КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ФРИДМАНА В МОДИФИЦИРОВАННОМ ЭНТРОПИЙНОМ ФОРМАЛИЗМЕ ШАРМЫ–МИТТАЛА

А. В. Колесниченко[1, *], М. Я. Маров[2]

[1] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

[2] *Институт геохимии и аналитической химии им. В.И. Вернадского РАН, Москва, Россия*

**E-mail: al-vl-kolesn@yandex.ru*

Поступила в редакцию 26.09.2021 г.
После доработки 21.06.2022 г.
Принята к публикации 21.06.2022 г.

В работе с помощью формализма Верлинда рассмотрено несколько сценариев эволюции Вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера, которые возможны в рамках энтропийной космологии, основанной на новой модификации энтропийной меры Шарма–Миттала. Исследование, проводимое в рамках неэкстенсивной статистической теории, использует несколько энтропийных мер, ассоциированных с горизонтом Вселенной из-за хранящихся там голографических данных. Сконструировано несколько вариантов обобщенных уравнений Фридмана, которые могут служить эффективной теоретической основой для описания динамической эволюции плоской, однородной и изотропной Вселенной, порождая многообразные формы заключенной в ней материи. Предложенный подход, связанный с использованием вероятностных неэкстенсивных аспектов космологического горизонта Вселенной, соответствует известным основным требованиям, предъявляемым к термодинамическому моделированию динамического поведения космического пространства без привлечения концепции гипотетической темной энергии.

Ключевые слова: обобщенные уравнения Фридмана, энтропийные меры Шарма–Миттала и Барроу, космология

DOI: 10.31857/S0004629922100085

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди множества сценариев ускоренного расширения Вселенной большое внимание совсем недавно привлекла “энтропийная космология”, согласно которой гравитация воспринимается как своего рода сила, связанная с ростом энтропии. В энтропийной космологии предполагается, что температура и энтропия на поверхности, ассоциируемой с горизонтом Вселенной, обусловлена хранящимися на этой поверхности голографическими данными. Понятие космологической энтропийной силы впервые было предложено в работе [1], в которой гравитация объясняется через энтропию, т.е. имеет термодинамическое происхождение [2–4]. Было показано, что исходя из голографического принципа образования пространства-времени[1] неизбежно возникает гравитация, которая отождествляется с энтропийной силой $F_s = -TdS/dr$, обусловленной увеличением энтропии[2], связанным с ростом площади, занимаемой материальными телами. В рамках гипотезы Верлинде [5] была развита эвристическая теория ускоренного расширения Вселенной, базирующаяся на энтропийной силе. Авторами этой работы было показано, что наряду с традиционным объяснением ускорения Вселенной, основанном на наличии управляющей силы в уравнениях Фридмана, обусловленной гипотетической темной энергией, возможна альтернативная интерпретация ее динамической эволюции, связанная с наличием отталкивающей энтропийной силы, которая возникает при росте информации на экране поверхности хаббловского горизонта [6, 7]. Оказалось, что при таком подходе физическое

[1] Под голографией в космологии понимается информация о Вселенной, закодированная на поверхностном экране, расположенном на горизонте событий (области пространства-времени), который трактуется как двумерная поверхность Вселенной (см., например, [37]).

[2] Согласно голографическому принципу, энтропия хранится на голографических экранах, а рост информации, связанный с увеличением поверхности Вселенной, занимаемой материальными телами, приводит к увеличению энтропии; отсюда возникновение градиента энтропии (энтропийной силы), направленного против увеличения радиуса указанной площади поверхности.

понимание процесса ускорения Вселенной вполне объяснимо без привлечения концепции темной энергии как некой постулируемой среды с отрицательным давлением.

Наконец, в целом ряде работ (см., например, [8–31]), посвященных энтропийной космологии, были рассмотрены сценарии эволюции Вселенной под влиянием энтропийных сил различной природы. В этих исследованиях, наряду с температурой де Ситтера [32], используются различные энтропии, ассоциированные с космологическим горизонтом Вселенной. Это энтропия Бекенштейна–Хокинга [6]; равнораспределенные по степеням свободы неэкстенсивные энтропии Тсаллиса–Чирто [33], Каниадакиса [30, 34] и Барроу [2, 35]; модифицированная энтропия Реньи [18, 21, 36]; модифицированная энтропия Шарма–Миттала [4, 25]. При этом в уравнениях общей теории относительности Эйнштейна вместо космологической постоянной Λ появляются дополнительные управляющие члены, связанные с используемой энтропией. С помощью видоизмененных подобным образом уравнений Фридмана было показано, что основанные на них модели теоретически могут объяснить, в частности, текущую ускоренную фазу Вселенной, поскольку хорошо согласуются с данными по сверхновым звездам (см., например, [38]). Важно также отметить, что обнаруженное ускорение Вселенной является сравнительно небольшим (порядка постоянной Хаббла), в отличие от его огромного значения, предсказываемого квантовой теорией поля в сочетании с общей теорией относительности[3]. Как видим, изучение влияния энтропийных сил на эволюцию Вселенной представляет несомненный интерес, поскольку из-за отталкивающего (антигравитационного) действия именно эти силы могут сыграть роль темной энергии как в форме космологической постоянной, так и в форме скалярных полей [39].

В настоящей работе, мотивированной результатами исследований [4, 25], для объяснения эволюции ускоренно расширяющейся Вселенной в рамках неэкстенсивных статистических теорий используется температура де Ситтера и неэкстенсивные энтропийные меры, ассоциированные с горизонтом Вселенной из-за голографически хранящейся там информации [24, 36, 38, 40]. Эффективность использования неэкстенсивных статистик в космологическом контексте, необходимость привлечения которых возникает из-за дальнодействующей природы гравитации, заключается в появлении дополнительных параметров неэкстенсивности в выражениях для энтропийных сил. Это позволяет выбрать подходящие их значения при конструировании наиболее вероятных сценариев эволюции Вселенной.

Нами предложена новая модификация энтропийной меры Шарма–Миттала (см. [41, 42]), описывающая эволюцию неэкстенсивной плоской Вселенной и обобщающая модифицированные энтропии Реньи и Тсаллиса, которые были использованы ранее в работах [25, 30, 43]. При этом в модифицированной энтропии Шарма–Миттала[4] предлагается использовать вместо традиционной энтропии Бекенштейна–Хокинга [5] энтропию Барроу [35], отвечающую квантовым гравитационным эффектам горизонта Вселенной [38, 44, 45].

На основе модифицированной энтропии Шарма–Миттала сконструировано несколько вариантов обобщенных уравнений Фридмана–Робертсона–Уокера, которые содержат дополнительные управляющие силы, соответствующие изменяющемуся во времени космологическому члену и зависящие от конкретной формы энтропии, изначально выбранной для описания гравитационных эффектов. В работе также отмечается совместимость этих сценариев эволюции неэкстенсивной Вселенной с имеющимися данными космологических наблюдений [24, 36]. Полученные на основе формализма обобщенной энтропии Шарма–Миттала результаты соответствуют основным требованиям, предъявляемым к термодинамическому моделированию динамической эволюции Вселенной в терминах неэкстенсивной энтропии, включая дальнодействующие взаимодействия, такие как гравитация и антигравитация.

2. ИСХОДНЫЕ ЭНТРОПИЙНЫЕ МЕРЫ НА ГОЛОГРАФИЧЕСКОМ ГОРИЗОНТЕ ВСЕЛЕННОЙ

Основное исходное положение теории Верлинде заключается в том, что “квантово-запутанная пространственно-временная информация” части Вселенной подчиняется голографическому принципу. Согласно этому положению, информация может храниться на голографическом экране (мембране) в любом месте вокруг материальных тел. Как известно, в физике черных дыр

[3] Отождествление космологической постоянной с энергией вакуума не позволяет, к сожалению, проникнуть в существо темной энергии и приводит к пока неразрешимой проблеме, которая заключается в том, что наблюдаемое значение плотности темной энергии, $\rho_{\Lambda_{obs}} \approx (10^{-3}\ \mathrm{ev})^4$, и ее теоретически предсказанное значение, $\rho_{\Lambda_{th}} \approx 10^{18}\ (\mathrm{Gev})^4$, отличаются на 120 порядков (здесь $v = v(\varphi)$ – потенциал скалярного поля φ (инфлатона) [39].

[4] “Новая модификация” энтропии Шарма–Миттала базируется на неэкстенсивной энтропии Барроу, которая заменяет обычную энтропию Бекенштейна–Хокинга, используемую в энтропийном формализме, разработанном в работах [20, 43].

существует представление о хранении информации на горизонте событий черной дыры. По аналогии с термодинамическими характеристиками горизонта событий черной дыры, описываемой своими температурой и энтропией, в энтропийной космологии также предполагается, что область расширяющейся пространственно плоской Вселенной имеет температуру и связанную с ней ассоциированную энтропию Бекенштейна–Хокинга (Б–Х). При этом информация закодирована в самой структуре пространства и само пространство является возникающим (эмерджентным). Исходя из этих предпосылок стал возможным вывод появляющихся вместе с самим пространством законов механики (что и сделал Верлинде в цитируемой в этом разделе работе). Между телами и в окружающем пространстве плотность энтропии, ассоциированная с этими телами, изменяется (увеличивается). Рост энтропии сопровождается притяжением тел, что, согласно второму закону термодинамики, является переходом в более вероятное состояние. По этой причине гравитацию можно воспринимать, как некую энтропийную силу, вызванную изменением количества информации, связанной с положением материальных тел в пространстве. Возникновение подобной бесконтактной силы можно объяснить в какой-то степени аналогией с осмосом через полупроницаемую мембрану.

Представление о возникновении энтропийной силы на голографическом горизонте расширяющейся плоской Вселенной, имеющем ассоциированную энтропию и температуру, приводит к энтропийной космологии, которая предполагает, что именно энтропийная сила ответственна за явление ускоренного расширения Вселенной. По этой причине неоднозначная составляющая темной энергии как в форме космологической постоянной Λ, так и в форме скалярных полей, может быть опущена в уравнениях Фридмана.

2.1. Эффективное действие, энтропия и поверхностные члены

В энтропийной космологии рассматриваются *феноменологические модели* ускоряющейся Вселенной под влиянием энтропийных сил. При этом изначально предполагается, что общая теория относительности (ОТО) верна и ее можно получить как любую фундаментальную теорию, из вариационного принципа с использованием ковариантного действия Эйнштейна-Гильберта, включающего действие материи и излучения, а также поверхностные члены, которые обычно игнорируются в классической ОТО, поскольку они не меняют физику в пространстве-времени Минковского. Однако при моделировании гравитационной системы, у которой есть горизонт, поверхностные члены могут играть существенное роль в ее эволюции. С учетом этого замечания скалярное действие гравитационной системы, включающее материальные поля и условия на ее поверхности, описывается выражением $I = \int_M (R + L_{\rm m}) + \oint_{\partial M} L_{\rm b}$, где R – скалярная кривизна пространства-времени, $L_{\rm m}$ – материальный лагранжиан, $L_{\rm b}$ – лагранжиан, описывающий обмен энергией и импульсом между объемом и границей [21]. В классической ОТО лагранжиан $L_{\rm b}$ описывается дельта-функцией, чтобы удовлетворить локальности теории. Однако в рамках энтропийной космологии этот член, связанный с голографическим описанием физики двумерной поверхности Вселенной, является нелокальным эффектом, который соотносится с энтропийной силой во Вселенной.

Таким образом, в энтропийной космологии действие I также может быть использовано для описания голографической картины эволюции Вселенной. Его варьирование по метрике $g_{\mu\nu}$ приводит к следующему видоизмененному уравнению поля Эйнштейна в ОТО за счет *дополнительного члена с поверхностной энергией:*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + \text{граничные члены},$$

где $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи, $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса. В ОТО поверхностными членами пренебрегают, однако они имеют существенное значение, когда имеется горизонт ускорения [23]. Для изотропной и однородной Вселенной в случае плоского гиперпространства из видоизмененного уравнения поля Энштейна следует уравнение, связывающее ускорение масштабного фактора a с замедлением энергетического содержания и ускорением от поверхностных сил [10] $\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + a_{\text{поверх}}/d_{\rm H}$, где $a(t)$ – масштабный фактор; $a_{\text{поверх}}$ – ускорение поверхности горизонта, $d_{\rm H} = c/H$ – масштабная шкала горизонта Хаббла.

В настоящее время существует несколько подходов к определению формы поверхностного члена в этом уравнении [21, 23]. Следует, однако, отметить, что несмотря на то, что моделирование поверхностных членов в этом уравнении является побуждающим мотивом к построению строгой теории, которую можно применить ко всем пространствам-временам независимо от их асимптотического поведения или типа горизонтов, существующие на сегодня “рабочие” энтропийные модели являются все же *феноменологическими*, поскольку получаются, как правило, без строгого обоснования.

Начнем с того, что рассмотрим (в качестве примера моделирования поверхностного члена) подход Верлинде, базирующийся на энтропийной силе, связанной с ростом энтропии Б–Х из-за изменения количества информации, хранящейся голографически на поверхности горизонта Вселенной, и который естественным образом приводит к ускоренному расширению Вселенной.

2.2. Энтропийная сила, отвечающая энтропии Бекенштейна–Хокинга

В энтропийной космологии, по аналогии с термодинамическими характеристиками горизонта событий черной дыры, описываемой своими температурой и энтропией, часто принимается, что область расширяющейся пространственно-плоской Вселенной (совпадающая с горизонтом Хаббла) имеет температуру $T_{\rm S} = \hbar H/2\pi k$ (пропорциональную температуре де Ситтера) [32], и связанную с ней ассоциированную энтропию Б–Х $S_{\rm BH}$ [5, 7]. В этом случае проблема связи космологической постоянной с энтропийной силой решается естественным образом (см. [1]).

В энтропийной космологии горизонт (радиус) Хаббла $R_{\rm H}$ и температура космологического горизонта Вселенной T_H определяются выражениями

$$R_{\rm H} = cH^{-1}, \tag{1}$$

$$T_{\rm H} = \frac{\hbar}{2\pi k}H = \frac{\hbar}{2\pi k}\frac{c}{R_{\rm H}} \sim 3\times 10^{-30}\ {\rm K}, \tag{2}$$

где k и $\hbar = h/2\pi$ – соответственно постоянная Больцмана и приведенная постоянная Планка-Дирака; $H(t) = a^{-1}\partial a/\partial t$ – параметр Хаббла, или хаббловская скорость расширения Вселенной; t – временная координата; $a(t)$ – масштабный фактор Робертсона–Уокера [39].

Связанная с горизонтом Вселенной энтропия Б–Х задается следующим соотношением [6]

$$S_{\rm BH} = k\left(\frac{A_{\rm H}}{A_{\rm Pl}}\right) = k\frac{c^3}{\hbar G}\frac{A_{\rm H}}{4}, \tag{3}$$

где $A_{\rm H} = \pi R_{\rm H}^2 = \pi c^2 H^{-2}$ – величина площади поверхности области хаббловского радиуса $R_{\rm H}$; $A_{\rm Pl} = \hbar G/c^3 \approx 2.612\times 10^{-70}$ м^2 – площадь Планка. При подстановке площади $A_{\rm H}$ в соотношение (3) получим

$$S_{\rm BH} = k\left(\frac{c^3}{\hbar G}\right)\pi R_{\rm H}^2 = \left(\frac{k\pi c^5}{\hbar G}\right)\frac{1}{H^2} \equiv \equiv \frac{K}{H^2} \sim (2.6\pm 0.3)\times 10^{122}k. \tag{4}$$

Здесь введена широко используемая нами в дальнейшем численная константа

$$K = \frac{\pi k c^5}{\hbar G} = \frac{\pi k c^2}{L_{\rm Pl}^2} = \frac{\pi k c^2}{A_{\rm Pl}} > 0, \tag{5}$$

где $L_{\rm Pl} = \sqrt{\hbar G/c^3}$ – планковская длина. Температура горизонта приводит к сопутствующей энтропийной силе и результирующему ускорению горизонта, определяемому соотношением Унру $a_{\text{гориз}} = 2\pi k T_{\rm H}/\hbar = cH \sim 10^{-9}$ м/сек^2.

Увеличение радиуса $R_{\rm H}$ на $dR_{\rm H}$ увеличивает энтропию $S_{\rm BH}$ на $dS_{\rm BH}$ в соответствии с соотношением

$$dS_{\rm BH} = 2\pi\left(\frac{kc^3}{\hbar G}\right)R_{\rm H}dR_{\rm H} = 2\pi\left(\frac{kc^3}{\hbar G}\right)\left(\frac{c}{H}\right)dR_{\rm H} = = 2\left(\frac{K}{c^2}\right)R_{\rm H}dR_{\rm H}. \tag{6}$$

Определим теперь поверхностную энтропийную силу $F_{\rm BH}$ (силу антигравитации), отвечающую росту энтропии Б–Х, выражением $F_{\rm BH} = -T_{\rm H}dS_{\rm BH}/dR_{\rm H}$. Здесь знак минус указывает направление увеличения энтропии или экран, которым является горизонт событий [5]. Тогда, используя соотношения (2) и (6), получим следующее выражение для энтропийной силы[5]

$$F_{\rm BH} = -\frac{\hbar H}{2\pi k}\frac{2K}{c^2}R_{\rm H} = -\frac{c^4}{G}. \tag{7}$$

Давление этой силы на космологический горизонт Вселенной, приводящее к возникновению антигравитации, определяется формулой

$$P_{\rm BH} = \frac{F_{\rm BH}}{4A_{\rm H}} = -\frac{c^4}{G}\frac{1}{4\pi R_{\rm H}^2} = = -\frac{c^2}{4\pi G}H^2 = -\frac{2}{3}c^2\rho_{\text{критич}}, \tag{8}$$

где $\rho_{\text{критич}} = 3H^2/8\pi G$ – плотность критической энергии. Эта величина близка к измеренному отрицательному давлению (натяжению) темной энергии в форме космологической постоянной [39]. Причем в рассматриваемом случае напряжение возникает не из-за отрицательного давления темной энергии, а от давления, обусловленного изменением энтропии поверхности горизонта. Оно эквивалентно внешнему ускорению $a_{\text{поверх}} = a_{\rm H} = cH$, учет которого приводят к уско-

[5] Отметим, что выражение (7) совпадает по модулю с тем, которое, как утверждают некоторые исследователи, является максимально возможной величиной силы. В настоящее время возможность существования максимального значения силы достаточно оживленно обсуждается в литературе.

рению в уравнениях Фридмана-Леметра (см. также вывод уравнения (60) с использованием давления P_{BH})

$$\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + H(t)^2.$$

Таким образом, можно считать, что в голографическом подходе Верлинде эффект отталкивания возникает не за счет отрицательного давления темной энергии, а за счет давления на космологический горизонт энтропийной силы, связанной с ростом поверхностной энтропии (в данном случае энтропии Б–Х) на горизонте Вселенной.

Рассмотрим теперь другие энтропийные силы, связанные с оригинальными энтропийными мерами, традиционно используемыми в энтропийной космологии.

2.3. Энтропийная сила, связанная с энтропией Барроу

В целом ряде публикаций, посвященных энтропийной космологии, были предложены различные варианты эффективного давления, отличного от давления энтропийной силы (Б–Х), которые позволяют моделировать различные сценарии эволюции Вселенной, в частности, при временах, когда "обычное" вещество и излучение играли более важную роль. Недавно в работе [35] была предложена модель квантовой гравитационной пены пространства-времени для оценки энтропии черных дыр и Вселенной, поверхность которых может иметь сложную фрактальную структуру космологического горизонта (области пространства-времени) вплоть до сколь угодно малых масштабов (порядка планковской длины) из-за квантово-гравитационных эффектов. Введение такой фрактальной структуры горизонта Вселенной приводит к увеличению площади ее поверхности. Как известно, площадь поверхности Вселенной – это ключевая характеристика, которая определяет ее энтропию и информативность. Энтропия Барроу возникает, в частности, из-за того, что горизонт Вселенной может деформироваться вследствие квантово-гравитационных эффектов, а ее отклонение от энтропии Б–Х количественно определяется показателем степени деформации Δ, отвечающим фрактальной размерностью поверхности.

Сложная фрактальная структура горизонта Вселенной приводит к конечному объему, но с бесконечной или конечной площадью [29, 35]. Согласно космологической термодинамике, возможные эффекты квантово-гравитационной пены пространства-времени в области космологического горизонта приводят к новому определению энтропии Вселенной – к неаддитивной энтропии Барроу S_{Bar} [35], связанной с аддитивной энтропией Б–Х в виде: $S_{\mathrm{Bar}}/k \coloneqq (S_{\mathrm{BH}}/k)^{1+\Delta/2}$. При подстановке величин S_{Bar} и k в это соотношение получим $S_{\mathrm{Bar}} \sim 10^{120(1+\Delta/2)}$. Параметр Δ $(0 \le \Delta \le 1)$, являясь фрактальной массовой размерностью квантово-гравитационной пены, количественно определяет деформацию структуры горизонта Вселенной[6].

Энтропию S_{Bar} можно представить в следующих формах:

$$S_{\mathrm{Bar}} = k\left(\frac{A_{\mathrm{H}}}{A_{\mathrm{Pl}}}\right)^{1+\Delta/2} = K\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2}\left(\frac{R_{\mathrm{H}}}{c}\right)^{2+\Delta} = \\ = K\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} H^{-(2+\Delta)}. \quad (9)$$

Здесь $A_{\mathrm{Pl}} = \hbar G/c^3 \approx 2.612\times10^{-70}$ м^2 – площадь Планка; A_{H} – величина площади стандартного горизонта; $K = \pi k c^2/A_{\mathrm{Pl}} > 0$. В случае, когда параметр $\Delta = 0$, что соответствует простейшей структуре космологического горизонта Вселенной, восстанавливается рассмотренная выше стандартная энтропия Бекенштейна–Хокинга

$$S_{\mathrm{Bar}}(\Delta = 0) \equiv S_{\mathrm{BH}} = k(A_{\mathrm{H}}/A_{\mathrm{Pl}}) = KH^{-2}.$$

В случае $\Delta = 1$ имеет место гладкая пространственно-временная структура горизонта Вселенной, при этом энтропия Барроу совпадает с так называемой равно-распределенной по степеням свободы неаддитивной энтропией Тсаллиса–Чирто [2, 33]

$$S_{\mathrm{TC}} = k(A_{\mathrm{H}}/A_{\mathrm{Pl}})^{3/2} = K(K/k)^{1/2}(R_{\mathrm{H}}/c)^3 = \\ = K(K/k)^{1/2}H^{-3}, \quad (10)$$

введенной этими авторами в рассмотрение при исследовании эволюции черных дыр на основе совершенно других физических принципов, отличных от фрактальной интерпретации горизонта Вселенной [27, 46, 47].

Ясно, что в общем случае среды с фрактальной размерностью $(0 < \Delta \le 1)$, космологические уравнения Фридмана, основанные на энтропийной силе Барроу, будут содержать, как показано ниже, новые дополнительные члены, позволяющие

[6] Следует отметить, что при определении энтропии Барроу сложная фрактальная структура космологического горизонта моделируется аналогом сферической "снежинки Коха", использующим бесконечную убывающую иерархию соприкасающихся сфер вокруг горизонта событий Шварцшильда. Тем не менее эта простая модель возможных проявлений квантово-гравитационной эффектов имеет важные следствия для оценок энтропии Вселенной, которая обычно несколько больше, чем в базовом сценарии, связанном с энтропией Бекенштейна–Хокинга.

моделировать различные сценарии космологической эволюции Вселенной [28, 38, 45].

Применяя рассмотренную в предыдущем подразделе процедуру вывода выражений для энтропийной силы и соответствующего давления на космологический горизонт Вселенной, но уже с энтропией Барроу, получим:

$$F_{\mathrm{Bar}} = -T_{\mathrm{H}}\frac{dS_{\mathrm{Bar}}}{dR_{\mathrm{H}}} = -\frac{(2+\Delta)}{2G}\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} R_{\mathrm{H}}^{\Delta}c^{4-\Delta} = -\frac{2+\Delta}{2G}\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} c^4 H^{-\Delta}, \quad (11)$$

$$P_{\mathrm{Bar}} = \frac{F_{\mathrm{Bar}}}{4\pi R_{\mathrm{H}}^2} = -\frac{(2+\Delta)}{2}\frac{c^{4-\Delta}}{4\pi G}\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} R_{\mathrm{H}}^{\Delta-2} = -\frac{2+\Delta}{2}\frac{c^2}{4\pi G}\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} H^{2-\Delta}. \quad (12)$$

При написании этих выражений использованы следующие формулы: для производной энтропии Барроу S_{Bar} по радиусу R_{H}

$$\frac{dS_{\mathrm{Bar}}}{dR_{\mathrm{H}}} = \frac{(2+\Delta)}{c}K\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2}\left(\frac{R_H}{c}\right)^{1+\Delta} = \frac{2+\Delta}{c}K\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} H^{-(1+\Delta)}; \quad (13)$$

для температуры де Ситтера, записанной в виде

$$T_{\mathrm{H}} = \frac{\hbar}{2\pi k}\frac{c}{R_H} = \frac{c^6}{2GKR_H} = \frac{c^5 H}{2GK}. \quad (14)$$

Перейдем теперь к определению энтропийных сил, полученных на основе нового энтропийного формализма, основанного на модифицированной энтропии Шарма–Миттала.

3. ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЭНТРОПИЙНЫЕ МЕРЫ СЕМЕЙСТВА ШАРМА–МИТТАЛА

Представляет интерес рассмотрение различных типов энтропийной меры, используемых в качестве эффективной теоретической основы в энтропийной космологии. Рассмотрим вначале оригинальную двухпараметрическую энтропийную меру Шарма–Миттала, которая определяется формулой [41]:

$$S_{\mathrm{SM}}[P] := \frac{k}{r-1}\left[1-\left(\int P(x,t)^q dx\right)^{(r-1)/(q-1)}\right], \quad (q,r>0;\;\; q,r\neq 1;\;\; q\neq r), \quad (15)$$

где r, q – параметры неэкстенсивности ($r \neq 1$, $1 \neq q > 0$, $r \neq q$); $P(x,t)$ – нормированная на единицу плотность вероятности распределения микроскопического состояния системы N частиц, заданного одной точкой $x = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots \mathbf{r}_n;\, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots \mathbf{p}_n\}$ в $6N$-мерном фазовом пространстве, безразмерный элемент которого имеет вид $dx := (2\pi\hbar)^{-r} \times \prod_i^N d\mathbf{r}_i d\mathbf{p}_i$; r – число степеней свободы.

Заметим, что переход от непрерывной плотности распределения $P(x,t)$ микроскопического состояния системы к дискретному распределению частиц p_j осуществляется заменой интегрирования по всему фазовому пространству суммированием по j.

Энтропийная мера (15) включает как классическую, так и деформированные однопараметрические энтропии, в частности:

– энтропию Больцмана–Гиббса [48, 49]

$$S_{\mathrm{SM}}(q\to, r\to 1) = S_{\mathrm{BG}} := -k\int P(x,t)\ln[P(x,t)]dx; \quad (16)$$

– энтропию Реньи [50, 51]

$$S_{\mathrm{SM}}(q, r\to 1) = S_{\mathrm{Re}} := \frac{k}{1-q}\ln\left[\int P(x,t)^q dx\right], \quad q>0, \quad q\neq 1; \quad (17)$$

– энтропию Тсаллиса [52–54]

$$S_{\mathrm{SM}}(q, r=q) = S_{\mathrm{T}} := \frac{k}{1-q}\left[\int P(x,t)^q dx - 1\right]; \quad (18)$$

– энтропию Гаусса [55]

$$S_{\mathrm{SM}}(q\to 1, r) = S_{\mathrm{G}} := k\frac{1}{r-1}\times \left\{1-\exp\left[(r-1)\int P(x,t)\ln[P(x,t)]dx\right]\right\}, \quad (19)$$

– энтропию Ландсберга–Ведрала [56]

$$S_{\mathrm{SM}}(q, r\to 2-q) = S_{\mathrm{LV}} := \frac{k}{1-q}\times \left[1-\left(\int P(x,t)^q dx\right)^{-1}\right]. \quad (20)$$

Здесь $q > 0$, $q \neq 1$; в пределе $q \to 1$, $r \to 1$ все приведенные однопараметрические энтропии воспроизводят стандартную энтропию Больцмана–Гиббса (16).

3.1. Экспонента Тсаллиса и деформированный логарифм

Далее будем использовать так называемые деформированные функции: деформированный логарифм $\ln_q(y)$ и экспоненту Тсаллиса $\exp_q(y)$, которые определяются следующим образом [57]:

$$\ln_q(y) = \frac{y^{1-q}-1}{1-q}, \qquad \exp_q(y) = [1+(1-q)y]_+^{\frac{1}{1-q}}, \quad (21)$$

где $y \in R^+$, $q \in R$; выражение, стоящее в квадратных скобках, либо положительно, либо равно нулю, $[Y]_+ \equiv \max(Y, 0)$.

Легко проверить, что в пределе $q \to 1$ деформированные функции принимают стандартный вид: $\ln_1(y) = \lim_{q\to 1}[\ln_q(y)] = \ln(y)$, $\exp_1(y) = \lim_{q\to 1}[\exp_q(y)] = \exp(y)$, а также, что

$$\exp_q[\ln_q(y)] = \ln_q[\exp_q(y)] = y, \quad \forall x; \ \forall q. \qquad (22)$$

Можно убедиться, что для деформированных функций справедливы используемые далее соотношения:

$$\ln_q(1/y) = -\ln_{2-q}(y), \quad \ln_q(1/y) = -\ln_{2-q}(y), \qquad (23)$$

$$\frac{d}{dy}\exp_q(y) = [\exp_q(y)]^q, \quad \frac{d}{dy}\ln_q(y) = \frac{1}{y^q} \quad (y > 0;\ \forall q). \qquad (24)$$

3.2. Энтропийный функционал Шарма–Миттала как родоначальник семейства однопараметрических энтропий

Используя обозначение $c_q := \int P(x,t)^q dx$ для так называемой обобщенной статистической суммы, перепишем выражения (17) и (18) для энтропий Реньи и Тсаллиса в виде

$$S_{\rm Re} = \frac{k}{1-q}\ln\left[\int P(x,t)^q dx\right] = \frac{k}{1-q}\ln c_q,$$

$$S_{\rm T} = k\frac{\left[\left(\int P(x,t)^q dx\right)^{1/(1-q)}\right]^{(1-q)} - 1}{1-q} = k\ln_q\left[c_q^{\frac{1}{1-q}}\right].$$

Сопоставляя эти два выражения, получим

$$c_q^{1/(1-q)} = \exp(k^{-1}S_{\rm Re}) = \exp_q(k^{-1}S_{\rm T}); \qquad (25)$$

отсюда следуют равенства

$$S_{\rm Re} = k\ln\{\exp_q[k^{-1}S_{\rm T}]\},$$
$$S_{\rm T} = k\ln_q\exp(k^{-1}S_{\rm Re}). \qquad (26)$$

Формула (25) позволяет также получить связующие с энтропией Тсаллиса формулы для энтропий Шарма–Миттала и Ландсберга–Ведрала:

$$S_{\rm SM} = k\frac{\left[\left(\int P(x,t)^q dx\right)^{1/(1-q)}\right]^{(1-r)} - 1}{1-r} = k\ln_r\left[c_q^{\frac{1}{1-q}}\right] = k\ln_r\{\exp_q(k^{-1}S_{\rm T})\}, \qquad (27)$$

$$S_{\rm LV} = -k\frac{\left[\left(\int P(x,t)^q dx\right)^{1/(q-1)}\right]^{1-q} - 1}{1-q} = -k\ln_q\left[c_q^{\frac{1}{q-1}}\right] = k\ln_{2-q}\{\exp_q(k^{-1}S_{\rm T})\}. \qquad (28)$$

Как видим, экспонента Тсаллиса и q-деформированный логарифм позволяют записать все перечисленные энтропийные меры в компактной форме. Кроме того, формулы (26)–(28) облегчают нахождение предельных значений энтропии Шарма–Миттала. В частности, при использовании формул (22) и (23), легко получить соотношения:

$$S_{\rm SM}(q, r \to q) = k\ln_{r\to q}\exp_q[k^{-1}S_{\rm T}] = S_{\rm T}, \qquad (29)$$

$$S_{\rm SM}(q, r \to 1) = k\ln_{r\to 1}\{\exp(k^{-1}S_{\rm Re})\} = S_{\rm Re}, \qquad (30)$$

$$S_{\rm SM}(q, r \to 2-q) = k\ln_{r\to 2-q}\{\exp_q(k^{-1}S_{\rm T})\} = S_{\rm LV}. \qquad (31)$$

Поскольку при $q \to 1$ имеем $p_j^{q-1} \equiv \exp\{(q-1)\ln p_j\} \to 1 + (q-1)\ln p_j$, то предельное значение энтропии Тсаллиса равно энтропии Больцмана–Гиббса:

$$S_{\rm T}(q \to 1) = \lim_{q\to 1}\frac{k}{q-1}\int P(x,t)[1 - P^{q-1}(x,t)]dx = -k\int P(x,t)\ln[P(x,t)]dx = S_{\rm BG}. \qquad (32)$$

Аналогично, для предельных значений энтропий Реньи и Ландсберга–Ведрала имеем

$$S_{\rm Re}(q \to 1) = S_{\rm BG} \quad \text{и} \quad S_{\rm LV}(q \to 1) = S_{\rm BG}.$$

Наконец, используя соотношения (27) и (23), получим формулу для определения энтропии Гаусса

$$S_{\rm SM}(q \to 1, r) = k\lim_{q\to 1}\ln_r\{\exp_q(k^{-1}S_{\rm T})\} = \frac{k}{r-1}\left\{1 - \exp\left[(r-1)\int P(x,t)\ln[P(x,t)]dx\right]\right\} = S_r^{\rm G}(p). \qquad (33)$$

Таким образом, все приведенные однопараметрические энтропии могут изучаться по единообразной схеме.

4. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЭНТРОПИЙНАЯ МЕРА ШАРМА–МИТТАЛА

Оригинальные и модифицированные энтропии Реньи и Тсаллиса, возникающие согласно развиваемой концепции на горизонте неэкстенсивной Вселенной, широко используются в современной космологии (см., например, [4, 18, 27, 31, 46, 58]). В частности, модифицированная энтропия Реньи успешно применяется к голографическому закону равнораспределения, предложенному Падманабханом для исследования термодинамических аспектов космической гравитации [3]. При этом модификация энтропии Реньи $\hat{S}_{\mathrm{Re}}$ связана с формальной заменой оригинальной энтропии Тсаллиса, фигурирующей в логарифмической формуле (27) исходной энтропии Реньи, на энтропию Бекенштейна–Хокинга S_{BH}. В рамках неэкстенсивной статистической механики был предложен [20] энтропийный формализм, основанный на модифицированной аналогичным способом двухпараметрической энтропии Шарма–Миттала, частным случаем которой является однопараметрическая энтропия Реньи [59–61].

Модификация энтропий Реньи и Шарма–Миттала, предложенная в работах [4, 20, 43], обеспечивается формальной заменой оригинальной энтропии Тсаллиса, фигурирующей в формулах (26) и (27), на энтропию Б–Х S_{BH}. В результате были получены следующие выражения для модифицированных энтропий

$$\hat{S}_{\mathrm{Re}} = k\ln\{\exp_q[k^{-1}S_{\mathrm{BH}}]\}, \tag{34}$$

$$\hat{S}_{\mathrm{SM}} = k\ln_r\{\exp_q(k^{-1}S_{\mathrm{BH}})\}. \tag{35}$$

Следует заметить, что физическая интерпретация подобной модификации указанных энтропий в настоящее время остается не совсем ясной. Тем не менее в ряде работ (см., например, [18, 24]) было показано, что энтропии (34) и (35) могут служить эффективной теоретической основой для энтропийной космологии, порождая ее различные варианты.

По мнению авторов данной работы, в качестве перспективных будущих исследований представляет несомненный интерес изучение еще одной модификации энтропии Шарля–Миттеля, которая приводит к новым сценариям в эволюционной космологии. Они получается путем замены энтропии Тсаллиса в оригинальном математическом представлении энтропии Шарля–Миттеля (формула (27)) на энтропию Барроу (9), описывающую сложную фрактальную структуре космологического горизонта Вселенной. В результате получим новую модифицированную энтропию

$$S_{\mathrm{SM}}^{\mathrm{mod}} = k\ln_r\{\exp_q(k^{-1}S_{\mathrm{Bar}})\} =$$
$$= \frac{k}{1-r}\left[\left(1+(1-q)\left(\frac{K}{k}\right)^{1+\Delta/2}\left(\frac{R_{\mathrm{H}}}{c}\right)^{2+\Delta}\right)^{\frac{1-r}{1-q}}-1\right], \tag{36}$$

которая содержит, кроме параметров неэкстенсивности q и r, дополнительный параметр Δ – показатель степени деформации космологической поверхности. Это обстоятельство позволяет значительно расширить методы конструирования различных сценариев эволюции Вселенной.

4.1. Сила, связанная с модифицированной энтропией Шарма–Миттала

Используя свойства (21) и (24) деформированных логарифма и экспоненты, а также формулы (9), (11) и (27), получим

$$\frac{dS_{\mathrm{SM}}^{\mathrm{mod}}}{dR_{\mathrm{H}}} = \{\exp_q(k^{-1}S_{\mathrm{Bar}})\}^{q-r}\frac{dS_{\mathrm{Bar}}}{dR_{\mathrm{H}}} =$$
$$= \left(1+(1-q)k^{-1}S_{\mathrm{Bar}}\right)^{\frac{q-r}{1-q}}\frac{dS_{\mathrm{Bar}}}{dR_{\mathrm{H}}} = \tag{37}$$
$$= \frac{(2+\Delta)}{c}\frac{K(k^{-1}K)^{\Delta/2}}{\left(1+(1-q)(k^{-1}K)^{1+\Delta/2}H^{-(2+\Delta)}\right)^{\frac{r-q}{1-q}}}H^{-(1+\Delta)}.$$

Соответственно, энтропийная сила, отвечающая модифицированной энтропии Шарма–Миттала F_{SM}, и ее давление P_{SM} на космологический горизонт Вселенной определяются формулами:

$$F_{\mathrm{SM}} = -T_{\mathrm{H}}\frac{dS_{\mathrm{SM}}^{\mathrm{mod}}}{dR_{\mathrm{H}}} = -\frac{2+\Delta}{2}\left(\frac{c^4}{G}\right)\times$$
$$\times\frac{(k^{-1}K)^{\Delta/2}}{\left(1+(1-q)(k^{-1}K)^{1+\Delta/2}H^{-(2+\Delta)}\right)^{\frac{r-q}{1-q}}}H^{-\Delta}, \tag{38}$$

$$P_{\mathrm{SM}} = \frac{F_{\mathrm{SM}}}{4\pi R_{\mathrm{H}}^2} = -\frac{2+\Delta}{8\pi}\left(\frac{c^2}{G}\right)\times$$
$$\times\frac{(k^{-1}K)^{\Delta/2}}{\left(1+(1-q)(k^{-1}K)^{1+\Delta/2}H^{-(2+\Delta)}\right)^{\frac{r-q}{1-q}}}H^{2-\Delta}. \tag{39}$$

При выводе соотношения (38) использовалась формула (14) для температуры де Ситтера.

Применяя формулу (39), найдем давления на космологический горизонт, оказываемые энтропийными силами, отвечающими следующим модифицированным энтропиям: Тсаллиса $S_{\mathrm{T}}^{\mathrm{mod}} = k\ln_{r\to q}\exp_q[k^{-1}S_{\mathrm{Bar}}]$; Реньи $S_{\mathrm{Re}}^{\mathrm{mod}} = k\ln\{\exp_q[k^{-1}S_{\mathrm{Bar}}]\}$; Ландсберга–Ведрала $S_{\mathrm{LV}}^{\mathrm{mod}} = k\ln_{2-q}\{\exp_q(k^{-1}S_{\mathrm{Bar}})\}$; Гаусса $S_{\mathrm{G}}^{\mathrm{mod}} = k\lim_{q\to 1}\ln_r\{\exp_q(k^{-1}S_{\mathrm{Bar}})\}$.

В результате получим:

$$P_{\mathrm{T}} = P_{\mathrm{SM}}(r\to q) = -\frac{2+\Delta}{2}\frac{c^2}{4\pi G}\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2}H^{2-\Delta}, \tag{40}$$

$$P_{\mathrm{Re}} = P_{\mathrm{SM}}(r \to 1) = -\frac{2+\Delta}{2}\frac{c^2}{4\pi G}\times \\ \times \frac{H^4}{(1-q)(k^{-1}K) + (k^{-1}K)^{-\Delta/2}H^{2+\Delta}}, \tag{41}$$

$$P_{\mathrm{G}} = P_{\mathrm{SM}}(q \to 1) = -\frac{3}{2}\frac{c^2}{4\pi G}(k^{-1}K)^{1/2}H, \tag{42}$$

$$P_{\mathrm{LV}} = P_{\mathrm{SM}}(r \to 2-q) = -\frac{2+\Delta}{2}\frac{c^2}{4\pi G}\times \\ \times \frac{(k^{-1}K)^{\Delta/2}}{\left(1 + (1-q)(k^{-1}K)^{1+\Delta/2}H^{-(2+\Delta)}\right)^2}H^{2-\Delta}. \tag{43}$$

Заметим, что если положить в формуле (41) параметр деформации $\Delta = 0$, то полученное выражение для давления на космологический горизонт отвечает модифицированной с помощью энтропии Б–Х S_{BH} энтропии Реньи

$$\hat{P}_{\mathrm{Re}} = -\frac{c^2}{4\pi G}\frac{H^2}{1 + (1-q)(k^{-1}K)H^{-2}}. \tag{44}$$

Выражения для давлений, связанных с энтропийными мерами Барроу и Тсаллиса–Чирто, следуют из формулы (40), когда свободные параметры принимают значения ($q = r$; $\Delta = 1$) и ($q = r$; $\Delta = 0$) соответственно. В результате будем иметь [31]

$$P_{\mathrm{Bar}} = -\frac{2+\Delta}{2}\frac{c^2}{4\pi G}(k^{-1}K)^{\Delta/2}H^{2-\Delta}, \\ P_{\mathrm{TC}} = -\frac{3}{2}\frac{c^2}{4\pi G}(k^{-1}K)^{1/2}H. \tag{45}$$

5. КЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ КОСМОЛОГИИ

В классической космологии модели эволюционирующей Вселенной конструируются на основе уравнений общей теории относительности Эйнштейна [39, 62]. Мы используем подход, выполненный в рамках энтропийной космологии, основой которого служит построение уравнений Фридмана с помощью модифицированного энтропийного формализма Шармы–Миттала, что является основной целью работы. Эту цель преследовали основные результаты по анализу различных типов неэкстенсивных энтропий, ответственных в рамках рассматриваемой концепции за возникновение энтропийной силы, изложенные в разделах 1–3.

Ограничимся для простоты рассмотрением плоской Вселенной, которая является бесконечной в пространстве, однородной, изотропной и расширяющейся. При этом будем считать, что Вселенная моделируется некоторой “космологической жидкостью”, дисперсные частицы которой суть галактики. На таком уровне крупномасштабного усреднения структура Вселенной симметрична и не имеет особенностей.

В плоском гиперпространстве пространственно-временной линейный интервал имеет вид метрики Фридмана

$$ds^2 = c^2dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{46}$$

которому соответствует метрический тензор $g_{\mu\nu}$ с галилеевыми компонентами $g_{00} = c^2$; $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -a(t)^2$; $g_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$; $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$, где t – собственное время; $a(t)$ – масштабный фактор Робертсона–Уокера.

Будем рассматривать идеальную космологическую жидкость, которая определяется как среда, в каждой точке которой существует локально инерциальная декартова система отсчета, движущаяся вместе с жидкостью; при этом сама жидкость однородна и изотропна по всем направлениям. Для такой среды тензор энергии-импульса, играющий роль источника гравитационного поля, в принятой системе координат имеет вид:

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + P)u_\mu u_\nu + Pg_{\mu\nu},$$

где $\rho = \rho(t)$, $P = P(\rho)$ – соответственно, плотность (гравитирующая энергия) и скалярное давление идеальной жидкости (включающей материю и излучение) в момент времени t. Здесь введена четырехмерная скорость $u_\mu = \partial x_\mu/\partial s$, которая определена условием, что в сопутствующей локально инерциальной декартовой системе отсчета ее компоненты равны $u_0 = 1$ и $u_{\mu\neq 0} = 0$. В соответствии с гипотезой об однородности и изотропии Вселенной предполагается, что тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ имеет диагональный вид, с пространственными компонентами, пропорциональными плотности давления [62]:

$$T_{00} = \rho c^2; \quad T_{11} = T_{22} = T_{33} = -P; \\ T_{\mu\nu} = 0 \quad \text{при} \quad \mu \neq \nu. \tag{47}$$

Заметим, что в плоской Вселенной[7] трехмерная кривизна является нулевой, однако четырехмерное пространство остается кривым.

[7] Как известно, пространство является плоским (открытым) только в том случае, если отношение $\Omega := \rho/\rho_{cr} \cong 1$, где $\rho_{cr} = 3H^2/8\pi G$ – критическая плотность (вещество + излучение), при которой происходит переход от открытой Вселенной к замкнутой. По современным наблюдательным данным величина $\Omega = 1.02 \pm 0.02$.

5.1. Уравнения Фридмана–Робертсона–Уокера в гравитации Эйнштейна

Далее будем рассматривать стандартную модель Фридмана для плоской открытой Вселенной. В сделанных выше предположениях из полевых уравнений общей теории относительности Эйнштейна следуют два уравнения Фридмана, описывающие расширение Вселенной

$$\left(\frac{1}{a}\frac{\partial a(t)}{\partial t}\right)^2 \equiv H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \Lambda/3, \qquad (48)$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = -4\pi G\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] + \Lambda/3, \qquad (49)$$

где $H(t) = a^{-1}\partial a/\partial t$ – параметр Хаббла, или хаббловская скорость расширения Вселенной[8]; $\rho = \rho_m + \rho_R$ – общая плотность энергии вещества и радиации. Эти уравнения определяют эволюцию масштабного фактора $a(t)$, изменение которого с течением времени описывает расширение или сжатие пространства до тех пор, пока Вселенную можно считать однородной и изотропной. Здесь в уравнения (48) и (49) включен дополнительный лямбда-член Λ (космологическая постоянная, которая эквивалентна энергии вакуума), объясняющий при надлежащем определении ускоренное расширение поздней Вселенной [64].

Из уравнений (48) и (49) (записанных без лямбда-члена) можно получить еще одно важное уравнение (ковариантный закон сохранения тензора энергии-импульса), описывающее эволюцию плотности энергии при адиабатическом расширении Вселенной в фридмановской космологии

$$\partial\rho(t)/\partial t + 3H(t)[\rho(t) + P(t)/c^2] = 0. \qquad (50)$$

Для этого необходимо продифференцировать уравнение энергии (48) и результат скомбинировать с уравнением движения (49), которому удовлетворяет давление. Следует особо подчеркнуть, что согласно общей теории относительности, гравитационное поле создается не только плотностью среды, но и давлением в комбинации $\rho(t) + P(t)/c^2$ [65].

Таким образом, фундаментальными уравнениями динамической космологии, основанными на метрике Робертсона–Уокера, являются уравнение (49), выражающее ускорение через плотность энергии и давление идеальной космологической жидкости, и уравнение сохранения энергии (50). Эти уравнения содержат три неизвестные функции: $a(t)$, $\rho(t)$ и $P(t)$. Чтобы полностью определить систему, необходимо еще одно уравнение. Обычно этим уравнением является уравнение состояния, выражающее плотность давления как функцию плотности энергии $P = P(\rho)$. Используя уравнение $P = P(\rho)$, можно при соответствующих начальных условиях решить дифференциальное уравнение (50), чтобы найти ρ как функцию $a(t)$, а затем использовать (48), чтобы отыскать $a(t)$ как функцию t. Заметим, что во многих практически интересных случаях справедливо линейное соотношение $P = w(t)\rho$; в частности, в случае радиационно-доминированной эпохи $w = 1/3$, для эры доминирования вещества (например, пыли) $w = 0$, для вакуумно-доминированной Вселенной $w = -1$ [39, 62]. Однако в более общем не адиабатическом случае давление может зависеть от других термодинамических переменных (температуры, энтропии и т.п.).

Следует также отметить, что в случае стандартной плоской модели Вселенной можно обойтись без точного знания зависимости плотности энергии ρ от масштабного фактора a при обосновании важных следствий, касающихся прошлого и будущего расширения Вселенной [39]. Действительно, используя уравнения (48) и (49), можно получить уравнение

$$\left(\frac{3}{a}\right)\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = -\frac{4\pi G}{c^2}(c^2\rho + 3P),$$

из которого видно, что до тех пор, пока величина $c^2\rho + 3P$ остается положительной (что имеет место для любой комбинации вещества и излучения в отсутствие плотности энергии вакуума), ускорение $a^{-1}\partial^2 a/\partial t^2 \le 0$ оказывается отрицательным, т.е. гравитация становится притягивающей. Именно по этой причине, для объяснения наблюдаемого ускоренного расширения Вселенной, при котором гравитация оказывается отталкивающей (антигравитацией), возникла необходимость в видоизменении этого уравнения.

В работе [31] нами был рассмотрен подход к моделированию не адиабатического сценария ускоренного расширения Вселенной под воздействием давления энтропийных сил, связанных с энтропиями, пропорциональными площади космологического горизонта. К таким энтропиям относятся приведенные выше энтропии Бекенштейна–Хокинга, Барроу и Тсаллиса–Чирто. Однако простая формула площади для энтропии не выполняется в теориях космической гравита-

[8] Значение H_0, соответствующее наблюдениям фонового космического излучения (CMB) на КА "Планк", составляет $H_0 = 67.4 \pm 0.5$ (км/с)/Мпк [63]. В то же время, основываясь на данных измерений телескопом Хаббла расстояний и красного смещения ярких объектов в относительно близких галактиках – сверхновых, цефеид ("лестницы расстояний") называется значение 73.3 ± 1.7 (км/с)/Мпк [64]. На современном этапе исследований устранить это различие (~9%), значительно превышающее точность измерений, вряд ли возможно, но оно имеет ключевое значение в моделях эволюции Вселенной.

ции с высшими производными [67]. Поэтому представляется целесообразным получить обобщенные уравнения Фридмана–Робертсона–Уокера в рамках энтропийной космологии, основанной на модифицированных энтропиях, зависящих от свободных параметров неэкстенсивности (q, r) и деформации (Δ). Эти результаты непосредственно связаны с голографическими свойствами гравитации.

6. ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ РИДМАНА–РОБЕРТСОНА–УОКЕРА

Следуя методологии вывода модифицированных уравнений Фридмана в энтропийной космологии [1, 5, 13, 15, 16], запишем эффективное давление $P'_{\rm SM}$, связанное с модифицированной энтропией Шарма–Миттала в виде:

$$P'_{\rm SM} = P + P_{\rm SM} = P - \frac{1}{4\pi G}\frac{2+\Delta}{2}\times \\ \times\frac{c^2(k^{-1}K)^{\Delta/2}H^{2-\Delta}}{\left[1+(1-q)(k^{-1}K)^{1+\Delta/2}H^{-(2+\Delta)}\right]^{\frac{r-q}{1-q}}}, \tag{51}$$

где давление $P_{\rm SM}$ задается формулой (39). По предположению именно этому давлению в развиваемом нами варианте энтропийной космологии обязана антигравитация, приводящая к ускоренному расширению Вселенной.

При использовании эффективного давления $P'_{\rm SM}$ космологические уравнения Фридмана (49) и (50) принимают следующий обобщенный вид:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = -4\pi G\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] + \frac{(2+\Delta)}{2}\times \\ \times\frac{(k^{-1}K)^{\Delta/2}H(t)^{2-\Delta}}{\left[1+(1-q)(k^{-1}K)^{1+\Delta/2}H(t)^{-(2+\Delta)}\right]^{\frac{r-q}{1-q}}}, \tag{52}$$

$$\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} + 3H\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = \frac{3}{4\pi G}\frac{(2+\Delta)}{2}\times \\ \times\frac{(k^{-1}K)^{\Delta/2}H(t)^{3-\Delta}}{\left[1+(1-q)(k^{-1}K)^{1+\Delta/2}H(t)^{-(2+\Delta)}\right]^{\frac{r-q}{1-q}}}. \tag{53}$$

Эти феноменологически модифицированные уравнения Фридмана, естественно, должны быть дополнены соответствующим уравнением состояния $P = P(\rho)$ [64].

Заметим, что наличие нескольких свободных параметров в этих уравнениях позволяет получить различные варианты движущих сил, вызывающих отклонение от “стандартной” голографической модели Вселенной, предложенной Верлинде [1]. Как показано, например, в работе [25], модель эволюции Вселенной, основанная на системе уравнений (52)–(53) при $\Delta = 0$, стабильна и имеет существенно меньше недостатков по сравнению с моделью Верлинде, усовершенствованной за счет ряда введенных ограничений.

Ниже приведено несколько вариантов обобщенных моделей фридмановской Вселенной, полученных исходя из предложенной нами модифицированной энтропии Шарма–Миттеля.

6.1. Обобщенные уравнения Фридмана с использованием модифицированной энтропии Реньи S_{Re}^{mod}

Эти уравнения следуют из уравнений (52) и (53), если устремить параметр неэкстенсивности r к единице. В результате будем иметь:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = -4\pi G\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] + \\ + \frac{(2+\Delta)}{2}\frac{H(t)^4}{(1-q)(k^{-1}K) + (k^{-1}K)^{-\Delta/2}H(t)^{(2+\Delta)}}, \tag{54}$$

$$\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} + 3H\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = \frac{3}{4\pi G}\frac{(2+\Delta)}{2}\times \\ \times\frac{H(t)^5}{(1-q)(k^{-1}K) + (k^{-1}K)^{-\Delta/2}H(t)^{(2+\Delta)}}. \tag{55}$$

Уравнения (54) и (55) могут быть использованы для изучения различных свойств пространства-времени.

6.2. Обобщенные уравнения Фридмана с использованием модифицированной энтропии Ландсберга–Ведрала S_{LV}^{mod}

Устремляя в уравнениях (52) и (53) параметр неэкстенсивности r к $(2 - q)$, получим

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = -4\pi G\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] + \frac{(2+\Delta)}{2}\times \\ \times\frac{(k^{-1}K)^{\Delta/2}H(t)^{2-\Delta}}{\left[1+(1-q)(k^{-1}K)^{1+\Delta/2}H(t)^{-(2+\Delta)}\right]^2}, \tag{56}$$

$$\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} + 3H\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = \frac{3}{4\pi G}\frac{(2+\Delta)}{2}\times \\ \times\frac{(K/k)^{\Delta/2}H(t)^{3-\Delta}}{\left[1+(1-q)(K/k)^{1+\Delta/2}H(t)^{-(2+\Delta)}\right]^2}. \tag{57}$$

Заметим, что неэкстенсивная энтропийная мера Ландсберга–Ведрала до сих пор не привлекалась к моделированию в рамках энтропийной космологии эволюции Вселенной.

6.3. Обобщенные уравнения Фридмана, основанные на модифицированной энтропии Реньи $\hat{S}_{Re}$

Полагая в уравнениях (54) и (55) параметр деформации Δ равным нулю, получим следующие обобщенные уравнения Фридмана

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} + 4\pi G\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = = \frac{H(t)^2}{1 + (1-q)(K/k)H(t)^{-2}}, \quad (58)$$

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + 3H\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = = \frac{3}{4\pi G}\frac{H(t)^3}{1 + (1-q)(K/k)H(t)^{-2}}. \quad (59)$$

В этих уравнениях исходная энтропия Реньи модифицирована с помощью энтропии Бекенштейна–Хокинга [20, 21, 25].

6.4. Классические уравнения энтропийной космологии

Эти уравнения получаются, если в уравнениях (52) и (53) положить параметр деформации $\Delta = 0$ и устремить параметр неэкстенсивности q к единице:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = -4\pi G\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] + H(t)^2, \quad (60)$$

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + 3H\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] - \frac{3}{4\pi G}H(t)^3 = 0. \quad (61)$$

В энтропийной космологии их можно рассматривать как обобщенные уравнения ускорения (48) и непрерывности (49), выведенные с использованием энтропии Бекенштейна–Хокинга. Величина H^2 в этих уравнениях связана с энтропийной силой, которая может объяснить ускоренное расширение Вселенной без введения понятия темной энергии космического вакуума с отрицательной плотностью энергии, ассоциируемых с космологической постоянной. Заметим, что энтропия Б–Х пропорциональна площади космологического горизонта Вселенной, благодаря чему модель, основанная на этой энтропии, предсказывает только расширяющуюся с равномерным ускорением Вселенную. Как показано в работе [1], такая модель согласуется с данными определения постоянной Хаббла по сверхновым на “лестнице расстояний” (космическому хронометру).

6.5. Эволюция Вселенной под воздействием энтропийной силы Барроу

Энтропийной силе Барроу соответствует случай нулевой деформации ($\Delta = 0$). Эта сила полностью отвечает стандартной энтропийной силе Б–Х [1]. Устремляя в уравнениях (52) и (53) параметр экстенсивности q к единице, получим уравнения

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} + 4\pi G\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = \frac{2+\Delta}{2}\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} H(t)^{2-\Delta}, \quad (62)$$

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + 3H\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = = \frac{3}{4\pi G}\frac{2+\Delta}{2}\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} H(t)^{3-\Delta}, \quad (63)$$

описывающие при использовании энтропии Барроу (9) как космологическое ускорение, так и замедление [31]. Следует вместе с тем подчеркнуть, что, как отмечалось авторами работы [38], опиравшимися на данные наблюдений из выборки коллекции (SN Ia) сверхновых и использующими прямые измерения параметра Хаббла космическими хронометрами, этим данным лучше соответствует значение параметра деформации, равное $\Delta = 0.094$. Другими словами, ими допускается, что небольшое отклонение от стандартной голографической энтропии Б–Х является более предпочтительным.

В общем случае, когда $0 < \Delta < 1$, мы имеем новый космологический сценарий проявления энтропийной силы, основанный на энтропии Барроу, связанной с квантово-гравитационными эффектами горизонта Вселенной. Этот сценарий позволяет моделировать космологическое состояние и эволюцию Вселенной при различных модификациях управляющей гравитационной силы Барроу [45].

6.6. Ускорение (сжатие) Вселенной под воздействием энтропийной силы Тсаллиса–Чирто

Уравнения (62) и (63), полученные при $\Delta = 1$, имеют вид:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} + 4\pi G\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = \frac{3}{2}\left(\frac{K}{k}\right)^{1/2} H(t), \quad (64)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H(t)\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = \frac{3}{4\pi G}\frac{3}{2}\left(\frac{K}{k}\right)^{1/2} H(t)^2. \quad (65)$$

Эти уравнения связаны с энтропией Тсаллиса–Чирто, описывающей максимальную деформацию космологического горизонта из-за квантово-гравитационных эффектов [33].

Эволюционная модель, сконструированная на их основе, отвечает как замедлению, так и ускорению Вселенной, поскольку управляющий силовой член в этой модели пропорционален хаббловской скорости расширения Вселенной H в отличие от аналогичного энтропийного силового члена в модели Бекенштейна–Хокинга, который пропорционален H^2 [68].

Отметим, что космологические уравнения, подобные уравнениям (64) и (65), неоднократно обсуждались в литературе при моделировании эволюции Вселенной, основанной на различных аппроксимациях переменного космологического члена (см., например, [68]). С другой стороны, полученная из энтропии Барроу энтропийная сила (12) Тсаллиса–Чирто ведет себя так же, как и движущая сила вязкой космологической жидкости с объемной вязкостью η, с использованием которой в моделях "вязкой космологии" объясняется ускоренное расширение Вселенной. Действительно, выражение для эффективного давления $P'_{\mathrm{TC}}(t) = P(t) - \frac{3}{2}\frac{c^2}{4\pi G}(K/k)^{1/2}H(t)$ в уравнении (50) аналогично выражению $P'(t) = P(t) - 3\eta H(t)$ для давления в моделях, предложенных для описания темной материи. В моделях этого типа предполагается, что Вселенная заполнена космологической жидкостью с объемной вязкостью η, которая может генерировать энтропию однородной и изотропной Вселенной [69, 70]. Приведенное сходство стало возможным по причине того, что введенная на основе голографического принципа неаддитивная энтропия Тсаллиса–Чирто ведет себя так, как если бы это была классическая энтропия однородной и изотропной Вселенной, порожденная объемным вязким напряжением космологической жидкости [71, 72].

Таким образом, все модели, рассмотренные в этом разделе, как и многие другие, сконструированные на базе обобщенных уравнений Фридмана (52)–(53), описывают эволюцию Вселенной без использования представлений о наличии гипотетической темной энергии, аналогом которой служит космологическая постоянная. Несомненно, что их дальнейший анализ будет способствовать более глубокому пониманию нетрадиционной термодинамики и статистических аспектов пространства-времени и гравитации.

К сказанному уместно добавить следующее: принцип общековариантности имеет ключевое эвристическое значение при выводе уравнений ОТО. Однако ковариантное сохранение всех слагаемых в полевых уравнениях Эйнштейна, дополненных лямбда-членом, не нарушается только в случае, когда Λ – const. Исходные в нашем исследовании фридмановские уравнения (48) и (49) получены редукцией общековариантных тензоров: тензора Риччи и тензора энергии-импульса материи. Поэтому вполне естественно, что феноменологические уравнения Фридмана (52)–(53), в какой-то степени моделирующие член $\Lambda(t)$, не могут быть выведены в рамках каких-либо общековариантных уравнений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из формализма Верлинде, альтернативного концепции темной энергии, исследованы обобщенные космологические сценарии ускоренного расширения (сжатия) неэкстенсивной Вселенной Фридмана–Роберсона–Уокера, которые возможны в рамках энтропийной космологии, основанной на модифицированной энтропийной мере Шарма–Миттала с показателем деформации, учитывающим сложную фрактальную структуру космологического горизонта. Использование двухпараметрической энтропии Шарма–Миттала, являющейся родоначальником целого семейства однопараметрических энтропий, позволяет изучать различные сценарии динамической эволюции неэкстенсивной Вселенной по единообразной схеме. Выполненное в рамках неэкстенсивной статистической теории исследование использует несколько энтропий (таких как энтропии Барроу и Тсаллиса–Чирто, а также модифицированные энтропии Шарма–Миттала, Реньи, Ландсберга–Ведрала и Гаусса), ассоциируемых с горизонтом Вселенной из-за хранящейся там голографической информации. Эффект неэкстенсивной (неаддитивной) статистической механики и термодинамики в космологическом контексте заключается в видоизменении управляющей энтропийной силы в уравнениях гравитационного поля Эйнштейна.

Рассмотренная в работе модификация неэкстенсивной энтропии Шарма–Миттала базируется на энтропии Барроу, которая заменяет энтропию Бекенштейна–Хокинга, фигурирующую в известных энтропийных формализмах. Смысл такой замены состоит в том, что энтропия Барроу, учитывающая возможные эффекты квантово-гравитационной пены в области космологического горизонта, позволяет использовать дополнительные свободные параметры для оценки ускоренного расширения Вселенной, которое в большинстве случаев несколько больше, чем в базовом сценарии, основанном на энтропии Бекенштейна–Хокинга.

В результате авторами получен целый набор новых обобщенных уравнений Фридмана–Робертсона–Уокера, в которых вместо космологической постоянной фигурируют управляющие силы, наличие которых приводит к различным сценариям эволюции Вселенной в зависимости от конкретной формы энтропии, изначально выбранной для описания горизонта событий. Другими словами, развитый энтропийный формализм, альтернативный концепции темной энергии, может служить новой теоретической основой для моделирования динамической эволюции Вселенной, порождая ее модифицированные формы. Результаты моделирования динамической эволюции Вселенной, выполненного на основе приведенных в статье космологических уравнений, предполагается рассмотреть в других публикациях авторов.

В заключение заметим, что проблеме термодинамического моделирования динамического поведения Вселенной без привлечения концепции темной энергии, развивающему идеи Верлинде в рамках неэкстенсивной статистической механики и термодинамики, в мире уделяется растущее внимание, в то время как в отечественной литературе публикации, связанные с изучением этих основополагающих принципов, к сожалению, практически отсутствуют. Авторы попытались в какой-то мере восполнить этот пробел. Именно по этой причине значительная часть данной статьи посвящена обсуждению некоторых аспектов неэкстенсивной статистики, одним из приложений которых служит космология. Естественно, теория Верлинде не претендует на исчерпывающее объяснение ключевых космологических особенностей, к которым относится, в частности, объяснение анизотропии реликтового излучения, специфических свойств крупномасштабной структуры Вселенной, распространенности легких химических элементов. Вместе с тем в этом подходе нет противоречий с имеющимися наблюдательными данными, включая прямые измерения параметра Хаббла на основе космического хронометра. Можно думать, что космологические модели, в которых аналогом гравитации выступает энтропийная сила, ответственная за ускоренное расширение Вселенной, получат дальнейшее развитие.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы признательны рецензентам за сделанные полезные замечания.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена в рамках Госзадания ИПМ им. М.В. Келдыша и ГЕОХИ им. В.И. Вернадского РАН и частично поддержана также грантом Минобрнауки № 075-15-2020-780 от 07.10.2020 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *E. J. Verlinde*, High Energy Phys. **4**, 1 (2011).
2. *M. Akbar and R. G. Cai*, Phys. Rev. D. **75**, 084003 (2007).
3. *T. Padmanabhan*, Modern Physics Letters A **25**, 1129 (2010).
4. *E. M. C. Abreu and J. A. Neto*, arXiv:2107, 04869 v1 [gr-qc] (2021).
5. *D. A. Easson, P. H Frampton, and G. F. Smoot*, Phys. Lett. B **696**, 273 (2011).
6. *J. D. Bekenstein*, Phys. Rev. D. **7**, 2333 (1975).
7. *S. W. Hawking*, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
8. *T. S. Koivisto, D. F. Mota, and M. Zumalacárregui*, J. Cosmol. and Astroparticle Phys. **02**, id. 027 (2011).
9. *Y. S. Myung*, Astrophys. Space Sci. **335**, 553 (2011).
10. *Y.-F. Cai, J. Liu, and H. Li*, Phys. Lett. B **690**, 213 (2010).
11. *Y.-F. Cai and E. Saridakis*, Phys. Lett. B **697**, 280 (2011).
12. *T. Qiu and E. N. Saridakis*, Phys. Rev. D **85**, 043504 (2012).
13. *S. Basilakos, D. Polarski, and J. Sola*, Phys. Rev. D **86**, 043010 (2012).
14. *D. A. Easson, P. H. Frampton, and G. F. Smoot*, arXiv.1003.1528 v3[hep.-th.] (2012).
15. *N. Komatsu and S. Kimura*, Phys. Rev. D **87**, 043531 (2013).
16. *N. Komatsu and S. Kimura*, Phys. Rev. D **89**, 123501 (2014).
17. *A. D. Wissner-Gross and C. E. Freer*, Phys. Rev. Lett. **110**, 168702 (2013).
18. *V. G. Czinner and H. Iguchi*, Phys. Lett. B **752**, 306 (2016).
19. *H. Moradpour*, Int. J. Theor. Phys. **55**, 4176 (2016).
20. *H. Moradpour, S. Sheykhi, C. Corda, and I. G. Salako*, Phys. Lett. B **783**, 82 (2018).
21. *S. W. Hawking and G. T. Horowitz*, Class. Quantum Grav. **13**, 1487 (1996).
22. *N. D. Keul, K. Oruganty, E. T. S. Bergman, N. R. Beattie, W. E. McDonald, R. Kadirvelraj, M. L. Gross, R. S. Phillips, S. C. Harvey, and Z. A. Wood*, Nature **563**, 584 (2018).
23. *J. D. Brown, E. A. Martinez, and J. W. York*, Phys. Rev. Lett. **66**, 2281(1991).
24. *N. Komatsu*, Phys. Rev. D **99**, 043523 (2019).
25. *A. Sayahian Jahromi, S. A. Moosavi, H. Moradpour, J. P. Morais Graça, I. P. Lobo, I. G. Salako, and A. Jawad*, Phys. Lett. B **780**, 21 (2018).
26. *A. Sheykhi*, Phys. Lett. B **785**, 118 (2018).
27. *Y. Aditya, S. Mandal, P. Sahoo, and D. Reddy*, Eur. Phys. J. **79**, 1020 (2019.)
28. *E. N. Saridakis and S. Basilakos*, Eur. Phys. J. C **81**, 644 (2021).
29. *J. D. Barrow, S. Basilakos, and E. N. Saridakis*, Phys. Lett. B **815**, 136134 (2021).
30. *U. K. Sharma, V. C. Dubey, A. H. Ziaie, H. Moradpour, and G. Kaniadakis*, Eprint arXiv:2106.08139 (2021).
31. *A. V. Kolesnichenko and M. Ya. Marov*, Mathematica Montisnigri L, 80 (2021).
32. *W. de Sitter*, Proc. Roy. Acad. Sci. (Amsterdam) **19**, 1217 (1917).
33. *C. Tsallis and L. J. L. Cirto*, Eur. Phys. J. C. **73**, 2487 (2013).
34. *G. Kaniadakis*, Phys. Rev. E **66**, 056125 (2002).
35. *J. D Barrow*, Phys. Lett. B **808**, 135643 (2020).
36. *A. S. Jahromi, S. Moosavi, H. Moradpour, J. M. Graca, I. Lobo, I. Salako, and A. Jawad*, Phys. Lett. B **780**, 21 (2018).
37. *L. Susskind*, J. Math. Phys. **36**, 6377 (1995).
38. *F. K. Anagnostopoulos, S. Basilakos, and E. N. Saridakis*, Eur. Phys. J. C **80**, 826 (2020).

39. *С. Вайнберг*, *Космология* (М.: УРСС: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2013).
40. *R. C. Nunes, E. M. Barboza, E. M. C. Abreu, and J. A. Neto*, J. Cosmol. and Astroparticle Phys. **08**, 051 (2016).
41. *B. D. Sharma and D. P. Mittal*, J. Comb. Inform. & Syst. Sci. **2**, 122 (1975).
42. *А. В. Колесниченко*, Mathematica Montisnigri **XLII**, 74 (2018).
43. *E. M. C. Abreu, J. A. Neto, E. M. Jr. Barboza, A. C. R. Mendes, and B. B. Soares*, Modern Physics Letters A **35**, 2050266 (2020).
44. *F. K. Anagnostopoulos, S. Basilakos, G. Kofinas, and V. Zarikas*, JCAP 053, (2019).
45. *E. N. Saridakis*, J. Cosmol. and Astroparticle Phys. **07**, 031(2020).
46. *S. Waheed*, Eur. Phys. J. Plus. **135**, 11 (2020).
47. *G. Wilk and Z. Wlodarczyk*, Phys. Rev. Lett. **84**, 2770 (2000).
48. *J. W. Gibbs Elementary principles in statistical mechanics* (New York: Charles Scribner’s Sons, 1960).
49. *Д. П. Зубарев*, *Неравновесная статистическая механика* (М.: Наука, 1971).
50. *A. Renyi*, Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. Prob. **1**, 547 (1961).
51. *A. Renyi*, *Probability Theory* (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1970).
52. *J. Havrda and F. Charvat*, Kybernetika **3**, 30 (1967).
53. *Z. Daroczy*, Inform. Control. **16**, 36 (1970).
54. *C. Tsallis*, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).
55. *T. D. Frank and A. R. Plastino*, Eur. Phys. J. B **30**, 543 (2002).
56. *P. T. Landberg and V. Vedral*, Phys. Lett. A **247**, 211 (1998).
57. *C. Tsallis*, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics* (New York: Springer. 2009).
58. *T. S. Biró and V. G. Czinner*, Phys. Lett. B **726**, 861 (2013).
59. *A. M. Scarfone and T. Wada*, Phys. Rev. E **72**, id. 026123 (2005).
60. *E. Aktürk, G. B. Bagci, and R. Sever*, Eprint arXiv: cond-mat/0703277 (2007).
61. *А. В. Колесниченко Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения* (М.: ЛЕНАНД, 2019).
62. *S. Weinberg*, Rev. of Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
63. *N. Aghanim, Y. Akrami, et al.*, arXiv e-prints arXiv:1807.06209 (2018).
64. *A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, et al.*, ApJ **876**, 85 (2019).
65. *И. Д. Новиков Как взорвалась Вселенная* (М.: Наука, 1988).
66. *A. Friedmann*, Zeitschrift für Physik **10**, 377 (1922).
67. *R. G. Cai and S. P. Kim*, JHEP **0502**, 050 (2005).
68. *S. Basilakos, M. Plionis, and J. Sola*, Phys. Rev. D **80**, 083511 (2009).
69. *T. Padmanabhan and S. M. Chitre*, Phys. Lett. A **120**, 433 (1987).
70. *X.-H. Meng and X. Dou*, Communicationsin Theoretical Physics **52**, 377 (2009).
71. *B. Li and J. Barrow*, Phys. Rev. D **79**, id. 103521 (2009).
72. *L. Sebastian*, Eur. Phys. J. C **69**, 547 (2010).