Параметры Стандартной Космологической модели

В настоящей работе используются следующие значения параметров СКМ (постоянной Хаббла  $H_0$ , безразмерных плотностей темной энергии  $\Omega_{\Lambda}$ , темной материи  $\Omega_{DM}$ , барионов  $\Omega_b$ , и кривизны Вселенной  $\Omega_c$ ) [3]:

$$H^2 = H_0^2 E(z)^2 = H_0^2 [(1+z)^3 \Omega_m + \Omega_{\Lambda}],$$

$$H_0 \simeq (67.4 \pm 0.5) \text{ км/с/Мпк},$$

$$\langle \rho_m \rangle = 37(1+z)^3 \Theta_m M_{\odot}/\text{кпк}^3, \quad \Omega_m = \Omega_m/0.28, \quad (2)$$

$$\Omega_{\Lambda} \simeq 0.72, \quad \Omega_{DM} \simeq 0.24,$$

$$\Omega_b \simeq 0.04, \quad \Omega_m \Omega_{DM} + \Omega_b = 0.28, \quad \Omega_c \ll 1,$$

где  $z$  – красное смещение,  $\langle \rho_m \rangle$  – средняя плотность нерелятивистского вещества.

### 1.2. Вириальные параметры гало ТМ

Популяцию сферических гало ТМ можно рассматривать как двухпараметрическую последовательность стационарных объектов, которая описывается вириальной массой  $M_{\text{vir}}$  и вириальным радиусом  $R_{\text{vir}}$ . Для сферически симметричных га-

ло справедливы следующие соотношения для вириальных параметров:

$$\begin{aligned} M_{\text{vir}} &= \frac{4\pi}{3} \langle \rho_{\text{vir}} \rangle R_{\text{vir}}^3, \\ U + W &= \frac{U}{2} = -\frac{\theta_{\text{vir}}}{2} G \frac{M_{\text{vir}}^2}{R_{\text{vir}}}, \\ v_{\text{vir}}^2 &= G \frac{M_{\text{vir}}}{R_{\text{vir}}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $U$  и  $W$  – потенциальная и внутренняя энергии вириализованного гало,  $v_{\text{vir}}$  – вириальная скорость,  $\langle \rho_{\text{vir}} \rangle$  – средняя вириальная плотность. Фактор  $\theta_{\text{vir}}$  характеризует зависимость потенциальной энергии от профиля плотности гало (часто используемое значение  $\theta_{\text{vir}} = 3/5$  относится к идеальной модели вириализованного гало ТМ с постоянной плотностью). Для дальнейшего вириальный радиус и среднюю вириальную плотность гало ТМ удобно записать через характерные массу  $M_{12}$  и скорость  $v_m$ :

$$\begin{aligned} M_{12} &= M_{\text{vir}}/10^{12} M_{\odot}, \\ v_m &= v_{\text{vir}}/M_{12}^{1/3} = 100 v_{100} \text{ км/с}, \\ R_{\text{vir}} &= \frac{GM_{\text{vir}}}{v_{\text{vir}}^2} \simeq 431 \text{ кпк} \frac{M_{12}^{1/3}}{v_{100}^2}, \\ \langle \rho_{\text{vir}} \rangle &= \frac{3M_{\text{vir}}}{4\pi R_{\text{vir}}^3} 3.0 \times 10^3 v_{100}^6 \frac{M_{\odot}}{\text{кпк}^3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Соотношения (3) и (4) позволяют (в первом приближении) оценивать структурные параметры гало ТМ и сравнивать их свойства. Учет вращения и несферичности гало ТМ требует более сложного описания и специальных наблюдений.

## 2. ГАЛО ТМ В ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЯХ

Современные численные модели, использующие ньютоновские механику и гравитацию, хорошо воспроизводят процессы эволюции возмущений и образования гало ТМ по заданному спектру мощности возмущений. В масштабах скоплений галактик спектр возмущений установлен по наблюдениям реликтового излучения. Поэтому сравнение численных моделей с наблюдениями скоплений галактик подтверждает адекватность и успешность этих моделей.

В масштабах галактик спектр возмущений известен плохо. В численных моделях гало ТМ образуются в большом диапазоне масс, и количество гало в моделях значительно превосходит количество наблюдаемых галактик (missing satellite problem) [50]. Поэтому даже выделение в моделях популяции гало ТМ, соответствующей галакти-

кам, требует обсуждения возможности образования звезд в каждом из таких гало.

Тем не менее численные модели позволяют получить ценную предварительную информацию о свойствах вириализованных гало ТМ. Отметим здесь лишь три наиболее важных свойства, которые получены с помощью этих моделей:

1. спектр возмущений воспроизводит как свойства крупномасштабной структуры, так и свойства массивных гало ТМ;

2. единый профиль плотности гало ТМ хорошо аппроксимируется формулой NFW (25) [51, 52];

3. степенная зависимость вириальной скорости от вириальной массы гало (1) воспроизводится в широком интервале масс [26, 27, 48].

### 2.1. Вириальные характеристики гало ТМ в численных моделях

В работах [47, 48] было показано, что в численных моделях скоплений галактик с высокой точностью наблюдается степенная зависимость дисперсии скоростей от массы и красного смещения:

$$\begin{aligned} \sigma_v &= \sigma_0 (E(z) M_{12})^\gamma, \\ \sigma_0 &= 108(1 \pm 0.004) \text{ км/с}, \\ \gamma &\simeq 0.336 \pm 0.0026, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $E(z)$  определено в (2). Полученную зависимость можно рассматривать как количественную характеристику процесса релаксации гало ТМ по скоростям [22–24] для принятого спектра мощности.

В более поздних работах [26, 27] для 30000 гало ТМ с массами  $10^{11} \leq M_{\text{vir}}/M_{\odot} \leq 10^{15}$  были получены следующие значения средней скорости и средней вириальной плотности:

$$\begin{aligned} \langle v_m \rangle &\simeq 160(1 \pm 0.01) \text{ км/с}, \\ \langle \rho_{\text{vir}} \rangle &\simeq 5.4 \times 10^4 (1 \pm 0.04) M_{\odot}/\text{кпк}^3. \end{aligned} \quad (6)$$

Для 25000 гало ТМ с массами  $10^9 \leq M_{\text{vir}}/M_{\odot} \leq 10^{14}$ :

$$\begin{aligned} \langle v_m \rangle &\simeq 150(1 \pm 0.01) \text{ км/с}, \\ \langle \rho_{\text{vir}} \rangle &\simeq 2.8 \times 10^4 (1 \pm 0.04) M_{\odot}/\text{кпк}^3. \end{aligned} \quad (7)$$

Отметим, что основным результатом проведенного анализа – постоянная скорость  $v_m$  и постоянная средняя плотность гало  $\langle \rho_{\text{vir}} \rangle$  во всем интервале масс – согласуется с результатом, полученным в работе [48]. Разница в 1.5 раза между оценками скорости (5) и (6), (7) может быть вызвана использованием  $\sigma_v$  и  $v_{\text{vir}}$ , методическими различиями как численных моделей, так и процедурой выделения популяции гало.

**Таблица 1.** Наблюдаемые параметры галактик и скоплений галактик

$N$	$N_{obj}$	$M_{min} - M_{max}$ $M/M_{\odot}$	$\langle v_{\gamma} \rangle$ , км/с	$\langle \gamma \rangle$	$\langle v_m \rangle$ , км/с	Работа
1	120	$10^{14} - 10^{15}$	150	0.31	135 ( $1 \pm 0.07$ )	[29]
2	90	$10^{14} - 10^{15}$	141	0.34	150 ( $1 \pm 0.02$ )	[30]
3	28	$10^{14} - 10^{15}$	144	0.34	147 ( $1 \pm 0.04$ )	[31]
4	18	$10^{14} - 10^{15}$	134	0.34	145 ( $1 \pm 0.04$ )	[34]
	256	$10^{14} - 10^{15}$	149	0.34	142 ( $1 \pm 0.04$ )	
5	100	$10^{14} - 10^{15}$	161	0.35	175 ( $1 \pm 0.02$ )	[35]
6	50	$10^{14} - 10^{15}$	158	0.35	174 ( $1 \pm 0.01$ )	[36]
	150	$10^{14} - 10^{15}$	161	0.35	174 ( $1 \pm 0.02$ )	
7	31	$10^6 - 10^8$	170	0.26	440 ( $1 \pm 0.19$ )	[38]
8	20	$10^8 - 10^{10}$	160	0.26	354 ( $1 \pm 0.20$ )	[39]
9	210	$10^8 - 10^{12}$	317	0.30	360 ( $1 \pm 0.16$ )	[40]
10	85	$10^9 - 10^{12}$	420	0.33	437 ( $1 \pm 0.22$ )	[41]
11	92	$10^9 - 10^{12}$	420	0.32	450 ( $1 \pm 0.21$ )	[41]
12	81	$10^9 - 10^{12}$	234	0.24	353 ( $1 \pm 0.40$ )	[43]
	402	$10^9 - 10^{12}$	353	0.28	389 ( $1 \pm 0.13$ )	

$$\langle v_{\gamma} \rangle = \langle v_{vir} / M_{12}^{\gamma} \rangle, \langle v_m \rangle = \langle v_{vir} / M_{12}^{1/3} \rangle.$$

Как будет показано ниже, эти результаты согласуются с наблюдениями скоплений и групп галактик вплоть до масс  $10^{12} M_{\odot}$ , но противоречат наблюдениям галактик. Это указывает на необходимость уточнения спектра начальных возмущений.

### 3. НАБЛЮДАЕМЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГАЛАКТИК И СКОПЛЕНИЙ ГАЛАКТИК

Перейдем к обсуждению наблюдаемых вириальных параметров галактик и скоплений галактик, массовые оценки которых стали доступны только в последнее время и все еще имеют значительные неопределенности. Тем не менее имеющиеся на сегодня данные наблюдений необходимо сравнить с результатами численного моделирования. Для этого мы используем данные шести каталогов наблюдаемых скоплений галактик [29–34], включающих 406 скоплений, каталог 348 групп галактик [37], и шесть каталогов галактик [38–43], включающих 519 галактик.

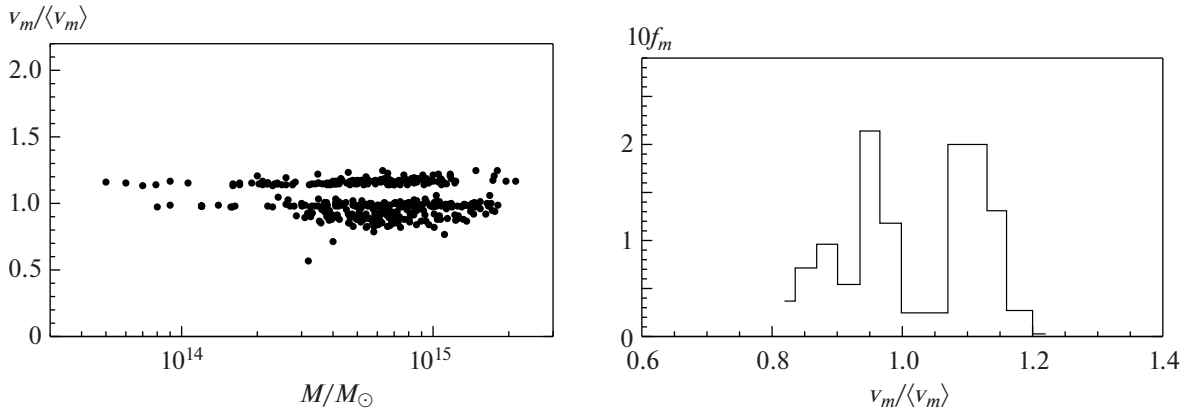
Результаты анализа каталогов галактик и скоплений галактик представлены в табл. 1, где слева направо приведены:  $N$  – номер каталога по порядку,  $N_{obj}$  – количество объектов в каталоге,  $(M_{min} - M_{max})$  – диапазон масс объектов, параметры  $v_{\gamma}$  и  $\gamma$  получены независимой аппроксимацией функции  $v_{vir} = v_{\gamma} M_{12}^{\gamma}$ , значения  $v_m$  соответ-

ствуют  $\gamma = 1/3$  (1). Помимо анализа каждого отдельного каталога, в этой таблице над чертой приведены данные для 256 скоплений галактик из первых четырех каталогов, для 150 скоплений галактик из пятого и шестого каталогов, а также данные для выборки 402 галактик, для которых  $0.8 \leq v_m / \langle v_m \rangle \leq 1.3$ .

Отметим, что каталог групп галактик [37] включает очень разные объекты с массами  $M_{12} \sim 1$ . Этот каталог требует специального анализа и использован ниже (в разделе 3.3 и на рис. 3) для иллюстрации непрерывности распределения гало ТМ по массам.

#### 3.1. Вириальные характеристики скоплений галактик

Вириальные параметры 406 скоплений галактик [29–34] получены как с помощью гравитационного линзирования, так и с использованием рентгеновских, оптических и радионаблюдений. Во всех случаях при интерпретации наблюдений использовались соотношения между массой и дисперсией скоростей (5), а также возможная связь плотности с наблюдаемым красным смещением, что снижает объективное значение этих данных.



**Рис. 1.** Слева – скорость  $v_m/\langle v_m \rangle$  как функция массы для 406 скоплений галактик. Справа – распределение 406 скоплений галактик по скоростям  $v_m/\langle v_m \rangle$ .

Популяция скоплений галактик разделилась на две части по величине средней скорости  $\langle v_m \rangle$  (см. рис. 1). Так, для 256 скоплений показатель степени и средняя скорость равны

$$\gamma = 0.34, \quad \langle v_m \rangle \simeq 142(1 \pm 0.04) \text{ км/с}, \quad (8)$$

а для 150 более плотных скоплений

$$\gamma = 0.35, \quad \langle v_m \rangle \simeq 174(1 \pm 0.02) \text{ км/с}. \quad (9)$$

В рамках сферической модели появление двух популяций скоплений с близким  $M_{\text{vir}}$  и разными  $v_m$  невозможно, поэтому можно ожидать, что различия (8) и (9) связаны с разными методами наблюдения. Все наблюдения выполнены с высокой точностью ( $\sim 1\%$ ) в рамках специальных программ, при этом вириальные параметры определяются в результате сложного пересчета, что ведет к накоплению систематических ошибок. Например, измеряемая температура газа и дисперсия скоростей  $\sigma_v$  отличаются от круговой скорости  $v_{\text{vir}}$ , а измеряемый эффект Сюняева–Зельдовича с вириальными параметрами связан сложным образом. Для получения представительных результатов необходимы специальные программы наблюдений.

Полученные результаты (8) и (9) отличаются от ранних оценок в численных моделях (5), но близки к более поздним оценкам (6) и (7). Это значит, что умеренные различия наблюдательных и модельных результатов могут быть вызваны техническими причинами, и численные модели хорошо воспроизводят наблюдения.

### 3.2. Вириальные характеристики галактик

Вириальные параметры галактик зависят от неизвестного спектра возмущений. Поэтому их анализ и важнее, и интереснее анализа скоплений

галактик. К сожалению, в настоящее время все еще нет специальных программ таких наблюдений, поэтому мы используем кривые вращения галактик, полученные при решении других задач.

Вириальные параметры 519 галактик получены из наблюдений лучевых скоростей в периферийных областях галактик [38–43]. При этом несферичность гало ТМ и недооценка вириального радиуса ведут к некоторой недооценке вириальной массы гало и увеличивает значение дисперсии лучевых скоростей.

Для 519 галактик получены следующие средние параметры:

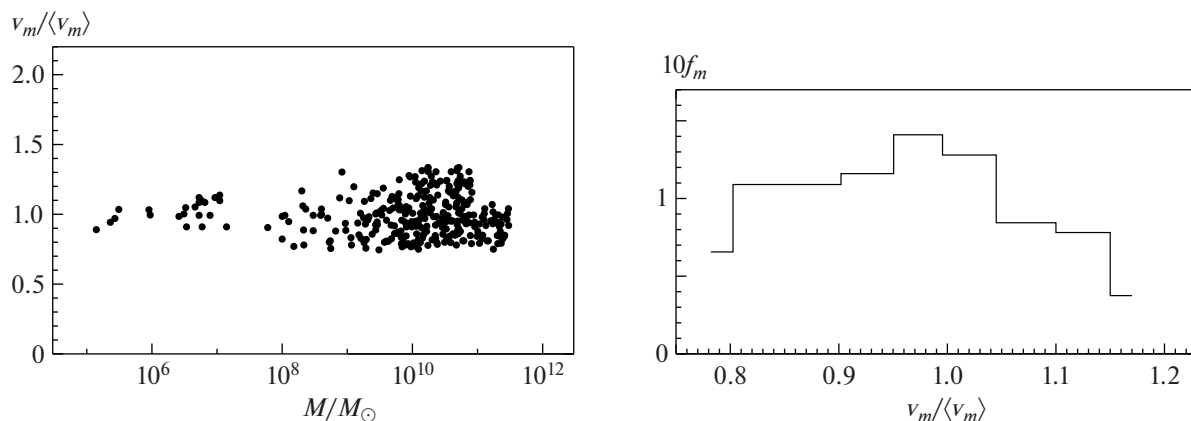
$$\begin{aligned} \gamma &= 0.3, \\ \langle v_m \rangle &\simeq 422(1 \pm 0.25) \text{ км/с}, \\ 10^6 &\leq M_{\text{vir}}/M_\odot \leq 10^{12}. \end{aligned} \quad (10)$$

Как было отмечено выше, в табл. 1 приведены параметры более компактной популяции 402 галактик, выделенной из полной выборки условием  $0.8 \leq v_m/\langle v_m \rangle \leq 1.3$  (см. рис. 2). Для этих галактик получены близкие значения  $\gamma$  и  $\langle v_m \rangle$ :

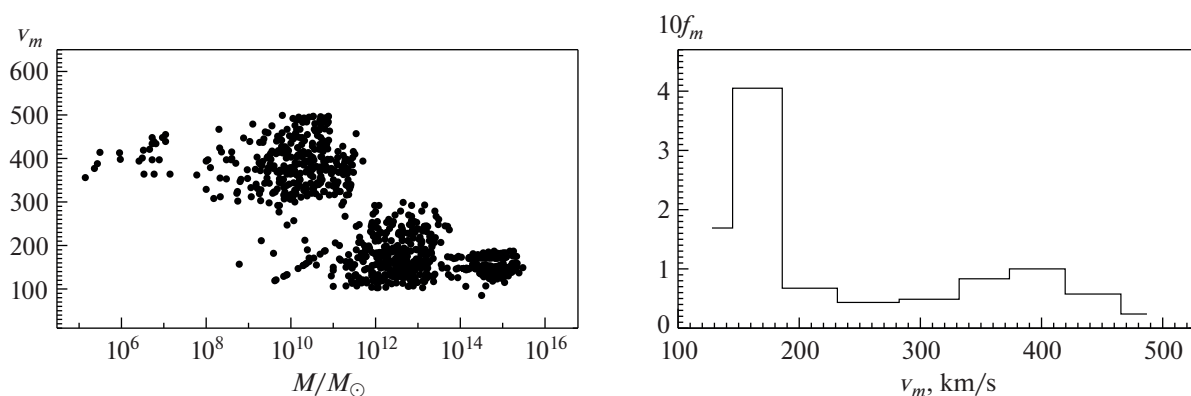
$$\begin{aligned} \gamma &= 0.28, \\ \langle v_m \rangle &\simeq 389(1 \pm 0.13) \text{ км/с}, \\ 10^6 &\leq M_{\text{vir}}/M_\odot \leq 10^{12}. \end{aligned} \quad (11)$$

Отметим, что для каталогов 7 и 8 (маломассивные галактики) при  $\gamma = 0.26$  значения  $\langle v_\gamma \rangle$  близки к значениям  $\langle v_m \rangle$  скоплений галактик. Это может быть связано с малой представительностью выборок, но может указывать и на особенности процессов образования таких галактик.

Полученные для галактик значения  $\gamma \simeq 1/3$  в выражении (11) совпадают с полученными выше для скоплений галактик. Но скорость  $v_m$  в 2.5–3 раза превосходит значения, полученные и в



**Рис. 2.** Слева — скорость  $v_m(M_{\text{vir}})/\langle v_m \rangle$  как функция массы 402 галактик. Справа — распределение 402 галактик по скоростям  $v_m/\langle v_m \rangle$ .



**Рис. 3.** Слева — скорость как функция массы для 1128 галактик, групп и скоплений галактик. Справа — распределение этих объектов по скоростям  $v_m$ .

численных моделях (6), (7), и для скоплений галактик (8), (9). Эти различия скоростей соответствуют хорошо известному различию плотностей галактик  $\rho_{gal}$  и скоплений галактик  $\rho_{cls}$

$$\langle \rho_{gal} \rangle / \langle \rho_{cls} \rangle = [\langle v_m^{gal} \rangle / \langle v_m^{cls} \rangle]^6 \simeq 10^3. \quad (12)$$

### 3.3. Наблюдаемые характеристики групп галактик

Опубликованные в работе [37] параметры 394 групп галактик основаны на оптических наблюдениях. Каталог содержит как группы маломассивных галактик (часто несферические), так и бедные скопления галактик. Такая неоднородность популяции увеличивает разброс данных. Эти объекты заполняют интервал между галактиками и скоплениями галактик и подчеркивают непрерывность перехода от плотных галактик к

менее плотным скоплениям (см. рис. 3). Для 349 групп в интервале масс  $10^{10} \leq M_{\text{vir}}/M_{\odot} \leq 10^{14}$  и скоростей  $10 \text{ км/с} \leq v_m \leq 300 \text{ км/с}$  получаем

$$\langle v_m \rangle \simeq 177(1 \pm 0.26) \text{ км/с}. \quad (13)$$

### 3.4. Надежность и точность наблюдательных оценок

Массовые оценки вириальных параметров галактик и скоплений галактик были получены лишь в последнее время. Но используемые методы все еще не позволяют получить надежные оценки параметров гало ТМ. При этом высокая точность наблюдений в каждом каталоге не гарантирует точности оценок масс и скоростей. Так, например, в разных каталогах для четырех

скоплений приведены разные значения массы и плотности

$$A133: M_{12} = 120, 230, 550, \rho_{\text{vir}} = (2.9, 7.1, 2.9) \times 10^4 M_{\odot}/\text{кпк}^3,$$

$$A383: M_{12} = 120, 490, 810, \rho_{\text{vir}} = (29, 8.3, 1.0) \times 10^4 M_{\odot}/\text{кпк}^3,$$

$$A1033: M_{12} = 240, 480, 240, \rho_{\text{vir}} = (7.9, 3.0, 9.5) \times 10^4 M_{\odot}/\text{кпк}^3,$$

$$A2029: M_{12} = 1080, 1660, \rho_{\text{vir}} = (0.9, 0.9) \times 10^4 M_{\odot}/\text{кпк}^3.$$

Этот список может быть продолжен.

Для галактик точность оценок  $v_m$  и  $M_{\text{vir}}$  главным образом определяется возможной несферичностью гало ТМ и недооценками радиуса  $R_{\text{vir}}$ , что ведет к (умеренной) переоценке скорости  $v_m$ :

$$\frac{dv_m}{v_m} = \frac{1}{3} \left( \frac{dv_{\text{vir}}}{v_{\text{vir}}} - \frac{dR_{\text{vir}}}{R_{\text{vir}}} \right),$$

$$\frac{dM_{\text{vir}}}{M_{\text{vir}}} = 2 \frac{dv_{\text{vir}}}{v_{\text{vir}}} + \frac{dR_{\text{vir}}}{R_{\text{vir}}}.$$

При этом ошибки в определении вириальной массы не искажают соотношения (10) и (11).

#### 4. ЗВЕЗДЫ И ГАЗ В ГАЛО ТМ

Для галактик и скоплений галактик мы восстанавливаем информацию о свойствах гало ТМ по наблюдениям звезд и газа. Эти наблюдения только частично воспроизводят свойства ТМ, что, в частности, порождает хорошо известную проблему ядро – касп (core–cusp problem) в наблюдениях галактик малой массы [53]. Напротив, в массивных галактиках сложное распределение барионов слабо влияет на их вириальные характеристики, определяемые далекой периферией галактик. В этом разделе обсуждается структура галактик малой массы, более подробно эти проблемы обсуждаются в Приложениях I и II.

Хорошо известно, что малая энтропия “холодной” ТМ ведет к образованию гало с профилем плотности NFW (25) [51, 52] и каспом в центре гало. Напротив, барионы сохраняют до реионизации энтропию  $K_0 \simeq 0.3 \text{ см}^2 \text{ эВ}$ , полученную в конце рекомбинации при красном смещении  $\simeq 300$ , и в период реионизации ее только увеличивают. Этим и обусловлено отличие наблюдаемых структурных параметров маломассивных галактик от параметров гало ТМ в численных моделях.

До образования звезд гало ТМ аккумулируют нейтральный газ с постоянной энтропией  $K_b = K_0$  и давлением  $p_b = K_b \rho_b^{5/3}$ . В этом случае

распределение барионов в гало задается уравнением

$$\frac{1}{\rho_b} \frac{dp_b}{dr} = \frac{3}{2} \frac{da_k^2}{dr} = -G \frac{M_{DM}(r) + M_b(r)}{r^2}, \quad (14)$$

где  $M_b$ ,  $\rho_b$  и  $p_b$  – масса, плотность и давление барионов (газа) и  $a_k$  – адиабатическая скорость звука. Согласно СКМ (2)  $\Omega_b \simeq 0.17 \Omega_{DM}$ . При этих условиях распределение ТМ (25) в Приложении I (почти) сохраняется, и задача сводится к соответствующему уравнению Эмдена во внешнем поле ТМ.

Поскольку масса барионов  $M_b$  мала по сравнению с массой ТМ,  $M_b \simeq 0.17 M_{DM}$ , то решение уравнения (14) можно записать как

$$a_k^2(r) = \frac{dp_b}{d\rho_b} = a_k^2(0)[1 - \kappa^2 \phi(r)],$$

$$\phi(x) = 1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \simeq \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} - \dots \quad (15)$$

$$\rho_b^{2/3}(r) = \rho_b^{2/3}(0) \left[ 1 - \frac{\kappa^2}{2} x \left( 1 - \frac{2x}{3} + \dots \right) \right],$$

$$\kappa^2 = \frac{2v_0^2}{3a_k^2(0)}.$$

Функция  $\phi(x)$  (26) и скорость  $v_0$  характеризуют гравитационный потенциал гало ТМ.

Позднее взаимодействие газа и звезд ведет к образованию многокомпонентной среды, состоящей из газа с разными значениями температуры и сложным распределением в пространстве. Эти процессы слабо возмущают массу и профиль плотности ТМ, но уменьшают массу барионов и улучшают применимость приближения  $M_b \ll M_{DM}$ . В таком гало ТМ профиль плотности горячего газа определяется изотермической скоростью звука  $a_T^2$  и параметрами  $v_0$  и  $\phi(x)$  (26) [54]:

$$\rho_g(r) = \rho_g(0) \exp[-\kappa_T^2 \phi(x)], \quad (16)$$

$$\kappa_T^2 = v_0^2/a_T^2.$$

Как и в случае (15) плотность барионов в центре остается конечной и убывает линейно с ростом радиуса. Это означает, что если профиль плотности ТМ определяется выражением (25), то профиль плотности газа определяется более сложными выражениями (15), (16) с конечной плотностью в центре и постоянным градиентом плотности. Эти распределения подобны профилю Бюркerta [55],

$$\rho_{brk} = \frac{\rho(0)}{(1+r/r_1)(1+r^2/r_2^2)}. \quad (17)$$

Распределение звезд в гало ТМ, рассмотренное в Приложении II, повторяет распределение газа в период образования звезд. Даже в карликовых галактиках было несколько таких периодов [38, 56, 57], что привело к сложной функции распределения звезд по скоростям. Из-за сохраняющихся случайных движений профиль плотности звезд также подобен (15), (16) и профилю Бюркертта [55], который часто наблюдается в галактиках малой массы [53, 55]. Эти серьезные различия в распределении газа, звезд и ТМ в центральных областях галактик малой массы предлагают естественное решение так называемой проблемы ядро – касп (core–cusp problem).

В периферийных областях гало ТМ наблюдаемые скорости близки к круговым  $v_{\text{vir}}$  (6) (см. Приложение I), которые для гало ТМ с плотностью (25) слабо зависят от радиуса. Эти особенности позволяют оценить вириальную массу и круговую скорость гало ТМ (3) с приемлемой точностью (см. раздел 3.3) на основе имеющихся наблюдений. Дальнейшее обсуждение этих проблем можно найти в Приложениях I и II.

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ

Формирование компактных гало ТМ, галактик и скоплений галактик – сложный процесс, включающий и образование каустик, и последовательное сгущивание частиц в гало, и слияние гало разной массы, и релаксацию вещества гало. Отдельные этапы этого процесса описываются теоретически (см., напр., [21–26]) и иллюстрируются упрощенными моделями [58–63], но лишь численные модели, такие как [16, 25–28], позволяют связать свойства гало ТМ со спектром мощности возмущений, характеристиками ТМ и эволюционной историей Вселенной.

Сравнение наблюдаемых и полученных в численных моделях динамических параметров гало ТМ показывает следующее.

1. Выделенные в численных моделях [26, 27] представительные популяции гало ТМ (ф-лы (6), (7)), в широком интервале масс  $10^9 \leq M_{\text{vir}}/M_{\odot} \leq 10^{15}$  сохраняют единую зависимость вириальной скорости от массы  $v_{\text{vir}} \simeq 150 \text{ км/с } M_{12}^{1/3}$ .

2. Вириальные скорости наблюдаемых галактик, групп и скоплений галактик соответственно демонстрируют более сложную зависимость:

$$\langle v_{\text{vir}} \rangle \simeq \left\{ \begin{array}{l} 400 \text{ км/с } M_{12}^{1/3}, \quad 10^6 \leq M_{\text{vir}}/M_{\odot} \leq 10^{12}, \\ 150 \text{ км/с } M_{12}^{1/3}, \quad M_{\text{vir}}/M_{\odot} \geq 10^{12}, \\ 180 \text{ км/с } M_{12}^{1/3}, \quad M_{\text{vir}}/M_{\odot} \geq 10^{12}. \end{array} \right\} \quad (18)$$

Это соотношение воспроизводит разницу плотностей галактик  $\langle \rho_{\text{gal}} \rangle$  и скоплений галактик  $\langle \rho_{\text{cls}} \rangle$  (12), и вводит характерные размер  $L_0$  и массу  $M_L$ :

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\text{gal}} \rangle &\simeq 10^3 \langle \rho_{\text{cls}} \rangle, \\ L_0 &\simeq 1.7 \text{ Мпк}, \\ M_L &= 4\pi \langle \rho_m \rangle L_0^3 / 3 \simeq 10^{12} M_{\odot}. \end{aligned} \quad (19)$$

Эти масса и размер связаны с формой спектра возмущений, разделяют процессы образования галактик и скоплений галактик, и появляются в ряде других наблюдений. Этот масштаб количественно близок к известному масштабу диссипации возмущений в барионах [64, 65], что подчеркивает подобие возмущений в ТМ и барионах в масштабах галактик и скоплений галактик.

Согласие оценок численных моделей (6), (7), выполненных со стандартным спектром мощности  $P_{CDM}$  [26, 66], с наблюдениями скоплений галактик (8), (9) подтверждает надежность воспроизводства численными моделями эволюции возмущений в этих масштабах. Однако в масштабах галактик наблюдаемые скорости  $v_m$  (18) в  $\sim 3$  раза превосходят модельные скорости (6), (7). Это различие может указывать на неправильный выбор спектра мощности в численных моделях в масштабах галактик и, частично, с особенностями популяции гало ТМ, отождествляемых с галактиками.

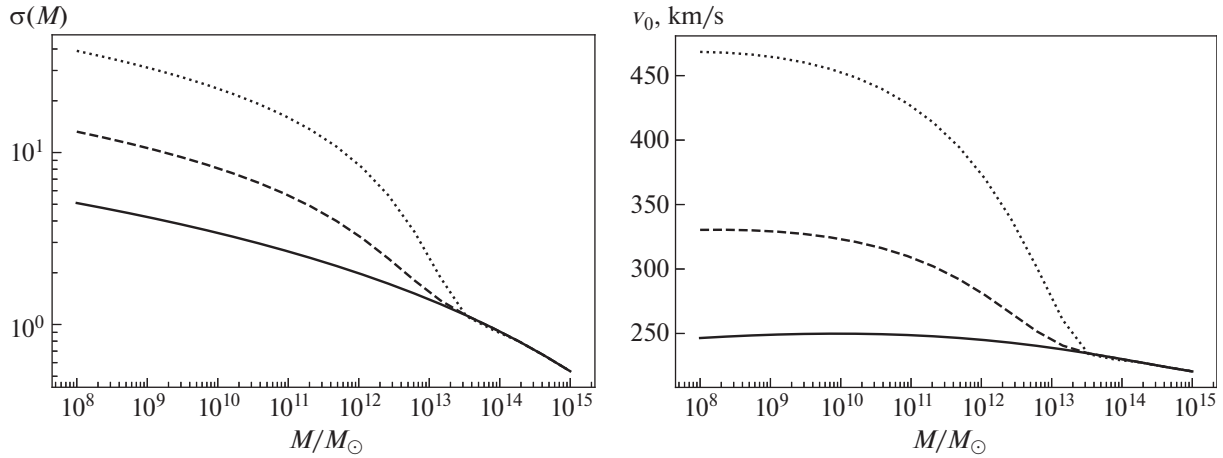
В масштабах скоплений  $M_{\text{vir}} \geq 10^{12} M_{\odot}$  параметры спектра возмущений определены наблюдениями реликтового излучения и некоторый произвол остается лишь в выборе вида частиц ТМ (от черных дыр до нейтрино). Но в меньших масштабах форма спектра известна плохо и в качестве возможной замены стандартному спектру  $P_{CDM}$  [26, 66] был предложен спектр  $P_{MCDM}$  с увеличенной амплитудой в масштабах галактик [45]:

$$\begin{aligned} P_{MCDM}(k) &= P_{CDM}(kl_0) \Psi_{\text{cor}}(kl_0), \\ \Psi_{\text{cor}}(x) &= 1 + \frac{x^2}{1 + a_c x^2}, \\ a_c &\simeq 0.1-0.3. \end{aligned} \quad (20)$$

Такие спектры согласуются с наблюдениями реликтового излучения и воспроизводят наблюдаемые свойства гало ТМ в масштабах  $M \geq 10^{12} M_{\odot}$ , но позволяют лучше воспроизвести вириальные скорости гало ТМ в масштабах  $M_{\text{vir}} \leq 10^{12} M_{\odot}$ .

Напомним, что уже в [66] было отмечено, что сложный состав ТМ, включающий “горячие” (HDM), “холодные” (CDM) и “теплые” (WDM) частицы [67–69], слабо меняет свойства скопления галактик, но уменьшает амплитуду возмущений в меньших масштабах. Это значит, что изме-





**Рис. 4.** Слева – функции  $\sigma_m(M)$  (21) для спектра CDM и двух спектров MCDM (23) с  $a_c = 2$  и  $a_c$ . Справа – модельные функции  $v_m(M)$  для тех же спектров.

нения состава ТМ в космологических моделях со стандартным спектром не могут объяснить различия в наблюдаемых свойствах ТМ гало в масштабах  $M_{\text{vir}} \leq 10^{12} M_\odot$  и  $M_{\text{vir}} \geq 10^{12} M_\odot$ .

Надежно оценить влияние изменения спектра на свойства гало можно лишь после расчета полномасштабной численной модели. Но главный эффект виден уже из формы дисперсии возмущений плотности нерелятивистской материи  $\langle \rho_m \rangle$ :

$$\sigma_m^2(M) = \int_0^\infty d^3k P(k) W^2(Rk), \quad (21)$$

$$M = \frac{4\pi}{3} \langle \rho_m \rangle R^3,$$

где  $P(k)$  – спектр возмущений,  $W(x) = 3(\sin x - x \cos x)/x^3$  – фильтр, соответствующий сферическому гало с радиусом  $R$  и массой  $M$ . Амплитуда возмущений нормирована условием

$$\sigma_8 = \sigma_m(R_8) = 0.8,$$

$$R_8 = 8h^{-1} \text{ Мпк},$$

$$M(R_8) \simeq 2 \times 10^{14} M_\odot.$$

Эта дисперсия широко используется в модели Пресса–Шехтера [58–63]).

Для стандартного [26, 66] и улучшенного [45] спектров CDM с “холодными” частицами ТМ эта дисперсия аппроксимируется выражениями

$$\sigma_{\text{CDM}} \simeq \frac{3M_{12}^{-0.06}}{1 + 0.7M_{12}^{0.25}}, \quad (22)$$

$$\sigma_{\text{MCDM}} \simeq \frac{7M_{12}^{-0.06}}{1 + 0.8M_{12}^{0.31}}.$$

Наблюдаемые зависимости  $v_m(M)$  (18) лучше воспроизводятся спектром (20) с

$$\psi_{\text{cor}}(x) \simeq 1 + \frac{a_c x^4}{1 + 0.3x^4}, \quad a_c \sim 20. \quad (23)$$

Это влияние хорошо иллюстрируется рис. 4, где функции  $\sigma_{\text{CDM}}$  и  $\sigma_{\text{MCDM}}$  (22) представлены для  $\psi_{\text{cor}}$  (23) с  $a_c = 2$  и  $a_c = 20$ . Там же представлены три функции  $v_m(M)$ , полученные для тех же спектров в рамках модели, подобной модели Пресса–Шехтера.

Эти результаты показывают, что часто обсуждаемые различия свойств наблюдаемых галактик и моделируемых гало ТМ [13] не могут объясняться заменой CDM модели на модели со сложным составом ТМ. Рассматривая эти различия в рамках полученных результатов, отметим, что современные наблюдения допускают введение более сложных и, в том числе, переменных в пространстве корректирующих функций  $\psi_{\text{cor}}(k, r)$  (23), что позволяет рассматривать возможные нарушения однородности и изотропии расширения Вселенной в масштабах  $\leq L_0$  (19). Эти возможности заслуживают более подробного изучения в задачах космического нуклеосинтеза, анализа флуктуаций реликтового излучения, свойств первых галактик и процессов реионизации Вселенной.

В оптимальной модели улучшенный CDM спектр описывает эволюцию структуры Вселенной в масштабах  $M_{\text{vir}} \leq 10^{12} M_\odot$ , а фракции “горячих” [67] и “теплых” [69] частиц ТМ могут рассматриваться как корректирующий фактор при описании свойств массивных гало ТМ.

Последние оценки массы трех нейтрино в модели  $3 + 1$  [70–76],

$$\begin{aligned} m_1 &\simeq (0.82 \pm 0.3) \text{ эВ}, \\ m_2 &\simeq (0.41 \pm 0.26) \text{ эВ}, \\ m_3 &\leq 0.60 \text{ эВ}, \end{aligned} \quad (24)$$

и для стерильного нейтрино  $m_{st} \simeq 2.7(1 \pm 0.22) \text{ эВ}$ . Эти значения превосходят оценки, полученные по наблюдениям реликтового излучения [77].

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненное в настоящей работе сравнение вириальных параметров галактик, групп и скоплений галактик, с параметрами гало ТМ, полученными в численных моделях, показывает следующее:

1. сферические гало ТМ, полученные в численных моделях с наблюдаемым спектром мощности и с массами  $M_{vir} \geq 10^{12} M_{\odot}$ , хорошо воспроизводят параметры скоплений галактик;

2. полученные в тех же численных моделях сферические гало ТМ с массами  $M_{vir} \leq 10^{12} M_{\odot}$  не воспроизводят параметры галактик;

3. эти расхождения устраняются при использовании более сложных спектров мощности возмущений, например, (20) и (23);

4. полученные результаты указывают на вероятное существование в спектре мощности характерного масштаба (19).

Учет влияния вращения гало ТМ (и других факторов) уточняет описание, но требует более сложных и подробных наблюдений. Для дальнейшего продвижения в решении обсуждаемой проблемы необходимы специальные программы наблюдений галактик, групп и скоплений галактик, которые позволят получить более точные оценки их вириальных параметров, а также представительные численные модели со сложными спектрами мощности.

Отметим, что в последнее время подобные работы становятся все более популярными (см., напр., [43, 78]).

### Приложение I

#### ПРОФИЛЬ ПЛОТНОСТИ ГАЛО ТМ

Численные модели указывают, что типичный профиль плотности гало ТМ хорошо описывается простой формулой [51]:

$$\begin{aligned} \rho_{DM} &= \frac{\rho_0}{x(1+x)^2}, \\ M_{DM} &= M_0 f_m(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_0 &= 4\pi\rho_0 r_0^3, \\ x &= r/r_0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$f_m(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x},$$

$$v_0^2 = G \frac{M_0}{r_0}.$$

Две постоянные  $\rho_0, r_0$  (или  $M_0, v_0$ ), определяют параметры гало ТМ. Часто обсуждаемое отличие наблюдаемого профиля плотности звезд от (25) (core–cusp problem) рассмотрено выше в разделе 4.

При таком профиле плотности гравитационный потенциал  $\Phi(x)$  равен

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= v_0^2 \phi(x), \\ \phi(x) &= \frac{x}{1+x} - \frac{c_{vir}}{1+c_{vir}} - \frac{f_m(x)}{x}, \\ x &\leq c_{vir}, \end{aligned} \quad (26)$$

таким образом

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= -v_0^2 f_m(c_{vir})/x, \\ x = r/r_0 &\geq c_{vir} = R_{vir}/r_0, \end{aligned}$$

где  $R_{vir}$  – вириальный радиус.

Профиль плотности (25) требует введения искусственного вириального радиуса. Многочисленные попытки ввести естественное определение вириального радиуса  $R_{vir}$  не привели к успеху [79]. По наблюдениям скоплений галактик [31, 34]  $c_{vir} \simeq 4 - 7$ .

Для профиля плотности (25) круговая скорость  $v_c$  слабо зависит от радиуса

$$v_c^2 = GM/r = v_0^2 f_m(x)/x \simeq 0.2v_0^2, \quad 2 \leq x \leq 8. \quad (27)$$

Это значит, что в такой модели наблюдаемая зависимость (1),  $v_{vir}(M) \propto M_{vir}^{1/3}$  приводит к зависимости базовых параметров гало ТМ и  $c_{vir}$ :

$$v_0 = 2.25v_m, \quad \rho_0 \propto c_{vir}^2 = (R_{vir}/r_0)^2. \quad (28)$$

Эти соотношения связывают базовые параметры гало ТМ ( $v_0, M_0, r_0, \rho_0$ ) с вириальными параметрами ( $R_{vir}, c_{vir}, M_{vir}$ ), и популяция гало ТМ превращается в однопараметрическую. Эти же соотношения упрощают использование наблюдаемых кривых вращения галактик для определения функции  $v_{vir}(M_{vir})$ .

### Приложение II

#### КРИВЫЕ ВРАЩЕНИЯ ГАЛО ТМ

Для профиля плотности (25) вдали от центра ( $x \geq 2$ ) гравитационный потенциал меняется

медленно, что позволяет обойтись без знания точного значения вириального радиуса. Особенность (27) профиля плотности гало ТМ (частично) объясняет наблюдения плоского профиля скорости на периферии гало ТМ. Эта же особенность позволяет оценить вириальную массу и круговую скорость гало ТМ (3), не уточняя действительного значения  $R_{\text{vir}}$ .

Каталоги кривых вращения галактик содержат наблюдаемые дисперсии лучевых скоростей звезд, которые в центрально симметричном гравитационном поле связаны с гравитационным потенциалом и собственными случайными движениями звезд)

$$\sigma_v^2(\xi) = v_0^2 \langle \phi(\xi) \rangle + v_T^2(\xi), \quad (29)$$

где  $\xi$  – расстояние от центра гало в картинной плоскости,  $v_0^2 \langle \phi(\xi) \rangle$  – потенциал ТМ, осредненный по лучу зрения и  $v_T(\xi)$  – скорость случайного движения звезд.

Для рассматриваемой модели (25)

$$\sigma_v^2(\xi) \simeq 0.2v_0^2 + v_T^2(\xi), \quad \xi/r_0 \geq 2,$$

и эта особенность потенциала (26) объясняет наблюдаемую слабую зависимость  $\sigma_v^2(\xi)$ .

Для 31 карликовой галактики, изученных в работе [38], оценки массы и дисперсии лучевых скоростей на радиусе половины светимости  $r_{1/2}$  позволяют сравнить значения  $\langle \sigma_v^2(r_{1/2}) \rangle$  и скорости  $v_{1/2}^2 = GM(r_{1/2})/r_{1/2}$  на этом радиусе. Для средних величин получаем

$$\langle \sigma_v^2(r_{1/2}) \rangle / v_{1/2}^2 \simeq 0.4, \quad v_T^2 / v_{1/2}^2 \simeq 0.6,$$

и для таких радиусов влияние случайных движений звезд сравнимо с гравитационным потенциалом ТМ. Но вблизи внешней границы радиальные скорости и длина осреднения малы, и  $v_T^2(\xi) \ll \sigma_v^2(\xi) \simeq v_{\text{vir}}^2$ .

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа частично выполнена в рамках проекта ФИАН ННГ 41-2020.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны рецензенту за конструктивные замечания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Komatsu, K. M. Smith, J. Dunkley, C. L. Bennett, et al., *Astrophys. J. Suppl.* **192**, 18 (2011).
2. P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, et al., *Astron. and Astrophys.* **594**, id. A13 (2016).
3. N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, et al., *Astron. and Astrophys.* **641**, id. A6 (2020).
4. M. McQuinn, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **54**, 313 (2016).
5. J. S. Bullock and M. Boylan-Kolchin, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **55**, 343 (2017).
6. A. B. Засов, А. С. Сабурова, А. В. Хонерсков, С. А. Хонерсков, *Успехи физ. наук* **187**, 3 (2017).
7. T. Naab and J. P. Ostriker, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **55**, 59 (2017).
8. J. Tumlinson, M. Peebles, and J. Werk, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **55**, 389 (2017).
9. R. Wechsler and J. Tinker, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **56**, 435 (2018).
10. P. Salucci, *Astron. and Astrophys. Rev.* **27**, 2 (2019).
11. J. Zavala and C. S. Frenk, *Galaxies* **7**(4), 81 (2019).
12. J. D. Simon, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **57**, 375 (2019).
13. I. de Martino, S. S. Chakrebarty, V. Cesare, A. Gallo, L. Ostorero, and A. Diaferio, *Universe* **6**, 107 (2020).
14. L. Lovisari, S. Ettori, M. Gaspari, and P. Giles, *Universe* **7**, 139 (2021).
15. T. Ishiyama, *Astrophys. J.* **788**, id. 27 (2014).
16. J. Wang, S. Bose, C. Frenk, L. Gao, A. Jenkins, V. Springel, and S. D. M. White, *Nature* **585**, 39 (2020).
17. A. Bayer, A. Banerjee, and Yu. Feng, *J. Cosmology and Astroparticle Phys.* **2021**(01), id. 016 (2021).
18. E. Di Valentino, L. A. Anchordoqui, O. Akarsu, Y. Ali-Haimoud, et al., *Astroparticle Phys.* **131**, id. 102604 (2021), arXiv:2008.11283 [astro-ph.CO], arXiv:2008.11284 [astro-ph.CO], arXiv:2008.11285 [astro-ph.CO].
19. L. A. Anchordoqui, E. Di Valentino, S. Pan, and W. Yang, *J. High Energy Astrophys.* **32**, 28 (2021).
20. W. Beenakker and D. Venhoek, arXiv:2101.01372 [astro-ph.CO] (2021).
21. S. Chandrasekhar, *Rev. Modern Physics* **15**, 1 (1943).
22. D. Lynden-Bell, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **136**, L101 (1967).
23. J. Fillmore and P. Goldreich, *Astrophys. J.* **281**, 1 (1984).
24. A. Gurevich and K. Zybin, *Physics Uspekhi* **38**, 687 (1995).
25. M. Boylan-Kolchin, V. Springel, S. White, A. Jenkins, and G. Lemson, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **398**, 1150 (2009).
26. A. Klypin, S. Trujillo-Gomez, and J. Primack, *Astrophys. J.* **740**, id. 102 (2011).
27. Klypin, G. Yepes, S. Gottlöber, F. Prada, and S. Heß, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **457**, 4340 (2016).
28. T. J. Armitage, D. J. Barnes, S. T. Kay, Y. M. Bahe, C. Dalla Vecchia, R. A. Crain, and T. Theuns, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **474**, 3746 (2018).
29. L. Lovisari, G. Schellenberger, M. Sereno, S. Ettori, et al., *Astrophys. J.* **892**, id. 102 (2020).
30. C. Sifón, H. Hoekstra, M. Cacciato, M. Viola, F. Kohlinger, R. F. J. van der Burg, D. J. Sand, and M. L. Graham, *Astron. and Astrophys.* **575**, id. A48 (2015).
31. M. Arnaud, E. Pointecouteau, and G. W. Pratt, *Astron. and Astrophys.* **441**, 893 (2005).

32. *E. Pointecouteau, M. Arnaud, and G. W. Pratt*, *Astron. and Astrophys.* **435**, 1 (2005).
33. *G. W. Pratt, M. Arnaud, and E. Pointecouteau*, *Astron. and Astrophys.* **446**, 429 (2006).
34. *J. Merten, M. Meneghetti, M. Postmaan, K. Umetsu, et al.*, *Astrophys. J.* **806**, 4 (2015), arXiv:1404.1376 [astro-ph.CO].
35. *R. Herbonnet, C. Sifón, H. Hoekstra, Y. Bahé, et al.*, arXiv:1912.04414 [astro-ph.CO] (2019).
36. *Z. Zhu, H. Xu, J. Wang, J. Gu, et al.*, arXiv:1511.04699 [astro-ph.CO] (2019).
37. *D. Makarov and I. Karachentsev*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **412**, 2498 (2011).
38. *M. G. Walker, M. Mateo, E. W. Olszewski, J. Penarrubia, N. W. Evans, and G. Gilmore*, *Astrophys. J.* **704**, 1274 (2009).
39. *J. S. Gannon, B. T. Dullo, D. A. Forbes, R. M. Rich, et al.*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **502**, 3144 (2021).
40. *A. Sipolsand and A. Pavlovich*, *Galaxies* **8**, 36 (2020).
41. *B. Epinat, P. Amram, M. Marcelin, C. Balkowski, et al.*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **388**, 500 (2008).
42. *B. Epinat, P. Amram, and M. Marcelin*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **390**, 466 (2008).
43. *D. Bizyaev, D. I. Makarov, V. P. Reshetnikov, A. V. Mosenkov, S. J. Kautsch, and A. V. Antipova*, *Astrophys. J.* **914**, id. 104 (2021).
44. *M. Demiański, A. Doroshkevich, N. Larchenkova, and S. Pilipenko*, *Astron. Rep.* **64**, 883 (2020).
45. *M. Demiański and A. Doroshkevich*, arXiv:2009.04256 [astro-ph.CO] (2020).
46. *J. Shull, B. Smith, and C. Danforth*, *Astrophys. J.* **759**, id. 23 (2012).
47. *G. Voit*, *Adv. Space Research* **36**, 701 (2005).
48. *A. E. Evrard, J. Bialek, M. Busha, M. White, et al.*, *Astrophys. J.* **672**, 122 (2008).
49. *M. Demiański, A. Doroshkevich, and T. Larchenkova*, *Astron. Letters* **46**, 359 (2020).
50. *A. Klypin, I. Karachentsev, D. Makarov, and O. Nasonova*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **454**, 1798 (2015).
51. *J. Navarro, C. Frenk, and S. White*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **275**, 720 (1997).
52. *J. Navarro, C. Frenk, and S. White*, *Astrophys. J.* **490**, 493 (1997).
53. *D. Marchesini, E. D'Onghia, G. Chincarini, C. Firmani, P. Conconi, E. Molinari, and A. Zacchei*, *Astrophys. J.* **575**, 801 (2002).
54. *M. Demiański, A. Doroshkevich, and T. Larchenkova*, *Astron. Letters*, in press (2022).
55. *A. Burkert*, *Astrophys. J.* **447**, L25 (1995).
56. *D. R. Weisz, E. D. Skillman, S. L. Hidalgo, M. Monelli, et al.*, *Astrophys. J.* **789**, id. 24 (2014).
57. *D. R. Weisz, A. E. Dolphin, E. D. Skillman, J. Holtzman, K. M. Gilbert, J. J. Dalcanton, B. F. Williams*, *Astrophys. J.* **789**, id. 147 (2014).
58. *W. Press and P. Schechter*, *Astrophys. J.* **187**, 425 (1974).
59. *J. Bond, S. Cole, G. Efstathiou, and N. Kaiser*, *Astrophys. J.* **379**, 440 (1991).
60. *R. Sheth and G. Tormen*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **329**, 61 (2002).
61. *R. Sheth*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **345**, 1200 (2003).
62. *R. Sheth and G. Tormen*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **350**, 1385 (2004).
63. *R. Sheth and G. Tormen*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **349**, 1464 (2004).
64. *J. Silk*, *Astrophys. J.* **151**, 459 (1968).
65. *Я. Зельдович, И. Новиков, Строение и эволюция Вселенной* (М.: Наука, 1975).
66. *J. Bardeen, J. Bond, N. Kaiser, and A. Szalay*, *Astrophys. J.* **304**, 15 (1986).
67. *A. Doroshkevich, M. Khlopov, R. Sunyaev, A. Szalay, and Ya. Zeldovich*, *Ann. N.Y. Acad. Sci.* **375**, 32 (1981).
68. *G. Blumenthal, H. Pagels, and J. Primack*, *Nature*, **299**, 37 (1982).
69. *M. Viel, J. Lesgourgues, M. Haehnelt, S. Matarrese, and A. Riotto*, *Phys. Rev. D* **71**, id. 063534 (2005).
70. *A. Serebrov, R. Samoilov, and M. Chaikovskii*, arXiv:2109.12385 [hep-ph] (2021).
71. *V. V. Barinov, R. A. Burenin, D. S. Gorbunov, and R. A. Kriwonos*, *Phys. Rev. D* **103**(6), id. 063512 (2021).
72. *V. V. Barinov, B. T. Cleveland, S. N. Danshin, H. Ejiri, et al.*, arXiv:2109.11482 [nucl-ex] (2021).
73. *V. Barinov and D. Gorbunov*, arXiv:2109.14654 [hep-ph] (2021).
74. *N. Fiza, M. Masud, and M. Mitra*, *J. High Energy Phys.* **2021**(09), 16 (2021).
75. *S. Schoppmann*, arXiv:2109.13541 [hep-ex] (2021).
76. *V. Khrushchov and S. Fomichev*, *Universe* **8**, 97 (2022).
77. *A. E. Bayer, F. Villaescusa-Navarro, E. Massara, J. Liu, et al.*, arXiv:2102.05049 [astro-ph.CO] (2021).
78. *G. Paribelli, G. Scelfo, S. K. Giri, A. Schneider, M. Archidiacono, S. Camera, and M. Viel*, arXiv:2106.04588 [astro-ph.CO] (2021).
79. *A. V. Kravtsov*, *Astrophys. J. Letters* **764**(2), id. L31 (2013).