УСТРАНЕНИЕ ХАББЛОВСКОГО НЕСООТВЕТСТВИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВЗАИМОСВЯЗИ ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ И МАТЕРИИ В СОВРЕМЕННОЙ ВСЕЛЕННОЙ

© 2023 г. Г. С. Бисноватый-Коган[1,*], А. М. Никишин[2,**]

[1] *Институт космических исследований РАН, Москва, Россия*

[2] *Московский инженерно-физический институт (МИФИ), Москва, Россия*

**E-mail: gkogan@iki.rssi.ru*

***E-mail: nikishin-5@yandex.ru*

Поступила в редакцию 31.08.2022 г.
После доработки 14.11.2022 г.
Принята к публикации 08.12.2022 г.

В современной космологии принято, что скалярное поле, ответственное за инфляционную стадию ранней Вселенной, полностью превращается в вещество. Предполагается, что ускоренное расширение в настоящее время управляется темной энергией (DE), которая, по всей вероятности, определяется космологической постоянной Эйнштейна, не связанной со скалярным полем, ответственным за инфляцию. Мы рассматриваем здесь космологическую модель, в которой DE может иметь в настоящее время два компонента, один из которых – постоянная Эйнштейна (Λ), а другой, меньший переменный компонент DEV (Λ_V), связан с остатком скалярного поля, вызвавшего инфляцию, после того, как основная часть скалярного поля превратилась в вещество. Мы рассматриваем здесь только стадии эволюции Вселенной после рекомбинации ($z \lesssim 1100$), где DM – преобладающий компонент вещества. Предполагается, что превращение скалярного поля в вещество продолжается в настоящее время и сопровождается обратным процессом превращения DM в скалярное поле. Рассматривается связь между DM и DEV, которая приводит к линейному соотношению между плотностями энергии этих компонентов после рекомбинации $\rho_{\rm DM} = \alpha\rho_{\rm DEV}$. Рассматриваются также варианты с зависимостью от красного смещения z коэффициента $\alpha(z)$. Одна из возникших в современной космологии проблем, получившая название Hubble Tension (HT) – Несоответствие Хаббла, состоит в расхождении значений постоянной Хаббла в настоящее время (H_0), измеренных по наблюдениям Вселенной на малых красных смещениях ($z \lesssim 1$) и по наблюдениям флуктуаций реликтового излучения во Вселенной при больших красных смещениях ($z \approx 1100$). В рассматриваемой модели это несоответствие может быть объяснено отклонением существующей космологической модели от использованной общепринятой ΛCDM модели плоской Вселенной действием добавочного компонента темной энергии DEV на стадиях после рекомбинации. В рамках этой расширенной модели мы рассматриваем различные функции $\alpha(z)$, которые могут устранить HT. Чтобы поддерживать близким к постоянному соотношение плотностей энергии DEV и DM на протяжении интервала $0 \le z \lesssim 1100$, необходимо допустить существование широкого спектра масс частиц темной материи.

Ключевые слова: космология, темная энергия, Несоответствие Хаббла

DOI: 10.31857/S0004629923020032, **EDN:** CJENUQ

1. ВВЕДЕНИЕ

Закон Хаббла $v = Hr$ является одним из важнейших законов космологии, задающим скорость разбегания космических объектов v в зависимости от расстояния между ними r. Измерение параметра H_0 в настоящую эпоху является весьма трудной и нетривиальной задачей, которой многие годы занимаются различные научные группы. Скорость разбегания определяется по красному смещению линий, наблюдаемых в спектрах улетающих галактик, но наибольшая трудность состоит в измерениях расстояний до них. При этом используется метод "лестницы расстояний" (cosmic distance ladder), в котором используются все более яркие стандартные свечи – объекты с известной светимостью. Этот метод позволяет измерить расстояния до относительно близких объектов (в пределах тысячи парсек), и не свободен от систематических ошибок, связанных с неизбежным разбросом светимостей используемых стандартных свечей. Использование разных ступеней в этой лестнице разными группами привело в 1972–1974 гг. к существенному расхождению значений H_0: от ~50 км/с/Мпс группой Сэндеджа-Таммана до ~100 км/с/Мпс группой Вокулера [1]. Со временем измерения H_0 на красных смещениях $\lesssim 1$ были существенно улучшены благодаря созданию больших телескопов, включая измерения на телескопах миссии Хаббла, что позволило ограничить интервал значений до $H_0 \approx 72$–75 км/с/Мпс.

Измерения спектра флуктуаций реликтового излучения на спутниках WMAP и Planck привели к возможности независимого измерения параметра Хаббла H_r в эпоху рекомбинации. Используя теоретическую зависимость $H(z)$ в рамках принятой космологической модели, предположительно ΛCDM, было получено современное значение параметра Хаббла $H_0^{\rm Dist}$, которое отличалось от значения, полученного в локальных измерениях $H_0^{\rm Loc}$ на статистически значимую величину в пределах (4.5–6.3)σ [2]. В этом расхождении и заключается проблема HT (см., однако, [3]).

В космологических моделях, принятых в настоящее время, предполагается, что скалярное поле, ответственное за существование ранних стадий быстрого экспоненциального расширения, полностью превращается в вещество в процессе инфляции. Однако современное ускоренное разбегание галактик определяется темной энергией (DE), предположительно постоянной Эйнштейна Λ, которая никак не связана со скалярным полем, которое привело к инфляции.

Согласно измерениям флуктуаций реликта (WMAP, Planck), наша Вселенная с точностью <1% является плоской, и ее средняя плотность равна критической ρ_c. Современная ΛCDM модель Вселенной характеризуется следующими параметрами:

$$\begin{gathered}\text{вклад нерелятивистского вещества}\\ \Omega_{\rm M} = \Omega_{\rm DM} + \Omega_{\rm B} \approx 0.26 + 0.04 \approx 0.3, \\ \text{вклад темной энергии} \quad \Omega_\Lambda \approx 0.7.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\Omega_i = \rho_{i,0}/\rho_c$; Ω_Λ определяется постоянной Эйнштейна Λ; $\Omega_{\rm DM}$ и $\Omega_{\rm B}$ определяются плотностью темной материи и барионного вещества.

В данной работе, следуя [4, 5], для объяснения несоответствия HT мы рассматриваем космологическую модель, которая является расширением принятой ΛCDM модели, и включает два компонента темной энергии, один из которых – постоянная Эйнштейна (Λ), а другой, малый переменный компонент DEV (Λ_V), является остатком скалярного поля, создавшего инфляцию. Появление проблемы HT здесь связывается с пересчетом параметра Хаббла $H^{\rm Dist}(z_r)$, измеренного на момент рекомбинации, к современному значению $H^{\rm Dist}(0)$, используя стандартную ΛCDM модель, которая предполагается неполной, что приводит после пересчета к заниженному значению современной постоянной Хаббла. В данной работе получено более корректное решение космологического уравнения, где учитывается действие переменного добавочного компонента темной энергии DEV, что существенно уточняет результаты, полученные в [4, 5], для значений плотности DEV, при которых проблема HT не возникает.

2. НЕСООТВЕТСТВИЕ ХАББЛА

Проблема, возникшая в космологии в последние годы, состоит в различии значений постоянной Хаббла в настоящую эпоху, получаемых в разных экспериментах. Анализ наблюдений миссии Planck, измеряющей флуктуации реликтового излучения в период рекомбинации, приводит к современному значению постоянной Хаббла [6–8]:

$$H_0^{\rm Dist} = 67.36 \pm 0.54 \text{ км/с/Мпк}. \tag{2}$$

В то же время измерения с использованием сверхновых типа Ia (SNIa) с калибровкой расстояния по цефеидам [9–13], дают значение

$$H_0^{\rm Loc} = 74.03 \pm 1.42 \text{ км/с/Мпк}. \tag{3}$$

Измерения с использованием временны́х задержек линзированных квазаров [14] дают значение $H_0 = 73.3^{+1.7}_{-1.8}$ км/с/Мпк. В работе [15] было найдено значение $H_0 = 72.4 \pm 1.9$ км/с/Мпк, используя ветвь красных гигантов, приложенную к SNIa, которая не зависит от шкалы расстояний цефеид. Анализ набора этих и других недавних измерений на малых и больших красных смещениях показывает [16], что несоответствие между результатами Planck [8], и любыми тремя независимыми измерениями в поздней Вселенной лежит в интервале между 4σ и 6σ. Несколько новых космических экспериментов были предложены для проверки достоверности этого расхождения значений постоянной Хаббла [17, 18].

Было предложено много различных вариантов объяснения возникновения HT, некоторые из которых были опровергнуты наблюдательными данными. Общепринятого и доказанного экспериментально решения проблемы HT в настоящее время пока нет. Предложенные решения можно разбить на дорекомбинационные и послерекомбинационные, которые неким образом меняют процесс эволюции Вселенной либо в период до рекомбинации, либо после нее соответственно. Рассматриваются также варианты с использованием теорий гравитации, основанных на модификациях ОТО (см. работы [19–41]). Подробный обзор большинства предложенных методов решения данной проблемы приведен в работе [18]. В ней изложены предлагаемые способы объяснения данного феномена, а также возможное влияние их присутствия на другие космологические параметры.

Наблюдается значимое расхождение между экспериментальными значениями H_0, полученными по флуктуациям реликтового излучения миссией Planck, и значениями, полученными в локальных измерениях. В связи с этим мы рассмотрим возможность решения проблемы НТ, как расхождения между результатами этих экспериментов, рассматривая усредненную величину, полученную в локальных измерениях, как истинную. В дальнейших численных расчетах мы используем значение H_0^{Dist}, полученное в результате измерений на больших красных смещениях, и значение H_0^{Loc}, полученное в результате измерений в локальной Вселенной.

3. ПРЕДЛАГАЕМОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ НТ

Темная материя и темная энергия составляют около 96% всей энергии во Вселенной [6, 9, 10], но их природа до сих пор неизвестна. Современное значение плотности DE может быть представлено космологической постоянной Эйнштейна Λ [42], но также может быть результатом действия Хиггского скалярного поля, которое предлагается в качестве причины инфляции в ранней Вселенной [43–46]. Величина индуцированной Λ_V, относящейся к инфляции, на много порядков больше, чем ее современное значение и не было попыток найти связь между ними. Физическая природа DM остается неясной. Существует много предположений о ее происхождении [34, 47, 48], но ни одно из них не подтверждено экспериментально или наблюдательно, в то время как многие из них были опровергнуты.

Чтобы объяснить происхождение Hubble Tension в [4, 5], была введена переменная часть темной энергии (DEV) как переменная составляющая космологической постоянной Λ_V. Ее вклад в процесс расширения Вселенной растет с увеличением z, и превышает вклад космологической постоянной Эйнштейна Λ при красных смещениях $z \gg 1$. Таким образом, DE может иметь два компонента, один из которых является постоянной Эйнштейна Λ, и другой, малый в настоящее время переменный компонент DEV – Λ_V, который может иметь происхождение из остатков инфляционного скалярного поля, являющегося источником происхождения существующего вещества. Предполагалось, что процесс перехода энергии поля в вещество в настоящее время сопровождается обратным процессом превращения массы в энергию поля, что приводит к динамической связи между плотностями материи и Λ_V.

Мы рассматриваем только послерекомбинационный период ($z \lesssim 1100$) расширения Вселенной, где DM представляет собой самый значительный компонент вещества во Вселенной. Поэтому для простоты считаем, что между плотностями энергии темной материи и добавочной части темной энергии существует связь вида

$$\rho_{\mathrm{DM}} = \alpha(z)\rho_{\mathrm{DEV}}. \quad (4)$$

Здесь $\alpha(z)$ – функция красного смещения, форма которой ограничивается требованием того, чтобы она позволила устранить противоречие НТ, не создавая при этом дополнительных трудностей при интерпретации космологических наблюдений. Как показано в [4, 5], этому требованию удовлетворяет, например, постоянное значение α, устраняющее НТ. Для поддержания динамического равновесия (4) темная материя должна состоять из спектра частиц различной массы, включая очень легкие частицы. Рождение таких частиц в процессе взаимных превращений DM и скалярного поля на всем интервале $z \lesssim 1100$ позволит поддерживать динамическое равновесие между плотностями DM и DEV типа (4) при уменьшении энергии всех переменных составляющих Вселенной при ее расширении.

Как следует из численного моделирования процессов, ведущих к формированию современной крупномасштабной структуры Вселенной, наилучшее согласие с наблюдениями показывает модель с холодной DM, т.е. частицы темной материи являются нерелятивистскими. Для этого часто рассматриваются массивные частицы из суперсимметричной теории поля (нейтралино, фотино и др. [49]). С другой стороны, в качестве DM рассматриваются очень легкие частицы аксионы [47], существование которых следует из некоторых теоретических моделей, объясняющих наблюдаемое нарушение CP инвариантности в ядерных процессах. В нашей модели Вселенной для устранения НТ требуется более сложная структура DM, где могут присутствовать частицы промежуточных масс, причем масса легких частиц (аксионов) также может быть представлена целым спектром.

В присутствии DEV постоянная Хаббла уменьшается со временем медленнее, чем без нее. Это создает большее современное значение H_0 для одного и того же значения H_{rec} в эпоху рекомбинации. Поэтому мы предполагаем, что значение H_0^{Dist}, измеренное телескопом Planck, было получено с помощью экстраполирования значения

$H_{\rm rec}$ с момента рекомбинации $z_r \approx 1100$ до настоящего времени $z = 0$ в модели Фридмана плоской пылевой Вселенной с учетом космологической постоянной Λ. В случае равнораспределенной Вселенной экстраполяция эта должна быть произведена в модели, учитывающей добавочные компоненты темной энергии DEV. В нашей интерпретации HT связано с неточной экстраполяцией данных Planck в рамках модели, не учитывающей DEV.

Примем, что истинное современное значение постоянной Хаббла определяется локальными измерениями, т.е. $H_0^{\rm Loc}$, и оба измерения корректны, но значение $H_0^{\rm Dist}$ возникло при неточной экстраполяции. Зная это, можно найти такую функцию $\alpha(z)$, чтобы при пересчете данных Planck получалось значение постоянной Хаббла, совпадающее с локальными измерениями. Таким образом, задача сводится к нахождению такой функции $\alpha(z)$, при которой в процессе пересчета постоянной Хаббла в настоящее время HT не возникает. Чтобы вычислить влияние малой добавки DEV на расчет современного значения H_0 из измерений $H_{\rm rec}$ на момент рекомбинации, мы должны построить космологическую модель с учетом компонента DEV на интервале $z \in [0, z_r]$.

4. РАСШИРЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ

Эволюция Вселенной описывается уравнениями ОТО Эйнштейна [1]:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}. \qquad (5)$$

Как показал А.А. Фридман в 1922 г. [50], расширение однородной изотропной Вселенной определяется одним уравнением для масштабного фактора, $a(t)$, следующим из (00) компоненты уравнения Эйнштейна (5), в виде

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{\kappa c^2}{a^2}, \qquad (6)$$

где ρc^2 – полная плотность энергии во Вселенной, второй член справа в (6) связан с космологической постоянной, последнее слагаемое определяет вклад скалярной кривизны пространства. Наилучшее совпадение теории с наблюдениями имеет место для плоской вселенной с $\kappa = 0$, которая рассматривается в дальнейшем. Для связи давления и плотности используется условие адиабатического расширения

$$\frac{d\rho}{\rho + P} = -\frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} = -3\frac{da}{a}, \quad \text{где } \mathcal{V} \text{ – объем.} \qquad (7)$$

При этом

$$\rho + P = \rho_{\rm DM} + \rho_{\rm DEV} + P_{\rm DM} + P_{\rm DEV} \equiv$$
$$\equiv \rho_m + \rho_\phi + P_m + P_\phi.$$

5. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ – ИСТОЧНИК DM И DEV

Скалярное поле принимается в качестве основной причины инфляционной стадии и рождения вещества во Вселенной [43–45]. Рассмотрим скалярное поле интенсивности ϕ, находящееся в потенциале $V(\phi)$. В однородной изотропной расширяющейся Вселенной зависимость ϕ от времени определяется уравнением [51]:

$$\ddot\phi + 3\frac{\dot a}{a}\dot\phi = -\frac{dV}{d\phi}.$$

Плотность энергии ρ_V и давление P_V скалярного поля определяются как в работе [51] (здесь и в большинстве дальнейших уравнений принимается $c = 1$)

$$\rho_V = \frac{\dot\phi^2}{2} + V(\phi), \quad P_V = \frac{\dot\phi^2}{2} - V(\phi). \qquad (8)$$

Рассмотрим Вселенную с начальной интенсивностью скалярного поля $\phi_{\rm in}$, начальным потенциалом $V_{\rm in}$ и нулевой начальной производной $\dot\phi_{\rm in} = 0$. Производная интенсивности скалярного поля растет на начальных стадиях инфляции при уменьшении потенциала V. Предположим, что после достижения справедливости соотношения

$$\dot\phi^2 = 2\alpha(z)V, \qquad (9)$$

оно продолжает выполняться на дальнейших стадиях расширения. Кинетическая часть энергии скалярного поля превращается в вещество, предположительно, главным образом в темную материю, а функция $\alpha(z)$ определяет связь плотности темной энергии (DE), определяемой величиной V, и плотностью вещества, определяемой кинетическим членом. Как следует из наблюдений, основная часть DE в настоящее время может быть связана с постоянной Эйнштейна Λ. На предшествующих стадиях расширения постоянная Λ была меньше переменной части Λ_V в широком интервале допустимых функций $\alpha(z)$. При выполнении условия ((9)) введем следующие обозначения

$$\rho_\phi = V, \quad P_\phi = -V, \quad \rho_m = \frac{\dot\phi^2}{2}, \quad P_m = \beta\frac{\dot\phi^2}{2}, \qquad (10)$$

при $\rho_m = \alpha(z)\rho_\phi$, $0 \le \beta < 1$. Здесь предполагается, что давление вещества, образованного из динамической составляющей энергии поля, меньше давления поля, так как при переходе безмассовой фазы в частицы с ненулевой массой покоя часть энергии переходит в массу покоя, и кинетическая энергия, создающая давление, уменьшается вплоть до нуля, $0 \le \beta \le 1$. В процессе расширения Вселенной происходит непрерывный фазовый переход между состоянием (8), соответствующим свободному полю, и состоянием (10), где кинетическая часть поля превратилась в вещество. Используя (9) и (10), получаем

$$\begin{gathered}\rho = \rho_\phi + \rho_m = (1+\alpha)V,\\ P = P_\phi + P_m = -(1-\alpha\beta)V.\end{gathered} \tag{11}$$

Отметим, что при этом поддерживается динамическое равновесие между полем и веществом в виде (9), (11). Решая уравнение адиабаты (7) для постоянных α и β, с учетом (11), получаем: [4, 5]

$$\dot\rho = -3\alpha\frac{1+\beta}{1+\alpha}\frac{\dot a}{a}\rho, \quad \frac{\rho}{\rho_\star} = \left(\frac{a_\star}{a}\right)^{3\alpha(1+\beta)/(1+\alpha)}. \tag{12}$$

Здесь звездочкой обозначены известные значения функций в произвольно выбранный момент времени $t_\star$, соответствующий красному смещению $z_\star$. Рассматривая в дальнейшем Вселенную на стадии после рекомбинации, будем использовать приближение пылевой материи с $\beta = 0$.

6. КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ НТ

Решение космологических уравнений (6) и (12) для плоской пылевой Вселенной после рекомбинации при $\kappa = \beta = 0$, и постоянном α рассматривалось в [4, 5]. Приведем решения для двух случаев.

6.1. $\Lambda = 0$, $\alpha(z) = \mathrm{const}$

В этом случае получаем следующие зависимости функций от времени:

$$\begin{aligned}\frac{a}{a_*} &= (6\pi G\rho_* t^2)^{(1+\alpha)/3\alpha}\left[\frac{\alpha}{1+\alpha}\right]^{2(1+\alpha)/3\alpha} = \\ &= \left(\frac{\rho_*}{\rho}\right)^{(1+\alpha)/3\alpha} = \left(\frac{t}{t_*}\right)^{2(1+\alpha)/3\alpha},\end{aligned} \tag{13}$$

$$\rho = \left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^2\frac{1}{6\pi G t^2}. \tag{14}$$

Выбирая в качестве произвольной величины $t_\star$ современный возраст Вселенной t_0 и используя связь красного смещения с масштабным фактором, получаем

$$\begin{gathered}z+1 \equiv \frac{a_0}{a} = (6\pi G\rho_0 t^2)^{-(1+\alpha)/3\alpha}\times\\ \times\left[\frac{\alpha}{1+\alpha}\right]^{-2(1+\alpha)/3\alpha} = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2(1+\alpha)/3\alpha},\\ t = \frac{1+\alpha}{\alpha\sqrt{6\pi G\rho_0}}(z+1)^{-3\alpha/2(1+\alpha)}.\end{gathered}$$

Далее везде нижний индекс α будет означать, что данная величина рассчитана в модели с учетом DEV. Пользуясь определением постоянной Хаббла и соотношением (13), получаем

$$H_\alpha \equiv \frac{\dot a}{a} = \frac{2(1+\alpha)}{3\alpha t} = \frac{2}{3}\sqrt{6\pi G\rho_0}(z+1)^{3\alpha/2(1+\alpha)}. \tag{15}$$

Для предельного случая $\alpha \to \infty$, в отсутствие вклада DEV мы имеем

$$\begin{gathered}\frac{a}{a_0} = (6\pi G\rho_0 t^2)^{1/3}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/3} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3},\\ \rho = \frac{1}{6\pi G t^2}, \quad H \equiv \frac{\dot a}{a} = \frac{2}{3t},\\ z+1 \equiv \frac{a_0}{a} = (6\pi G\rho_0 t^2)^{-1/3} = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/3},\\ t = \frac{1}{\sqrt{6\pi G\rho_0}}(z+1)^{-2/3},\\ H = \frac{2}{3}\sqrt{6\pi G\rho_0}(z+1)^{3/2}.\end{gathered}$$

Здесь использовалось решение (14) для $\rho(t)$ с нулевой произвольной константой интегрирования. Ненулевая константа интегрирования сильно усложняет процесс нахождения аналитического решения. Вместо этого, в рамках данного метода решения, мы слегка модифицируем полученные формулы для параметра Хаббла. Для того, чтобы обеспечить выполнение граничного условия $H = H_\alpha$ в момент рекомбинации, добавляем дополнительный множитель в выражение (15) и получаем:

$$H_\alpha(z) = \frac{2}{3}\sqrt{6\pi G\rho_0}(z_r+1)^{3/2(1+\alpha)}(z+1)^{3\alpha/2(1+\alpha)}, \tag{16}$$

$$H(z) = \frac{2}{3}\sqrt{6\pi G\rho_0}(z+1)^{3/2}. \tag{17}$$

В этом решении значения H одинаковы на момент рекомбинации, но из-за различного закона расширения Вселенной имеют различные современные значения. Значение, полученное без учета DEV, отождествим с H_0^{Dist}, которое оказывается меньше локально измеренного H_0^{Loc}. Если предположить, что DEV присутствует во Вселенной, то современное значение H_α должно совпасть с H_0^{Loc}. Приравнивая разность $H_0^{\mathrm{Loc}} - H_0^{\mathrm{Dist}}$ к современной разности $H_\alpha - H$ из (16), (17), получаем значение α, при котором не возникает НТ. Уравнение, определяющее величину α, и его решение для α, при котором этот парадокс не возникает, имеют вид

$$\frac{H_0^{\mathrm{Loc}}}{H_0^{\mathrm{Dist}}} = (z_r+1)^{3/2(1+\alpha)}, \quad \alpha_{\mathrm{HT}} \approx 133. \tag{18}$$

Таблица 1. Усредненные космологические параметры

Параметр	Значение
Локальное значение постоянной Хаббла	$H_0^{\mathrm{Loc}} \approx 73$ км/с/Мпк
Постоянная Хаббла, измеренная по реликтовому излучению	$H_0^{\mathrm{Dist}} \approx 67.5$ км/с/Мпк
Полная плотность вещества в плоской Вселенной	$\rho_{\mathrm{tot}} \approx 1.066 \times 10^{-29}$ г/см^3
Измеренное локально значение плотности космологической постоянной [10] (статистика 2σ)	$\rho_\Lambda = (0.44{-}0.96)\rho_{\mathrm{tot}}$
Измеренное дистанционно значение плотности космологической постоянной	$\rho_\Lambda \approx 0.7\rho_{\mathrm{tot}}$
Космологическая постоянная из дистанционных измерений	$\Lambda = \dfrac{8\pi G\rho_\Lambda}{c^2} \approx 1.40 \times 10^{-56}$ см$^{-2}$
Асимптотика постоянной Хаббла	$H_{\mathrm{ac}} = \sqrt{\dfrac{\Lambda c^2}{3}} \approx 63.2$ км/с/Мпк
Усредненный возраст Вселенной [52]	$t_0 \approx 4.35 \times 10^{17}$ с
Красное смещение, соответствующее эпохе рекомбинации	$z_r \approx 1100$

Значения космологических параметров, используемых здесь и в дальнейшем рассмотрении, приведены в табл. 1.

6.2. $\Lambda \neq 0$, $\alpha(z) = \mathrm{const}$

Современные наблюдения (1) указывают на преобладание темной энергии, определяемой космологической постоянной Λ. С учетом дополнительного переменного члена DEV, параметры пылевой Вселенной после рекомбинации ($z < 1100$) описываются формулами, получающимися из решения системы (6), (12) в виде [4, 5]:

$$\left(\frac{a}{a_*}\right)^{3\alpha/2(1+\alpha)} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_*}{\Lambda c^2}}\sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}ct\right) = \sqrt{\frac{\rho_*}{\rho}}, \tag{19}$$

$$\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{8\pi G\rho}} = \sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}ct\right). \tag{20}$$

Отождествляя момент времени t_* и современный возраст Вселенной t_0, находим связь красного смещения и времени в виде

$$z+1 \equiv \frac{a_0}{a} = \left[\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{\Lambda c^2}}\sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}ct\right)\right]^{-2(1+\alpha)/3\alpha} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(1+\alpha)/3\alpha}. \tag{21}$$

Для параметра Хаббла из (19) имеем следующее выражение:

$$H_\alpha(t) \equiv \frac{\dot a}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}\coth\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}ct\right). \tag{22}$$

Плоская Вселенная без DEV описывается соотношениями, следующими из (19), (20) в пределе при $\alpha \to \infty$.

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^{3/2} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{\Lambda c^2}}\sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\frac{3}{2}ct\right) = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}, \quad \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{8\pi G\rho}} = \sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\frac{3}{2}ct\right), \tag{23}$$

$$z+1 \equiv \frac{a_0}{a} = \left[\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{\Lambda c^2}}\sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\frac{3}{2}ct\right)\right]^{-2/3} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/3}, \quad H(t) = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}\coth\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\frac{3}{2}ct\right). \tag{24}$$

Выразим время t через наблюдаемое красное смещение z:

$$t_\alpha = \sqrt{\frac{3}{\Lambda c^2}}\frac{2(1+\alpha)}{3\alpha}\sinh^{-1}\left[\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{8\pi G\rho_0}}(z+1)^{-3\alpha/2(1+\alpha)}\right],$$

$$t = \sqrt{\frac{3}{\Lambda c^2}}\frac{2}{3}\sinh^{-1}\left[\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{8\pi G\rho_0}}(z+1)^{-3/2}\right].$$

Параметр Хаббла как функция красного смещения запишется в виде:

$$H_\alpha(z) = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}\times$$
$$\times\coth\left(\sinh^{-1}\left[\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{8\pi G\rho_0}}(z+1)^{-3\alpha/2(1+\alpha)}\right]\right), \tag{25}$$

$$H(z) = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}\coth\left(\sinh^{-1}\left[\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{8\pi G\rho_0}}(z+1)^{-3/2}\right]\right). \tag{26}$$

Во время рекомбинации вклад Λ очень мал, поэтому можно разложить выражения (25), (26) в ряд Тейлора, оставив только первый член. Тогда в момент рекомбинации получим:

$$H_{r\alpha} \approx \frac{2}{3}\sqrt{6\pi G\rho_0}(z_r+1)^{3\alpha/2(1+\alpha)},$$
$$H_r \approx \frac{2}{3}\sqrt{6\pi G\rho_0}(z_r+1)^{3/2}. \tag{27}$$

Аналогично случаю $\Lambda = 0$ модифицируем решения в (25), (26) так, чтобы выполнялось граничное условие $H_{r\alpha} = H_r$ в момент рекомбинации. Получим тогда:

$$H_\alpha(z) = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}\coth\left(\sinh^{-1}\left[\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{8\pi G\rho_0}}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times(z+1)^{-3\alpha/2(1+\alpha)}(z_r+1)^{-3/2(1+\alpha)}\right]\right), \tag{28}$$

$$H(z) = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}\coth\left(\sinh^{-1}\left[\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{8\pi G\rho_0}}(z+1)^{-3/2}\right]\right). \tag{29}$$

При $z = 0$ эти решения должны соответствовать $H_{0\alpha} = H_0^{\rm Loc}$, $H_0 = H_0^{\rm Dist}$, что однозначно определяет значение α. Из (28), (29) получаем:

$$(z+1)^{-3\alpha/2(1+\alpha)}(z_r+1)^{-3/2(1+\alpha)}\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{8\pi G\rho_0}} =$$
$$= \sinh\left[\coth^{-1}\left(\frac{H_\alpha}{\sqrt{\Lambda c^2/3}}\right)\right], \tag{30}$$

$$(z+1)^{-3/2}\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{8\pi G\rho_0}} = \sinh\left[\coth^{-1}\left(\frac{H}{\sqrt{\Lambda c^2/3}}\right)\right], \tag{31}$$

отсюда при $z = 0$, $z_r = 1100$ получаем уравнение, определяющее параметр α, при котором проблема HT устраняется. Это уравнение и его численное решение имеют вид

$$\frac{\sinh\left[\coth^{-1}\left(\frac{H_0^{\rm Loc}}{\sqrt{\Lambda c^2/3}}\right)\right]}{\sinh\left[\coth^{-1}\left(\frac{H_0^{\rm Dist}}{\sqrt{\Lambda c^2/3}}\right)\right]} = (z_r+1)^{-3/2(1+\alpha)}, \tag{32}$$
$$\alpha_{\rm HT} \approx 24.$$

Принимая полный вклад материи $\Omega_m \approx 0.3$, получаем современный вклад DEV в плотность вселенной $\Omega_{\rm DEV} = \frac{0.3}{24} \approx 0.0125$. Если вклад темной энергия составляет $\Omega_{\rm DE} \approx 0.7$, то она может состоять из двух компонентов $\Omega_{\rm DEV} \approx 0.0125$ и $\Omega_\Lambda \approx 0.6875$, при вкладе барионной материи $\Omega_{\rm B} \approx 0.04$.

7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИИ $H(z)$

Если ограничить поставленную задачу, исключив из нее вопрос построения космологической модели в виде зависимости $a(t)$ и оставив только нахождение поведения параметра Хаббла в виде зависимости $H(z)$, то задача о решении проблемы HT существенно упрощается. В частности удается аналитически решить ее для целого набора функций $\alpha(z)$. Космологическое уравнение (6) и уравнение адиабаты (12), при $\kappa = \beta = 0$, запишутся в виде:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad \frac{\dot\rho}{\rho} = -\frac{3\alpha}{1+\alpha}\frac{\dot a}{a}. \tag{33}$$

Рассмотрим сначала случай постоянного α, ненулевого Λ, решенного в разделе 6.2.

7.1. $\alpha = \text{const}$, $\Lambda \neq 0$

Аналогично предыдущему методу, сначала рассмотрим случай постоянной функции $\alpha(z)$. Второе уравнение в (33) для этого случая проинтегрировано в (12). Запишем это решение в виде

$$\frac{\rho_\alpha}{\rho_{0\alpha}} = \left(\frac{a_0}{a_{0\alpha}}\right)^{3\alpha/(1+\alpha)} = (1+z)^{3\alpha/(1+\alpha)}. \tag{34}$$

Здесь в качестве произвольной точки отсчета выбрано настоящее время $\rho_\star = \rho_{0\alpha}$ и использовано определение красного смещения $z+1 = \frac{a_0}{a_{0\alpha}}$. Учтено также, что $z_\alpha \equiv z$. Подставляя (34) в (33), получаем зависимость для параметра Хаббла в виде

$$H_\alpha(z) = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{8\pi G}{3}\rho_{0\alpha}(1+z)^{3\alpha/(1+\alpha)}}. \tag{35}$$

В пределе $\alpha \to \infty$ получим зависимость постоянной Хаббла в модели, не учитывающей вклад DEV:

$$H(z) = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{8\pi G}{3}\rho_0(1+z)^3}. \tag{36}$$

Соотношение (35) следует из уравнений (21), (22) при наличии DEV, а (36) следует из уравнений (24) при нулевом DEV. Для преобразований следует использовать соотношение для гиперболических функций

$$\coth(x) = \frac{\sqrt{1+\sinh^2(x)}}{\sinh(x)}.$$

Для удовлетворения условия равенства $H_\alpha(z_r) = H(z_r)$, при $z = z_r$ требуется, чтобы различными были современные плотности, а именно:

$$\rho_{0\alpha}(1+z_r)^{3\alpha/(1+\alpha)} = \rho_0(1+z_r)^3,\quad \rho_{0\alpha} = \rho_0(1+z_r)^{3/(1+\alpha)}. \tag{37}$$

Это условие используется здесь для выполнения равенства H на момент рекомбинации, вместо введения поправки DEV решения в предыдущем рассмотрении.

Отождествляя вычисленные современные значения H с наблюдаемыми

$$H_{0\alpha} = H_0^{\rm Loc},\quad H_0 = H_0^{\rm Dist}, \tag{38}$$

получаем, используя (35)–(37), уравнение для определения значения α, устраняющего HT, в виде

$$\frac{(H_0^{\rm Loc})^2 - \dfrac{\Lambda c^2}{3}}{(H_0^{\rm Dist})^2 - \dfrac{\Lambda c^2}{3}} = \frac{\rho_{0\alpha}}{\rho_0} = (1+z_r)^{3/(1+\alpha)}. \tag{39}$$

Решение данного уравнения определяет значение искомого параметра $\alpha_{\rm HT} \approx 24$, которое совпадает со значением этого параметра из (32). В действительности уравнения (32) и (39) для определения значения $\alpha_{\rm HT}$ тождественны. Для их тождественности необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\sinh^2\left[\coth^{-1}\left(\frac{H_0^{\rm Loc}}{\sqrt{\Lambda c^2/3}}\right)\right] = \left[\left(\frac{H_0^{\rm Loc}}{\sqrt{\Lambda c^2/3}}\right)^2 - 1\right]^{-1}, \tag{40}$$

$$\sinh^2\left[\coth^{-1}\left(\frac{H_0^{\rm Dist}}{\sqrt{\Lambda c^2/3}}\right)\right] = \left[\left(\frac{H_0^{\rm Dist}}{\sqrt{\Lambda c^2/3}}\right)^2 - 1\right]^{-1}. \tag{41}$$

Легко убедиться, что оба равенства выполняются при справедливости следующего соотношения для обратных гиперболических функций

$$\sinh(\coth^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\quad \coth^{-1}x = \sinh^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}. \tag{42}$$

Для доказательства справедливости этого равенства воспользуемся представлением обратных гиперболических функций через логарифмы в виде [53]

$$\coth^{-1}x = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right],\quad \sinh^{-1}y = \ln(y + \sqrt{y^2+1}). \tag{43}$$

Отсюда при $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ следуют равенство (42) и тождественность уравнений (32) и (39).

7.2. $\alpha(z) = \dfrac{\alpha}{(1+z)^\gamma}$, $\Lambda \neq 0$

Рассмотрим модель с зависящей от красного смещения связью плотностей ρ_m и $\rho_{\rm DEV}$. Считаем параметр $\gamma \ll 1$, чтобы значения функции $\alpha(z)$ не слишком различались в эпоху рекомбинации и в настоящее время. Тогда вместо второго уравнения (33) получаем с учетом (21)

$$\frac{\dot\rho}{\rho} = -\frac{3\alpha(z)}{1+\alpha(z)}\frac{\dot a}{a} = \frac{3\alpha}{\alpha + (1+z)^\gamma}\frac{\dot z}{1+z}. \tag{44}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{\rho_\alpha}{\rho_{0\alpha}} = \left[\frac{1+\alpha}{1+\alpha(1+z)^{-\gamma}}\right]^{3/\gamma}. \tag{45}$$

В отсутствие DEV $\alpha \to \infty$, и формула изменения плотности в плоской пылевой вселенной принимает вид:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = (1+z)^3. \tag{46}$$

При получении (45) использовалось аналитическое значение неопределенного интеграла [53]

$$3\alpha\int\frac{dz}{(1+z)[\alpha + (1+z)^\gamma]} = -\frac{3}{\gamma}\ln(1+\alpha(1+z)^{-\gamma}). \tag{47}$$

Константа интегрирования при этом выбиралась так, чтобы при $\gamma = 0$ формулы сводились к полученным ранее. Из первого соотношения в (33) получаем следующие выражения для параметра Хаббла:

$$H_\alpha(z) = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{8\pi G}{3}\rho_{0\alpha}\left[\frac{1+\alpha}{1+\alpha(1+z)^{-\gamma}}\right]^{3/\gamma}},\quad H(z) = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{8\pi G}{3}\rho_0(1+z)^3}. \tag{48}$$

Для выполнения граничного условия на уровне рекомбинации $H_{r\alpha} = H_r$ требуются различные плотности в современную эпоху

$$\rho_{0\alpha}\left[\frac{1+\alpha}{1+\alpha(1+z_r)^{-\gamma}}\right]^{3/\gamma} = \rho_0(1+z_r)^3. \tag{49}$$

Тогда зависимости параметра Хаббла в обеих моделях можно записать в виде:

$$H_\alpha(z) = \\ = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{8\pi G}{3}\rho_0\left[\frac{1+\alpha(1+z_r)^{-\gamma}}{1+\alpha(1+z)^{-\gamma}}\right]^{3/\gamma}(1+z_r)^3}, \quad (50)$$

$$H(z) = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{8\pi G}{3}\rho_0(1+z)^3}.$$

При $z = 0$, используя условия (38), получаем из (50) уравнение для нахождения значения α_{HT} при различных значениях γ:

$$\frac{(H_0^{\text{Loc}})^2 - \dfrac{\Lambda c^2}{3}}{(H_0^{\text{Dist}})^2 - \dfrac{\Lambda c^2}{3}}\left[\frac{1+\alpha}{1+\alpha(1+z_r)^{-\gamma}}\right]^{3/\gamma} = (1+z_r)^3. \quad (51)$$

Из данного уравнения при конкретных значениях γ численно находим значения искомого коэффициента α_{HT}, устраняющие HT:

$$\gamma = 0.235, \quad \alpha_{\text{HT}} \approx 60.9,$$
$$\gamma = 0.1, \quad \alpha_{\text{HT}} \approx 34.5,$$
$$\gamma = 0.01, \quad \alpha_{\text{HT}} \approx 24.8,$$
$$\gamma \to 0, \quad \alpha_{\text{HT}} \to 23.9.$$

Чем больше параметр γ, тем быстрее убывает функция $\alpha(z)$ с увеличением красного смещения, увеличивая вклад добавочного компонента DEV на ранних стадиях эволюции Вселенной. Одновременно с этим уменьшается современное значение α_{HT}, и вклад в темную энергию от DEV, устраняющее HT.

Возраст Вселенной t_0, где отсутствует HT, зависит от выбора пары $(\gamma, \alpha_{\text{HT}})$, где только параметр γ является независимым. Только при одном значении γ этот возраст совпадает с возрастом из табл. 1, полученным на основе наблюдательных данных [52]. Для расчета возраста в модели используются следующие соотношения, рассмотренные выше

$$z + 1 = \frac{a_0}{a} = \frac{1}{x}, \quad x = \frac{a}{a_0}, \quad \rho_{0\alpha} = \frac{\rho_m}{0.3}, \quad H = \frac{\dot{a}}{a},$$

$$t_0 = \int_0^{a_0}\frac{da}{aH} = \int_0^1 \frac{dx}{xH_\alpha(x)}, \quad (52)$$

$$H_\alpha(x) = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{8\pi G}{3}\rho_{0\alpha}\left[\frac{1+\alpha}{1+\alpha x^\gamma}\right]^{3/\gamma}}.$$

Вычисляя численно этот интеграл, получаем, что совпадение вычисленного возраста с наблюдаемым t_0 из табл. 1 имеет место при $\gamma \approx 0.235$, $\alpha_{\text{HT}} \approx 61$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели космологическую модель, в которой вклад темной энергии DE состоит из двух компонентов: космологической постоянной Эйнштейна Λ и малой переменной составляющей Λ_V (DEV), связанной со скалярным полем как остаток от инфляционной стадии в ранней Вселенной. Было предположено, что энергия переменного компонента однозначно связана с плотностью вещества, образованного из скалярного поля на ранних стадиях эволюции Вселенной. Для простоты было рассмотрено расширение стандартной ΛCDM космологической модели с линейной связью между плотностями энергии в виде $\rho_m = \alpha(z)\rho_{\text{DEV}}$, где коэффициент пропорциональности, в общем случае, зависит от красного смещения. В данной модели нет проблемы HT, которая, предположительно, является следствием неточной экстраполяции при расчете современного значения постоянной Хаббла по наблюдениям флуктуаций реликтового излучения. Мы решили уравнение Фридмана при условии существования добавочного компонента темной энергии и его связи с веществом, и рассмотрели несколько функций $\alpha(z)$, при которых проблема HT устраняется. Современная плотность энергии DEV, необходимая для объяснения феномена HT, мала по отношению к космологической постоянной Λ, поэтому влияет на расширение Вселенной только при больших z, когда вклад постоянной Эйнштейна уменьшается.

В настоящее время ситуация противоположная, $\Lambda \gg \Lambda_V$, потому что уменьшение плотности вещества в процессе космологического расширения определяет переход от квази-Фридмановской стадии расширения к квази-Ситтеровской стадии. В случае постоянного коэффициента α_{HT} противоречие устраняется при $\alpha_{\text{HT}} \approx 24$. При этом плотность ρ_{DEV} в настоящую эпоху соответствует относительному вкладу $\Omega_{\text{DEV}} \approx 0.014$. Наилучшее совпадение современного возраста Вселенной с модельным значением имеет место при слабом росте вклада ρ_{DEV} с красным смещением и большим современным значением $\alpha_{\text{HT}} \approx 61$, что соответствует меньшему современному вкладу в плотность $\Omega_{\text{DEV}} \approx 0.0055$.

Современные значения параметров ΛCDM модели были определены из измерений флуктуаций реликтового излучения экспериментами WMAP и Planck. Данная процедура весьма сложна и основывается на нахождении экстремумов в многопараметрическом пространстве. В нашей модели, устраняющей проблему HT, если она действительно существует, возникают некоторые изменения процедуры нахождения космологических параметров, поэтому космологические параметры, полученные при этом, могут слегка измениться.

В нашей модели DM должна быть представлена широким спектром масс частиц, в отличие от модели холодной темной материи (CDM) с частицами одинаковой массы, которая обычно рассматривается. Принимая, что на ранних стадиях расширения существовало термодинамическое равновесие, число легких частиц DM должно быть близко к числу реликтовых фотонов. Зная относительный вклад в энергию CMB, можно грубо оценить, что наименьшая масса частиц DM не должна в настоящее время превышать значения $(\Omega_{\mathrm{DEV}} / \Omega_{\mathrm{CMB}})^{1/4} kT_{\mathrm{CMB}} \sim 5\times10^{-4}$ эВ.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа ГСБК была частично поддержана грантом РФФИ 20-52-12053.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны О.Ю. Цупко за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Y. B. Zeldovich and I. D. Novikov*, *Structure and Evolution of the Universe* (Moscow: Nauka, 1975).
2. *G. Riess*, Nature Rev. Phys. **2** (1), 10 (2020).
3. *W. L. Freedman*, Astrophys. J. **919** (1), id. 16 (2021).
4. *G. Bisnovatyi-Kogan*, arXiv:2002.05602 [astro-ph.CO] (2020).
5. *G. S. Bisnovatyi-Kogan*, Universe **7** (11), 412 (2021).
6. *D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, E. Komatsu, et al.*, Astrophys. J. Suppl. **148** (1), 175 (2003).
7. *P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, et al.*, Astron. and Astrophys. **594**, id. A13 (2016).
8. *N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, et al.*, Astron. and Astrophys. **641**, id. A6 (2020).
9. *A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, et al.*, Astron. J. **116** (3), 1009 (1998).
10. *S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, et al.*, Astrophys. J. **517** (2), 565 (1999).
11. *A. G. Riess, L. M. Macri, S. L. Hoffmann, D. Scolnic, et al.*, Astrophys. J. **826** (1), 56 (2016).
12. *A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. Macri, et al.*, Astrophys. J. **861** (2), 126 (2018).
13. *A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. M. Macri, and D. Scolnic*, Astrophys. J. **876** (1), 85 (2019).
14. *K. C. Wong, S. H. Suyu, G. C.-F. Chen, C. E. Rusu, et al.*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **498** (1), 1420 (2020).
15. *W. Yuan, A. G. Riess, L. M. Macri, S. Casertano, and D. M. Scolnic*, Astrophys. J. **886** (1), 61 (2019).
16. *L. Verde, T. Treu, and A. G. Riess*, Nature Astron. **3**, 891 (2019).
17. *C. A. Bengaly, C. Clarkson, and R. Maartens*, J. Cosmology and Astroparticle Phys. № 05, id. 053 (2020).
18. *E. Di Valentino, O. Mena, S. Pan, L. Visinelli, et al.*, Classical and Quantum Gravity **38**, id. 153001 (2021).
19. *T. Karwal and M. Kamionkowski*, Phys. Rev. D **94** (10), id.103523 (2016).
20. *E. Mörtsell and S. Dhawan*, J. Cosmology and Astroparticle Phys. № 09, id. 025 (2018).
21. *V. Poulin, T. L. Smith, T. Karwal, and M. Kamionkowski*, Phys. Rev. Letters **122** (22), id. 221301 (2019).
22. *W. Yang, S. Pan, E. Di Valentino, R. C. Nunes, S. Vagnozzi, and D. F. Mota*, J. Cosmology and Astroparticle Phys. № 09, id. 019 (2018).
23. *S. Vagnozzi*, Phys. Rev. D **102** (2), id.023518 (2020).
24. *E. Di Valentino, A. Melchiorri, O. Mena, and S. Vagnozzi*, Phys. Dark Universe **30**, id. 100666 (2020).
25. *C. Umiltá, M. Ballardini, F. Finelli, and D. Paoletti*, J. Cosmology and Astroparticle Phys. **2015** (08), id. 017 (2015).
26. *M. Ballardini, F. Finelli, C. Umiltá, and D. Paoletti*, J. Cosmology and Astroparticle Phys. № 05, id. 067 (2016).
27. *M. Rossi, M. Ballardini, M. Braglia, F. Finelli, D. Paoletti, A. A. Starobinsky, and C. Umiltá*, Phys. Rev. D. **100** (10), id. 103524 (2019).
28. *L. Knox and M. Millea*, Phys. Rev. D. **101** (4), id. 043533 (2020).
29. *V. V. Luković, B. S. Haridasu, and N. Vittorio*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **491**, 2075 (2020).
30. *W. Kenworthy, D. Scolnic, and A. Riess*, Astrophys. J. **875**, id. 145 (2019).
31. *E. Mörtsell and S. Dhawan*, J. Cosmology and Astroparticle Phys. № 09, id. 025 (2018).
32. *J. Sakstein and M. Trodden*, Phys. Rev. Letters **124** (16), id. 161301 (2020).
33. *A. Gogoi, R. Kumar Sharma, P. Chanda, and S. Das*, Astrophys. J. **915**, id. 132 (2021).
34. *G.-B. Zhao, M. Raveri, L. Pogosian, Y. Wang, et al.*, Nature Astron. **1**, 627 (2017).
35. *M. Mortonson, W. Hu, and D. Huterer*, Phys. Rev. D. **80** (6), id. 067301 (2009).
36. *X. Li and A. Shafieloo*, Astrophys. J. Letters **883** (1), id. L3 (2019).
37. *L. Parker and D. A. Vanzella*, Phys. Rev. D. **69** (10), id. 104009 (2004).
38. *G. Steigman, D. N. Schramm, and J. E. Gunn*, Phys. Letters B **66** (2), 202 (1977).
39. *L. Amendola*, Phys. Rev. D. **62** (4), id. 043511 (2000).
40. *M.-X. Lin, M. Raveri, and W. Hu*, Phys. Rev. D. **99** (4), id. 043514 (2019).
41. *W. Hu and I. Sawicki*, Phys. Rev. D. **76** (6), id. 064004 (2007).

42. *Einstein*, *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preussichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Reprinted in The Collected Papers of Albert Einstein, 1914–1917 **6** (Princeton University Press, 1996).

43. *A. Guth*, *The Inflationary Universe* (Reading, Massachusetts: Perseus Books, 1998).

44. *A. D. Linde*, Phys. Letters B. **129** (3/4), 177 (1983).

45. *A. Starobinsky*, Phys. Letters B. **117** (3/4), 175 (1982).

46. *V. F. Mukhanov, G. V. Chibisov*, JETP **56** (2),258 (1982).

47. *K. Arun, S. Gudennavar, and C. Sivaram*, Adv. Space Research **60**, 166 (2017).

48. *D. Samart and P. Channuie*, European Phys. J. C **79** (4), id. 347 (2019).

49. *Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков*, *Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего Большого взрыва* (М.: Ин-т ядерных исследований РАН, 2007).

50. *А. А. Фридман*, Успехи физ. наук **80** (7), 439 (1963).

51. *P. J. E. Peebles*, *Principles of physical cosmology* (Princeton University Press, 1993).

52. *Age of the Universe*, WikipediA (2021), in press https://en.wikipedia.org/wiki/Ageoftheuniverse .

53. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Гос. изд.-во Физ.-Мат. литературы, 1962).