

КРУПНОМАСШТАБНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ГРАВИТАЦИОННОМ КОЛЛАПСЕ С ПЕРЕНОСОМ НЕЙТРИНО В ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ НА ПОДРОБНЫХ СЕТКАХ

© 2023 г. А. Г. Аксенов^{1,*}, В. М. Чечеткин^{1,2}

¹ Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия

² Институт прикладной математики РАН, Москва, Россия

*E-mail: aksenov@icad.org.ru

Поступила в редакцию 28.09.2022 г.

После доработки 26.10.2022 г.

Принята к публикации 08.12.2022 г.

Рассматривается задача о гравитационном коллапсе ядра массивной звезды с учетом переноса нейтрино в диффузионном приближении с ограничением потоков. Для уменьшения расчетной области многомерной задачи на неподвижной расчетной сетке рассматривается ядро звезды, уже находящееся на стадии коллапса. Поскольку стадия коллапса затянута по времени в сравнении с газодинамическим временем для формирующейся протонейтронной звезды, мы рассматриваем математическую задачу для начальной конфигурации, находящейся в равновесии, и пренебрегли начальной радиальной скоростью. Давление длительное время на стадии коллапса обеспечивают релятивистские вырожденные электроны, поэтому связь давления с плотностью в начальной конфигурации описывается политропным уравнением состояния с показателем политропы $n = 3$. Целью данной работы является проверка гипотезы о независимости крупномасштабной конвекции от 2D и 3D геометрии математической задачи и параметров вычислительной сетки, а также от выбора начальной стадии гравитационного коллапса. Масштаб конвекции определяется размером области спадающей энтропии с потерями нейтрино, т.е. неравновесной нейтронизацией, и присутствием слабого начального вращения.

Ключевые слова: сверхновая, нейтронная звезда, нейтрино

DOI: 10.31857/S0004629923030015, **EDN:** PNDOQQ

1. ВВЕДЕНИЕ

Сверхновая (СН) — это результат эволюции звезды, заканчивающийся катастрофическим взрывным процессом. Светимость СН в районе максимума несколько дней сопоставима со светимостью целой галактики. Существуют два типа сверхновых, классифицируемых по присутствию абсорбционных линий водорода: они есть в СН типа II, их нет в СН I. Кроме того, наблюдения СН II показывают длительную стадию постоянной светимости. Если к СН I относят термоядерную СН, например такие условия взрыва возникают при перетекании массы в двойной системе белых карликов, то к СН II относится взрыв массивной звезды с массой $\geq 15 M_{\odot}$, в центре которой образуется железное ядро с массой $(1.2\text{--}1.6) M_{\odot}$ в результате термоядерного горения [1]. Давление в этом железном ядре при плотности вещества, характерном для белого карлика, обеспечивают вырожденные релятивистские электроны с показателем адиабаты $\gamma = 4/3$. Ядро

находится на границе устойчивости относительно коллапса и теряет устойчивость в результате потери энергии на нейтринное излучение (масса ядра $\leq 1.4 M_{\odot}$) либо из-за уменьшения среднего значения показателя адиабаты ниже $4/3$ в результате фотодиссоциации массивных ядер $2 M_{\odot}$ [2]. Полная энергия нейтрино получается из гравитационной энергии формирующейся нейтронной звезды с радиусом ~ 10 км, $E_{\text{gr}} \sim GM/r_{\text{NS}} \sim 10^{54}$ эрг, и высвобождается в течение нескольких секунд. Нейтрино уносят энергию 100 МэВ на нуклон, в то время как термоядерное горение может обеспечить только 8 МэВ на нуклон. Из-за разных характерных времен коллапса и кривых блеска задачи о коллапсе ядра звезды и прохождении ударной волны по остатку массивной звезды успешно разделяются. Построение математических моделей наблюдаемых кривых блеска показывает, что выделяемая энергия взрыва в центре составляет 10^{51} эрг, т.е. менее 1% от уносимой энергии ней-

трино [3]. Отсюда возникает интерес к нейтрино как двигателю взрыва коллапсирующей СН.

Нейтринные процессы в ядрах звезд впервые рассмотрены в работе [4]. Количественный вопрос поглощения энергии 1% нейтрино в предсверхновой остается нерешенной до конца задачей [3, 5, 6] из-за необходимости кинетического описания переноса нейтрино, наличия разных масштабов времени для слабого взаимодействия и газодинамического времени, многомерности задачи на фоне разных пространственных масштабов предсверхновой, нейтронной звезды и области развития неустойчивости. От указанных процессов зависят количество поглощенной энергии нейтрино и сброс оболочки, наблюдаемый как СН II. Впервые физика процесса гравитационного коллапса, пригодная для расчетов на доступных вычислительных мощностях, была сформулирована в работах [2, 7] путем введения нейтринной теплопроводности и двух областей, прозрачной и непрозрачной для нейтрино, разделенных нейтриносферой. Принципиальное ограничение подхода состоит в зависимости нейтриносферы от энергий нейтрино и их типа.

Вероятная причина неопределенности в построении модели взрыва коллапсирующей СН состоит в определяющей роли 3D неустойчивостей при коллапсе и учете конвекции. Одна область конвективной неустойчивости формируется в центре коллапсирующего ядра звезды, она является протяженной и существует в течение ≥ 10 мс, в то время как другая неустойчивая область в окрестности аккреции тонкая, но существует все время коллапса. Конвекция в центре может иметь два важных эффекта: помимо увеличения потока энергии нейтрино, центр содержит много высокоэнергичных нейтрино в сравнении с нейтрино вблизи нейтриносферы в 1D модели [8, 9]. Двумерные [10, 11] и трехмерные модели [12, 13] демонстрируют крупномасштабный характер конвекции и приводят к взрыву СН. В то же время уточненные расчеты 3D ставят под сомнение крупный масштаб конвекции и взрыв СН [14–16].

Крупномасштабная конвекция в центре звезды впервые для СН предложена в работе [17]. Начальное условие выбрано стационарным с плотностью в центре 2×10^{13} г/см³ и постоянной энтропией, за исключением центральной области с избытком энтропии. 3D расчеты газовой динамики показывают развитие крупномасштабной конвекции в неустойчивой области $g \nabla s > 0$. Конвекция в центральной области протонейтронной звезды в 3D идеальный газовой динамике с начальным реалистичным профилем удельной энтропии, соответствующей решению 1D с кинетическим переносом нейтрино, рассмотрена в работе [18, 19] без учета переноса нейтрино в 3D газовой динамике. Предположение о приме-

нимости критерия конвективной неустойчивости Шварцшильда для газовой динамики было спорным. Оказалось, помимо нейтронизации, есть потери нейтрино, и имеет место сильное вырождение [20, 21]. Тем не менее упрощенная газодинамическая модель с уравнением состояния идеального газа (идеальный газ с показателем адиабаты 4/3 точно описывает релятивистские электроны при любом вырождении, если для уравнений газовой динамики достаточно внутренней энергии, а температура не используется) позволила получить количественно правильные результаты. Конвекция развилась за газодинамическое время ~ 10 мс в центральной области $\rho_c \sim 10^{12}$ г/см³, ее масштаб крупный из-за протяженной неустойчивой центральной области, а также наличия небольшого вращения звезды. Был сделан вывод о необходимости учитывать конвекцию в расчетах коллапса, а вращение также способствует выделению длинноволновых возмущений и приближает 3D расчеты к 2D. Это было проверено как для газодинамической модели развития неустойчивости [19], так и в 3D самосогласованном расчете коллапса с учетом переноса нейтрино без учета их спектра [22]. Неравновесная нейтронизация вследствие учета процессов слабого взаимодействия при начальной высокой плотности энергии исследована в работе [23] в рамках однородной изотропной модели для функций распределения нейтрино при распадении однородного пузыря. Сделан вывод о предположительно высокой энергии при наступлении непрозрачности ≥ 40 МэВ. Это много больше энергий 10 МэВ в 1D сферически симметричной модели с излучением вблизи нейтриносферы. Задание средней энергии нейтрино в интервале 30–60 МэВ даже при неизменной светимости нейтрино обеспечивает кинетическую энергию оболочки в интервале $(1.5\text{--}50) \times 10^{51}$ эрг [18]. Это следствие пропорциональности сечения рассеяния и доли передаваемой энергии веществу средней энергии нейтрино [24–26].

Самосогласованная 2D задача о коллапсе с переносом нейтрино рассмотрена в работах [20, 21, 27] с упрощенной моделью взаимодействия нейтрино с веществом. В модели учтена газовая динамика вещества с табличным уравнением состояния, кинетика разницы чисел электронов и позитронов на нуклон, спектральная плотность энергии нейтрино. Моделирование коллапса с переносом нейтрино подтвердило развитие крупномасштабной конвекции в центре за время ~ 10 мс благодаря неравновесной нейтронизации из-за потерь части нейтрино. А учет в подходе небольшого вращения ядра привел к выделению крупномасштабных мод [22, 28]. Как показано в наших прошлых расчетах коллапса с переносом

нейтрино, конвекция в центре успевает развиться за время существования неустойчивого профиля энтропии [20, 21, 25]. Благодаря потере части нейтрино нейтронизация оказывается необратимой, реализуется сценарий неустойчивости, близкий к условию конвекции Шварцшильда $\nabla_{sg} > 0$ [20, 21]. Самосогласованные аксиально симметричные 2D расчеты газодинамического коллапса со спектральным переносом энергии нейтрино с учетом конвекции [27, 29] дают энергию уходящих нейтрино на уровне 15 МэВ в соответствии с энергией Ферми вырожденных электронов в зоне развития конвекции.

Несомненно для подтверждения модели коллапса и взрыва важно наблюдение нейтрино от СН. От близкой СН 1987А зарегистрировано только 20 нейтринных событий, первые публикации указывали на высокие энергии частиц: 20–40 МэВ IMB [30], 9–35 МэВ Kamiokande-II [31], 20 МэВ Baksan-LSD [32, 33], что ближе к модели крупномасштабной конвекции, чем к сферически симметричному коллапсу ~10 МэВ. Прошло более 35 лет со взрыва СН 1987А, чтобы прояснить ситуацию с исследуемым объектом из разнообразных наблюдений. На месте взрыва не наблюдается компактный остаток типа нейтронной звезды, предсказываемой сферически симметричной моделью коллапса, который должен быть виден с помощью инструментов высокого разрешения видимого, ультрафиолетового, инфракрасного диапазонов космического телескопа Хаббл [34]. В то же время регистрация в хорошем угловом разрешении радиоизлучения частотой ≤ 10 ГГц [35] и рентгеновских линий от радиоактивных изотопов [36] указывает на несферичный взрыв. В работе [37] из оценки рентгеновского излучения при аккреции на компактный остаток вещества предсверхновой также доказано отсутствие в центре массы, отвечающей нейтронной звезде. Альтернативная модель двухстадийного коллапса быстровращающегося ядра звезды [38] дает большую скорость остающейся нейтронной звезды ~1000 км/с [39], покинувшей двойную систему после взрыва маломассивной нейтронной звезды, и также указывает на асимметрию углового распределения радиоактивных изотопов в телесный угол порядка π вместо полного телесного угла 4π [40]. Расчет нуклеосинтеза при несимметричном взрыве из-за появления струй при крупномасштабной конвекции также обеспечивает асимметричное распределение радиоактивных элементов [41]. Кроме того, среди разрабатываемых моделей СН магниторотационная модель взрыва коллапсирующего ядра звезды [42] демонстрирует нужную энергию взрыва для объяснения вспышки СН [43]. Хотя двухстадийная модель коллапса с фрагментацией вращающегося ядра звезды на две нейтронной звезды пока не

подтверждена расчетом формирования двух нейтронных звезд при коллапсе, а магниторотационная модель предполагает вмороженность магнитного поля без учета конечной проводимости плазмы, следует отметить ожидание больших средних энергий уходящих нейтрино при несферичном взрыве. Работа по оценке регистрации нейтрино от коллапсирующей СН II на строящихся установках [44] допускает даже энергии нейтрино 25–50 МэВ. Также заметим, что несферичный взрыв коллапсирующей СН вызывает интерес в качестве объекта новой области экспериментальной физики, регистрации гравитационных волн [45]. Перспектива регистрации такого излучения хорошая только в случае деления образующегося компактного объекта типа нейтронной звезды (либо слиянии двух нейтронных звезд в ротационном механизме двухстадийного коллапса [46]). Нестационарное аксиально симметричное сжатие (и даже образование слаборелятивистских струй газа), характерное для крупномасштабной конвекции, обеспечивает гравитационное излучение на несколько порядков меньше, чем слияние нейтронных звезд [47, 48].

В проведенных расчетах [29] из-за ограниченных возможностей вычислительной сетки в задаче с учетом переноса нейтрино мы предполагали, что масштаб конвекции определяется областью неравновесной нейтронизации и наличием вращения. Цель данной работы – продемонстрировать независимость характера конвекции от параметров расчетной сетки, размерности задачи 2D, 3D и выбора начальных данных.

2. 2D И 3D МОДЕЛИ КОНВЕКЦИИ ПРИ КОЛЛАПСЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЯДРА ЗВЕЗДЫ

Физическая задача о гравитационном коллапсе в неподвижных Эйлеровых координатах, (\mathbf{r}, t) , включает в себя уравнение для числа барионов,

$$\frac{\partial \rho/m_p}{\partial t} + \text{div} \left(\frac{\rho/m_p}{\mathbf{v}} \right) = 0, \quad (1)$$

уравнение для разницы концентраций электронов и позитронов,

$$\frac{\partial \Delta n_e}{\partial t} + \text{div}(\Delta n_e \mathbf{v}) = \dot{Y}_e \rho/m_p, \quad (2)$$

уравнение для импульса вещества (передача энергии между нейтрино и веществом не важна из-за нерелятивистской скорости вещества). Скорости всех компонентов с ненулевой массой предполагаются равными, а для безмассовых частиц присутствует перенос энергии. Закон сохранения импульса вещества,

$$\frac{\partial \rho v_j}{\partial t} + \nabla_i \Pi_{ij}^m = \rho g_j + \rho f_j, \quad (3)$$

уравнение для плотности энергии вещества,

$$\frac{\partial \rho E_m}{\partial t} + \text{div}(E_m \rho + P_m) \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \mathbf{g} + \rho q_m, \quad (4)$$

с тензором плотности потока импульса $\Pi_{ij}^m = \rho v_i v_j + P_m \delta_{ij}$, $E_m = \epsilon_m + \mathbf{v}^2/2$ есть сумма удельных внутренней и кинетических энергий, и ρq_m — нагрев вещества в реакциях с нейтрино. Ускорение силы тяжести есть градиент потенциала $\mathbf{g} = -\text{grad } \Phi$, получаемого из уравнения Пуассона

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho. \quad (5)$$

Нейтрино сорта ν следует описывать кинетическими уравнениями Больцмана для функций распределения $f_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ в 6-мерном фазовом пространстве координат и импульсов частиц, (\mathbf{r}, \mathbf{p}) , что сделать при имеющихся вычислительных мощностях слишком сложно из-за наличия оптически плотных и прозрачных областей для нейтрино. Поэтому привлекательна модель диффузии с ограничением потоков, впервые предложенная в работе [49] для сферически симметричного коллапса. Упрощение состоит в переходе от функции распределения к спектральной плотности энергии нейтрино $\rho \epsilon_\nu(\mathbf{r}, t) = \int d\epsilon U_\nu(\epsilon)$,

$U_\nu(\epsilon) = \frac{\epsilon^3}{c^3} \int d\omega f_\nu = \frac{4\pi \epsilon^3}{c^3} f_\nu$ без учета угловой зависимости между радиусом-вектором и импульсом нейтрино. Для получения спектра уходящих нейтрино требуется ввести сетку для энергий нейтрино и использовать спектральные плотности энергии нейтрино и антинейтрино

$\Delta \rho \epsilon_{\nu, \omega} \equiv \int_{\epsilon_{\omega-1/2}}^{\epsilon_{\omega+1/2}} d\epsilon U_\nu f_\nu$ в каждом интервале сетки $(\epsilon_{\omega-1/2}, \epsilon_{\omega+1/2})$. Уравнение переноса спектральной плотности энергии есть

$$\frac{\partial \rho \Delta \epsilon_{\nu, \omega}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla (\rho \Delta \epsilon_{\nu, \omega}) = \text{div } \Delta \mathbf{F}_{\nu, \omega} - \rho \Delta q_{m, \omega}, \quad (6)$$

где поток определяется градиентом нулевого момента, а \mathbf{v} — скорость вещества, предполагается много меньше скорости света c . В непрозрачном случае $\Delta \mathbf{F}_{\nu, \omega}^{\text{thick}} = -\frac{1}{3\chi} \text{grad } \Delta U_{\nu, \omega}$, в

прозрачном $\Delta \mathbf{F}_{\nu, \omega}^{\text{max}} = c \Delta U_{\nu, \omega}$. В произвольном случае используется интерполяция (так называемое ограничение потоков), например: $\Delta \mathbf{F}_{\nu, \omega} = \Delta \mathbf{F}_{\nu, \omega}^{\text{thick}} / (|\Delta \mathbf{F}_{\nu, \omega}^{\text{thick}}| / \Delta \mathbf{F}_{\nu, \omega}^{\text{max}} + 1)$. Нелинейное уравнение переноса для спектральной плотности энергии из диффузионного (параболического) в непрозрачной области переходит в гиперболическое (перенос) в прозрачной области.

Отдельно нейтрино и антинейтрино рассматривать не будем. Примем одинаковые функции

распределения в лабораторной и сопутствующей веществу системах отсчета ($v \ll c$), и спектр нейтрино в тепловом равновесии

$$f_\nu^{\text{eq}} = \frac{2}{(2\pi \hbar c)^3} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\epsilon - \mu_\nu}{k T_\nu}\right)}, \quad \mu_\nu \approx \mu_e. \quad (7)$$

Нас интересует влияние конвекции на спектр исходящих нейтрино. Если интересоваться только спектром нейтрино, но не интересоваться взаимодействием выходящих нейтрино с оболочкой, можно использовать разработанную простую модель взаимодействия нейтрино с веществом [27]: спектральная плотность энергии нейтрино релаксирует к равновесному значению с температурой и химпотенциалом, определяемыми температурой вещества и химпотенциалом электронов, с характерным постоянным сечением слабого взаимодействия $\sigma_0 = 1.7 \times 10^{-40} \text{ см}^2$: $\rho \Delta q_m = c \chi (\Delta U_{\nu, \omega} - \Delta U_{\nu, \omega}^{\text{th}})$, где $\sum_\omega \Delta U_{\nu, \omega}^{\text{th}}(T_{\text{eq}}) + \rho \epsilon(\rho, T_{\text{eq}}, Y_e) = \sum_\omega \Delta U_{\nu, \omega} + \rho \epsilon$, скорость релаксации выбрана пропорциональной концентрации свободных нуклонов $c \chi \approx c \sigma_0 (n_n + n_p)$. А количество электронов на нуклон (точнее разница чисел электронов и позитронов на нуклон) релаксирует к приближенному аналитическому табличному значению из работы [50], где исследовалось β -равновесие для реакций слабого взаимодействия электронов и позитронов со свободными нуклонами при условии свободного выхода нейтрино: $\dot{Y}_e = -(c \sigma_0 (n_n + n_p))(Y_e - Y_e^{\text{eq}}(\rho, T(\rho, \epsilon)))$ к β -равновесию $Y_e^{\text{eq}}(\rho, T)$ из работы [50], где рассмотрены только две реакции $e^- + p \rightarrow n + \nu$, $e^+ + n \rightarrow p + \bar{\nu}$ со свободным выходом нейтрино. Расширение этой модели, количественно применимой только в прозрачной области около нейтриносферы, на непрозрачную область оправдывает малость диффузии нейтрино в непрозрачной области. Данная модель позволит определить спектр испускаемых нейтрино, а для точного учета их поглощения в оболочке постоянного сечения недостаточно. Уточнение модели нейтринизации, проведенное в работе [29] с помощью коррекции минимального значения равновесного числа электронов на нуклон, позволило правильно количественно описать вырождение с высокими химпотенциалами при ядерной плотности, но не повлияло ни на нейтринную светимость, ни на развитие крупномасштабной неустойчивости.

Систему уравнений замыкает уравнение состояния $P_m = P_m(\rho, \epsilon_m, Y_e)$ ядер в статистическом равновесии со свободными нуклонами: $(A_i, Z_i) \rightleftharpoons (A_i - Z_i)n + Z_i p$ (дает связь химпотенциалов $\mu_i = (A_i - Z_i)\mu_n + Z_i\mu_p$ [51]). Для электронов (и

позитронов) используется уравнение состояния ультрарелятивистских пар $k_B T \ll \rho \epsilon / m_p$, $\mu_e \gg m_e c^2$:
$$Y_e \rho = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 (\mu_e^3 + \pi^2 \mu_e), P_e = \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \rho \epsilon_e = \frac{1}{12\pi^2 (\hbar c)^3} \left(\mu_e^4 + 2\pi^2 \mu_e^2 (k_B T)^2 + \frac{7}{15} \pi^4 (k_B T)^4 \right).$$
 Фотонное излучение равновесное, чернотельное.

Для решения задачи (1)–(4) и (6) используется гидродинамический код, в основе газодинамической части которого лежит явная Годуновская схема высокого порядка точности для многокомпонентной смеси газов [52–54]. Кинетическая часть задачи, связанная с обменом энергией компонентов, расчетом числа электронов Y_e в реакциях слабого взаимодействия и диффузией энергии нейтрино рассматривается на отдельном шаге интегрирования по времени с помощью метода прямых (“Lines Method” переводит уравнения в частных производных в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, ОДУ) и неявном методе высокого порядка точности [55] для получающейся системы жестких ОДУ. Подход, основанный на решении задачи о распаде разрыва, позволяет иметь хорошее пространственное разрешение газодинамической части задачи в области с большими градиентами и контактными разрывами на ограниченной пространственной сетке. А решение задачи о распаде разрыва без отделения вещества от нейтрино позволяет избежать дробления временных шагов интегрирования в непрозрачной области, когда задача переходит в газовую динамику, включающую нейтрино. В противном случае раздельного описания вещества и нейтрино в непрозрачной области необходимо считать много перепоглощений нейтрино, и количество временных шагов определит толща для самой быстропротекающей реакции. Таким образом, ограничение на шаг интегрирования в непрозрачной области в явной схеме, относящейся к газодинамическому переносу, это стандартное условие устойчивости Куранта: $\Delta t \leq \Delta r / (c_s + |v|)$, включающего скорость вещества, v , и скорость звука, c_s . И только из-за прозрачной области, в которой скорость вещества и звука много меньше скорости света, сохранение точности расчетов налагает более строгое условие на временной шаг интегрирования $\Delta t \leq \Delta r / c$. В прозрачной области энергию по ячейкам расчетной сетки переносят нейтрино со световой скоростью, а не вещество, невозможно просчитывать эволюцию задачи, “перескакивая” через несколько интервалов сетки за один временной шаг, даже если бы газодинамический перенос был сделан по неявной безусловно устойчивой схеме. Другая особенность задачи – консервативность схемы при наличии большого вырождения электронов. В каж-

дом объеме пространственной сетки для построения консервативной схемы мы используем объемные плотности энергии вещества и спектральной плотности нейтрино. Это решает проблему непрозрачной области, в которой временные шаги определяет газодинамический перенос. При небольшой ошибке в определении энергии вещества получается большая погрешность в определении температуры, так что можно попасть в физически недопустимую область параметров ядерного статистического равновесия ($\rho, \rho \epsilon, Y_e$). На практике на использованной расчетной сетке удается просчитать развитие неустойчивости для сильного вырождения $\mu_e \leq 100$ МэВ при температуре вещества $kT \sim 10$ МэВ. Также газовая динамика включает перенос числа электронов на нуклон Y_e вместе с веществом в уравнении (2). В эйлеровом подходе пришлось вместо независимой переменной числа электронов на нуклон Y_e использовать плотность электронов, чтобы не попасть в физически недопустимую область в численном решении. Способ решения уравнения Пуассона (5), эффективный в 2D и 3D случаях, описан в работе [56]).

В качестве начальных данных принята связь давления и плотности, как в политропном уравнении состояния $P \propto \rho^{1+1/n}$ с индексом $n = 3$, отвечающим ультрарелятивистским электронам, с небольшим начальным вращением. Закон вращения выбран в виде постоянного отношения центробежной силы к силе тяжести (обобщение твердотельного вращения несжимаемой жидкости на случай сжимаемой) из [57]. Отношение полярного радиуса r_p к экваториальному r_{eq} выбрано 0.9, энергия вращения получилась 1.25% от гравитационной. Небольшое вращение обеспечивает аксиальную симметрию и вместе с протяженной конвективно неустойчивой областью по радиусу ($\nabla \cdot \mathbf{sg} > 0$) способствует выделению крупномасштабной конвекции, как было показано в 3D расчетах с учетом переноса нейтрино без учета их спектра [22]. В данной работе мы хотим проверить предположение о крупном масштабе конвекции, удвоив расчетную сетку по полярному углу θ . Выбранный закон дифференциального вращения (в политропном уравнении состояния угловая скорость зависит от цилиндрического радиуса и не зависит от координаты z) позволяет рассматривать сколь угодно большие энергии вращения, вплоть до тонкого диска. В начале гравитационного коллапса для ядра звезды с радиусом $\sim 10^9$ см следовало выбрать твердотельное вращение политропы $n = 3$ из-за конвекции при термоядерном прогорании водорода в железо. В мягком уравнении состояния с политропой $n = 3$ распределение массы достаточно рыхлое по пространству, плотность спадает с радиусом мед-

ленно. И максимально сильное твердотельное вращение получается при достижении на экваторе первой космической скорости с энергией вращения $E_{\text{rot}}/(-E_{\text{gr}}) = 0.009$ и моментом импульса $J_z = 6.4 \times 10^{49}$ эрг·с для массы $1.4 M_{\odot}$ [58]. В твердотельном вращении центробежная сила велика в сравнении с ускорением силы тяжести только на краю коллапсирующего ядра звезды. Выбранный дифференциальный закон вращения отвечает ядру на стадии коллапса, когда вращение играет роль по всей массе звезды. Действительно, сохранение момента импульса частиц вещества при его сжатии повышает роль центробежной силы относительно гравитации обратно пропорционально радиусу. Политропная начальная модель содержит три независимых физических параметра, например, гравитационная постоянная, G , центральная плотность, ρ_0 , и экваториальный радиус, r_{eq} . Масса ядра звезды фиксирована, $1.4 M_{\odot}$. Из-за ограничений количества интервалов по радиусу неподвижной эйлеровой расчетной сетки мы вынуждены рассматривать в начальной модели звезду, уже находящуюся на стадии коллапса. В реальности требуется разрешить формирование нейтронной звезды с радиусом ~ 10 км, начиная с радиуса звезды $\sim 10^8$ см, и проследить начальную стадию потерь энергии нейтрино, продолжающуюся несколько секунд, что значительно превышает газодинамическое время $(Gr)^{-1/2}$ для малой начальной центральной плотности $\sim 10^9$ г/см³ [24]. Для удобства рассмотрения многомерной задачи начальная модель находится в состоянии равновесия (если отключить перенос нейтрино), пренебрегли ненулевой радиальной скоростью. Начальная плотность звезды в центре при выбранной постановке — произвольный параметр задачи. В работе проведены два расчета для двух разных значений центральной плотности: $\rho_c = 1 \times 10^{12}$ г/см³ (2D расчет с учетом спектра нейтрино) и $\rho_c = 2 \times 10^{12}$ г/см³ (3D расчет без учета спектра нейтрино, а также старые работы [22, 29]). Политропа дает экваториальный радиус $r_{\text{eq}} = 3.38 \times 10^7$ см, гравитационную энергию $E_{\text{gr}} = -2.33 \times 10^{52}$ эрг, момент импульса $J_z = 1.24 \times 10^{49}$ эрг·с в первом случае и $r_{\text{eq}} = 2.68 \times 10^7$ см, гравитационную энергию $E_{\text{gr}} = -2.93 \times 10^{52}$ эрг, момент импульса $J_z = 9.87 \times 10^{48}$ эрг·с во втором. Обе начальные модели относятся к слабому вращению в сравнении с допустимым моментом импульса $J_z = 6.4 \times 10^{49}$ эрг·с ядра звезды с твердотельным вращением перед коллапсом.

Для заданных профилей плотности и давления начальных данных пересчитаны параметры T , $Y_e = Y_e^{\text{eq}}(\rho, T)$ с температурой $T = T(\rho, \epsilon = 3P/\rho)$, обеспечивающие начальное равновесие (без учета выхода нейтрино) в момент времени $t = 0$, см. рис. 1 для 2D расчета. В результате реконструкции решения в 2D задаче мы получаем снижающийся протяженный профиль энтропии $ds/dr < 0$ (рис. 1), как в сферически симметричном расчете коллапса [24]. Спадающий профиль возникает из-за нейтронизации и продолжается дольше 10 мс. Нейтронизация уменьшает число электронов Y_e на рис. 1, и удельная энергия от электронов переходит к нуклонам. Этим объясняется спадающий профиль удельной энтропии $ds/dr < 0$. В задаче о коллапсе [24] мы имели две предположительно неустойчивые области для конвекции (если использовать критерий устойчивости Шварцшильда $ds/dr < 0$ без учета нейтрино). Вторая узкая область формируется вблизи аккрецирующей ударной волны и существует долгое время. Другой критерий возникновения конвекции для газовой динамики с химическим превращением (нейтронизация вещества происходит за газодинамическое время) есть критерий устойчивости Леду [59, 60]. Оба критерия устойчивости Шварцшильда и Леду не учитывают перенос нейтрино, который оказывается важным.

Для расчетов 2D задачи в сферических координатах ($r, 0 < \theta < \pi/2$) использовалась сетка 60×60 для большей части массы (расчетная область ограничена $r \leq 0.6r_{\text{eq}}$) в предположении аксиальной симметрии $\partial/\partial\phi = 0$, и плоскости симметрии $\theta = \pi/2$. Для учета спектра нейтрино используется логарифмическая сетка из 15 интервалов до энергии 40 МэВ. Пространственная сетка при приближении к началу координат сгущается по угловой переменной, а при расчете по явной схеме действует ограничение Куранта на временной шаг $\Delta t \leq \Delta r \Delta\theta / (c_s + |v|)$. В отличие от огрубления угловой сетки в начале координат [61] мы в расчетах угловую сетку оставляем регулярной, но дробим временные шаги интегрирования по углам на несколько при приближении к началу координат и таким образом огрубляем слишком подробное описание в угловом направлении вблизи начала координат.

Граничные условия задачи. На внешней границе заданы непротекание вещества и гладкая стенка, нейтрино свободно покидают расчетную область. Несохранение z -компоненты момента импульса, связанное с ошибками аппроксимации и “схемной” вязкостью, не превышает долей процента в расчете даже для нескольких оборотов вещества в случае сильного вращения [19]. В данном расчете вращение слабое, в формиру-

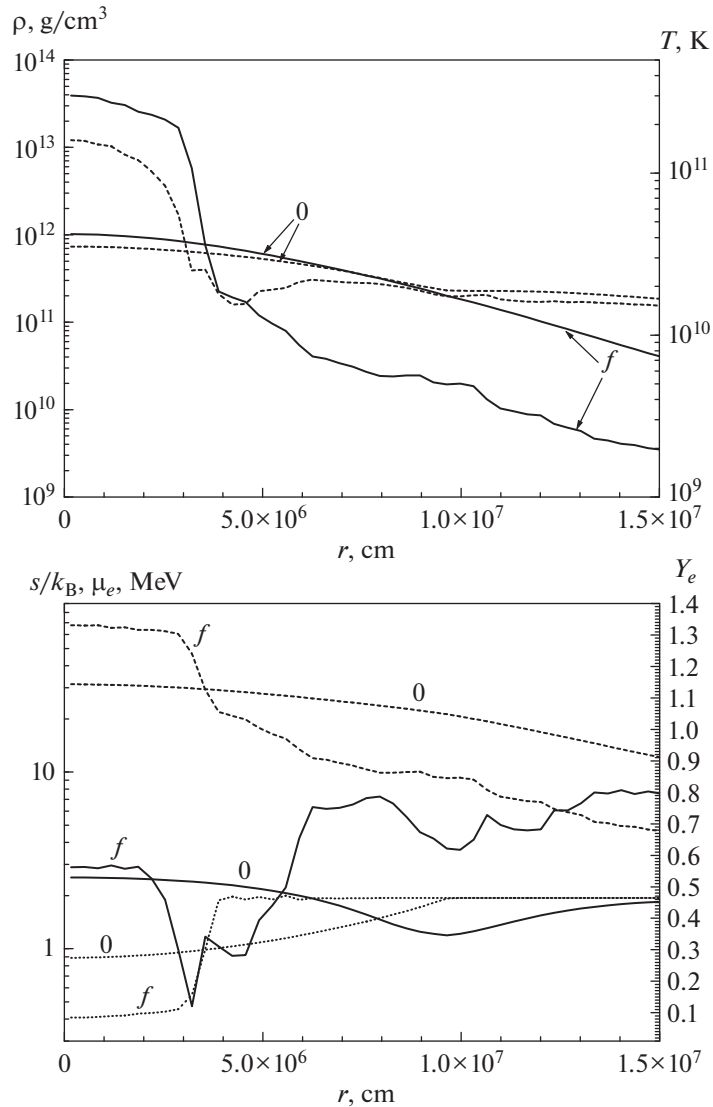


Рис. 1. Начальная модель ($t = 0$) и окончание расчетов ($t_f = 14.51$ мс) в экваториальной плоскости ($\theta = \pi/2$) в 2D расчетах. Зависимости плотности ρ (сплошные линии) и температуры T (штриховые линии) от радиуса (верхняя панель). Зависимости энтропии на нуклон s/k_B (сплошные линии), химпотенциала электронов μ_e (штриховые линии) и числа электронов Y_e (пунктирные линии) от радиуса (нижняя панель).

ющейся нейтронной звезде из-за потерь энергии нейтрино угловая скорость в центре увеличивается до значения 0.4 рад/мс, получается менее одного оборота в центральной части за все время расчетов.

В ходе расчета эволюции звезды уходящие нейтрино уносят энергию, у вещества появляется отрицательная радиальная скорость, плотность и температура в центре растут, а области нейтронизации и область спадающего профиля энтропии сдвигаются к центру, энтропия становится немонотонной пилообразной, что свидетельствует о развитии неустойчивости (рис. 1). Линии уровня плотности на рис. 2 в момент времени

$t = 14.51$ мс наглядно показывают развитие крупномасштабной конвекции за газодинамическое время $(G\bar{\rho})^{-1/2} = 4$ мс для средней плотности $\bar{\rho} \approx 10^{11}$ г/см³. Дробление сетки в два раза по полярному углу θ в сравнении со старыми расчетами [29] не увеличило количество всплывающих наружу пузырей с высокоэнергичными частицами. В части формирующегося прото-нейтронного ядра, из которой нейтрино выходят, благодаря необратимой нейтронизации реализуются условия конвекции, близкие к условию Шварцшильда. В центральной части с высокой плотностью нейтрино захвачены веществом, ней-

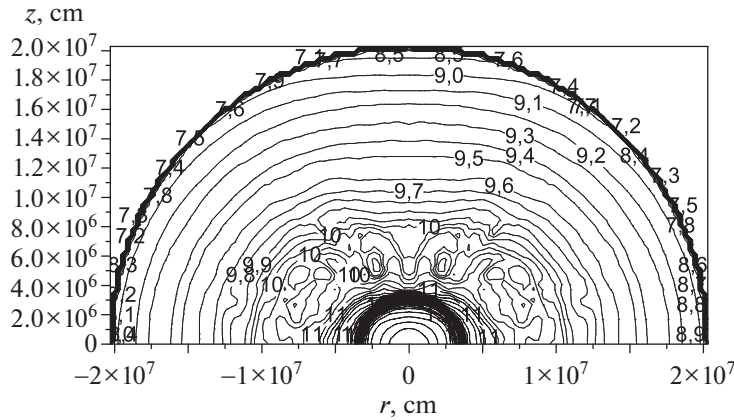


Рис. 2. Линии уровня плотности в плоскости $\phi = 0$ в задаче о коллапсе массы $1.4 M_{\odot}$ с учетом переноса нейтрино и их спектра в момент времени $t = 14.51$ мс ($\lg \rho_{\min} = 7$, $\lg \rho_{\max} = 13$, $\Delta \lg \rho = 0.1$, единица плотности г/см^3) демонстрируют развитие крупномасштабной конвекции.

тронизация обратима, конвекция развивается хуже. Спадающий по радиусу профиль энтропии в центре остается монотонным (рис. 1). С выключенным переносом нейтрино задача является математически строгой задачей об устойчивости. И конвекция во всей расчетной области развивалась за длительное время 100 мс, начинаясь с периферийной разреженной области. Пересчет удельной энтропии в предположении быстрой релаксации числа электронов Y_e к равновесному значению Y_e^{eq} убирает неустойчивый профиль энтропии. Таким образом к центральной части в формирующейся прото-нейтронной звезды применим критерий устойчивости Леду.

Важный результат расчетов – это спектральный поток нейтрино $dL/d\epsilon$ вблизи нейтриносферы с радиусом $r = 5.1 \times 10^6$ см, приведенный на рис. 3. 2D расчет демонстрирует повышение средней энергии нейтрино в сравнении с 1D [24] до 15 МэВ, примерно в 1.5 раза. Спектр уходящих нейтрино становится жестче в сравнении со сферически симметричным расчетом из-за конвекции в центральной области с высокоэнергичными нейтрино, запертыми оптически плотным веществом в 1D. Максимум спектральной светимости в задаче с меньшей начальной центральной плотностью $\rho_c = 1 \times 10^{12}$ г/см^3 достигается также при 18 МэВ, как в расчетах с большей начальной центральной плотностью $\rho_c = 2 \times 10^{12}$ г/см^3 [22]. Как показывает рис. 1, химпотенциал электронов (и такой же для нейтрино) на границе непрозрачной области 18 МэВ соответствует энергии выходящих нейтрино. Нейтрино с максимальным химпотенциалом в центре 60 МэВ остаются запертыми, в непрозрачной области нейтронизация обратима, и

неустойчивость подавленная (не развивается за газодинамическое время < 10 мс).

Расчеты с учетом вращения демонстрируют выделение более длинноволновых возмущений, чем в случае без вращения на грубых сетках [20, 21]. В более реалистичном 3D случае вращение способствует выделению тех же самых длинноволновых возмущений [22, 62]. Рисунок 4 содержит расчет коллапса на подробной трехмерной сетке $60 \times 60 \times 10$ в области $r < 0.6 r_{\text{eq}}$, $0 < \theta < \pi/2$, $0 < \phi < \pi$ для большего значения центральной плотности $\rho_c = 2 \times 10^{12}$ г/см^3 с переносом нейтрино, но без учета их спектра. 3D расчет подтвер-

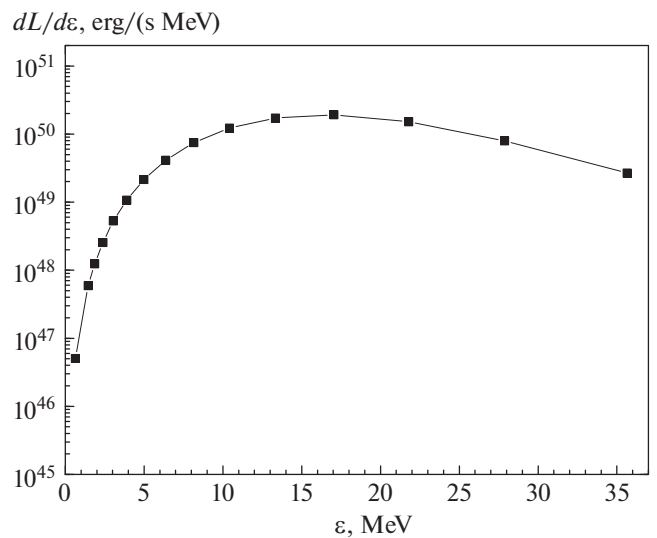


Рис. 3. Спектральная нейтринная светимость при коллапсе, $dL/d\epsilon$ в момент $t = 13.22$ мс вблизи нейтриносферы $r = 5.1 \times 10^6$ см.

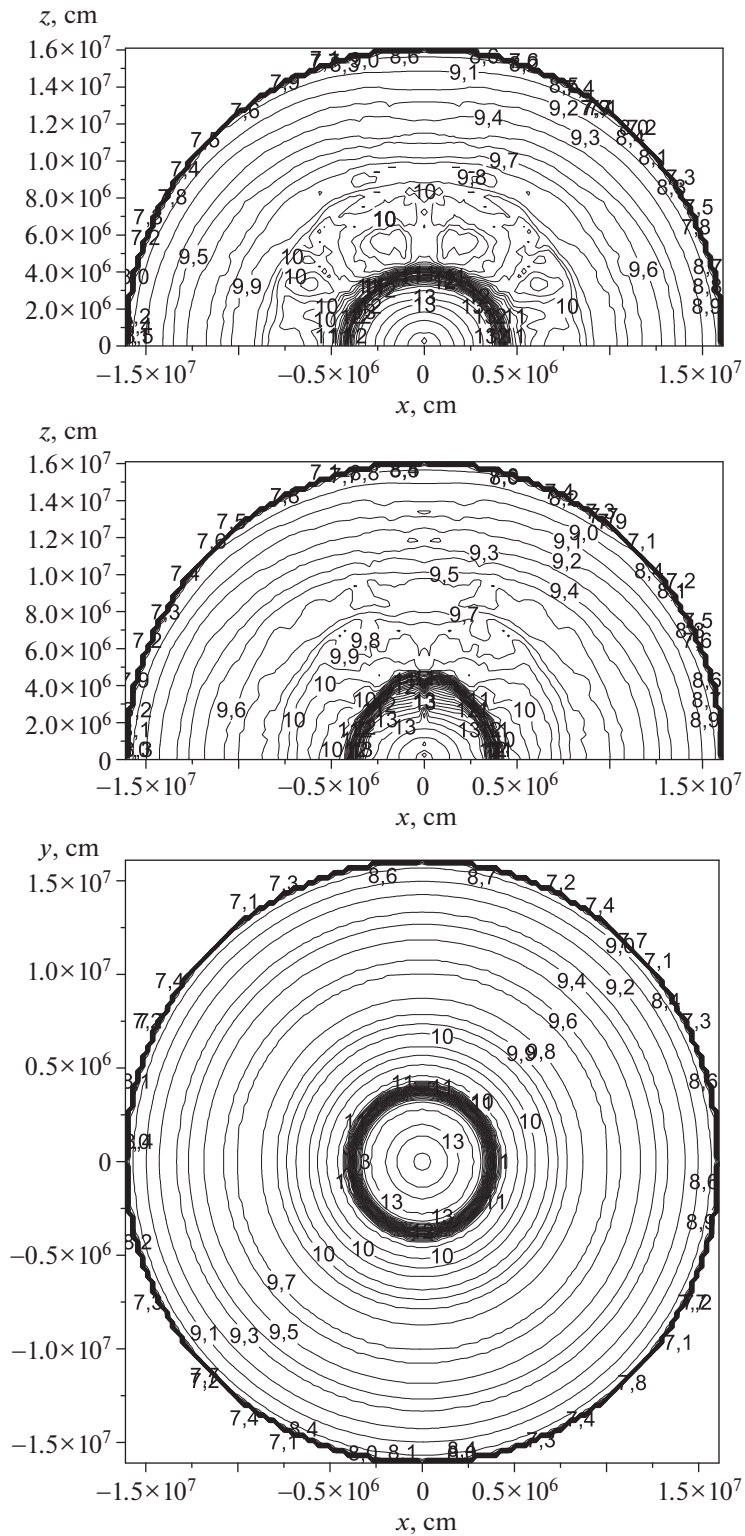


Рис. 4. Линии уровня плотности в 3D расчетах ($\lg \rho_{\min} = 7$, $\lg \rho_{\max} = 14$, $\Delta \lg \rho = 0.1$, единица плотности г/см^3) в моменты времени $t = 11.27$ мс (верхняя панель, плоскость $y = 0$) и $t = 12.36$ мс (средняя панель, плоскость $y = 0$; нижняя панель, плоскость $z = 0$) демонстрируют развитие крупномасштабной конвекции в 3D расчетах.

ждает предположение о крупномасштабной конвекции и о близости задачи к 2D случаю. Из-за наличия небольшого вращения развитие неустойчивости вдоль координаты ϕ подавлено, по крайней мере за рассмотренное газодинамическое время.

В последнее время появился интерес к возможности регистрации нейтрино от коллапсирующих сверхновых, для чего расчет спектра нейтрино обязателен. Современные установки с большим количеством рабочего вещества обещают в тысячу раз большее количество регистраций нейтринных событий от близкой сверхновой, чем от SN 1987A [63]. Темп регистрации нейтринных событий оказывается различим для рассчитанных моделей коллапса с разными спектрами нейтрино. Но неопределенность в расчете нейтринных осцилляций вносит неопределенность в предсказание темпа нейтринных событий, так что средние энергии нейтрино 30 МэВ могут оказаться неотличимы от нейтрино 15 МэВ [63]. Однако спектр нейтрино, проинтегрированный по времени, даже при допустимости нейтринных осцилляций можно воспроизвести с помощью регистрации нейтрино на нескольких типах детекторов [64].

Аксиально-симметричные расчеты авторов [11] демонстрируют средние энергии нейтрино 12–20 МэВ и светимость нейтрино на десятки процентов выше, чем в сферически симметричной модели; новые расчеты 2D [65] и 3D [66] дают средние энергии нейтрино 15–20 МэВ, близкие к нашим расчетам 15 МэВ. В сферически симметричной модели коллапса искусственное повышение средней энергией нейтрино до величины 30 МэВ оказалось достаточно для объяснения SN даже при неизменной светимости нейтрино [25, 26] из-за роста сечения рассеяния нейтрино на электронах при увеличении энергии нейтрино. Поскольку конвекция такого большого увеличения энергии уходящих нейтрино не обеспечивает, важен также эффект увеличения потока нейтрино из-за конвекции. В расчетах с упором на механизм сброса оболочки SN получают следующие выводы, интересные для приложения рассмотренной нами модели крупномасштабной конвекции. В 2D моделях [10, 11] взрыв SN получается одновременно с крупномасштабной конвекцией. В 3D постановке [14, 15] конвекция в области аккреции оставалась мелкомасштабной, и энерговложения в оболочку предсверхновой часто не происходит [16]. Наши расчеты коллапса в 3D с учетом переноса нейтрино наглядно показывают, что небольшое начальное вращение превращает трехмерную задачу в двумерную постановку и снимает проблему масштаба конвекции.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена крупномасштабная конвекция в задаче о коллапсе ядра звезды со слабым вращением с учетом переноса нейтрино и их спектра. Конвекция возникает в центральной части за газодинамическое время ~ 10 мс благодаря неравновесной нейтронизации при выходе нейтрино из этой области. Выделению длинноволновой моды способствуют протяженная неустойчивая область и небольшое начальное вращение. Показана независимость крупномасштабного характера конвекции от параметров расчетной сетки, 2D или 3D формулировки математической задачи и малому влиянию параметров начальной модели (выбору центральной плотности для начальной политропы $n = 3$ в состоянии равновесия).

Полученное значение средней энергии нейтрино 15 МэВ в 1.5 раза выше средней энергии для сферически симметричных расчетов, и в соответствующее число раз увеличит энергию, передаваемую от нейтрино к расширяющейся оболочке. Вероятно, для объяснения сброса оболочки сверхновой с вложением необходимой энергии 10^{51} эрг важны оба эффекта: увеличение средней энергии и увеличение нейтринной светимости. Расчеты других авторов указывают на перспективность нейтринного механизма взрыва при крупном масштабе развития неустойчивости.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (Проект 20-11-20165).

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность анонимному рецензенту за внимательное прочтение рукописи и сделанные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *K. Nomoto and M. Hashimoto*, Phys. Rep. **163**(1–3), 13 (1988), <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0370157388900324>.
2. *D. K. Nadezhin*, Astrophys. Space Sci. **49**, 399 (1977).
3. *V. S. Imshennik and D. K. Nadezhin*, Sov. Sci. Rev. Sect. E **8**(1), 1 (1989).
4. *W. A. Fowler and F. Hoyle*, Astrophys. J. Suppl. **9**, 201 (1964).
5. *H. A. Bethe*, Rev. Modern Physics **62**, 801 (1990).
6. *H.-T. Janka, K. Langanke, A. Marek, G. Martínez-Pinedo, and B. Müller*, Phys. Rep. **442**, 38 (2007), arXiv:astro-ph/0612072.

7. *V. S. Imshennik and D. K. Nadezhin*, Sov. J. Experim. Theoret. Phys. **36**, 821 (1973).
8. *M. Herant, W. Benz, W. R. Hix, C. L. Fryer, and S. A. Colgate*, Astrophys. J. **435**, 339 (1994), arXiv:astro-ph/9404024.
9. *A. Burrows, J. Hayes, and B. A. Fryxell*, Astrophys. J. **450**, 830 (1995), arXiv:astro-ph/9506061.
10. *J. W. Murphy and C. Meakin*, Astrophys. J. **742**(2), id.74 (2011), arXiv:1106.5496 [astro-ph.SR].
11. *J. C. Dolence, A. Burrows, and W. Zhang*, Astrophys. J. **800**(1), id.10 (2015), arXiv:1403.6115 [astro-ph.SR].
12. *S. M. Couch and C. D. Ott*, Astrophys. J. **778**, id.L7 (2013), arXiv:1309.2632 [astro-ph.HE].
13. *A. Wongwathanarat, E. Müller, and H.-T. Janka*, Astron. and Astrophys. **577**, id.A48 (2015), arXiv:1409.5431 [astro-ph.HE].
14. *S. M. Couch and C. D. Ott*, Astrophys. J. **799**(1), id.5 (2015), arXiv:1408.1399 [astro-ph.HE].
15. *D. Radice, C. D. Ott, E. Abdikamalov, S. M. Couch, R. Haas, and E. Schnetter*, Astrophys. J. **820**(1), id.76 (2016), arXiv:1510.05022 [astro-ph.HE].
16. *A. Burrows and D. Vartanyan*, Nature **589**, 29 (2021), arXiv:2009.14157 [astro-ph.SR].
17. *V. M. Chechetkin, S. D. Ustyugov, A. A. Gorbunov, and V. I. Polezhaev*, Astron. Letters **23**, 30 (1997).
18. *I. V. Baikov, V. M. Suslin, V. M. Chechetkin, V. Bychkov, and L. Stenflo*, Astron. Rep. **51**, 274 (2007).
19. *A. G. Aksenov and V. M. Chechetkin*, Astron. Rep. **60**, 655 (2016).
20. *A. G. Aksenov and V. M. Chechetkin*, Astron. Rep. **62**, 251 (2018).
21. *V. M. Chechetkin and A. G. Aksenov*, Phys. Atomic Nuclei **81**, 128 (2018).
22. *A. G. Aksenov and V. M. Chechetkin*, Astron. Rep. **65**, 916 (2021).
23. *V. M. Suslin, S. D. Ustyugov, V. M. Chechetkin, and G. P. Churkina*, Astron. Rep. **45**, 241 (2001).
24. *A. G. Aksenov and V. M. Chechetkin*, Astron. Rep. **56**, 193 (2012).
25. *A. G. Aksenov and V. M. Chechetkin*, Astron. Rep. **58**, 442 (2014).
26. *I. V. Baikov and V. M. Chechetkin*, Astron. Rep. **48**, 229 (2004).
27. *A. G. Aksenov and V. M. Chechetkin*, Astron. Rep. **63**, 900 (2019).
28. *A. G. Aksenov and V. M. Chechetkin*, Astron. Rep. **62**, 834 (2018).
29. *A. G. Aksenov and V. M. Chechetkin*, Astron. Rep. **66**, 1 (2022).
30. *R. M. Bionta, G. Blewitt, C. B. Bratton, D. Casper, and A. Ciocio*, Phys. Rev. Letters **58**, 1494 (1987).
31. *K. Hirata, T. Kajita, M. Koshiba, M. Nakahata, and Y. Oyama*, Phys. Rev. Letters **58**, 1490 (1987).
32. *E. N. Alekseev, L. N. Alekseeva, V. I. Volchenko, and I. V. Krivosheina*, Sov. J. Experim. Theoret. Phys. Letters **45**, 589 (1987).
33. *R. Schaeffer, Y. Declais, and S. Jullian*, Nature **330**, 142 (1987).
34. *J. Larsson, C. Fransson, D. Alp, P. Challis, et al.*, Astrophys. J. **886**, id.147 (2019), arXiv:1910.09582 [astro-ph.HE].
35. *J. E. Reynolds, D. L. Jauncey, L. Staveley-Smith, A. K. Tzioumis, et al.*, Astron. and Astrophys. **304**, 116 (1995).
36. *S. E. Boggs, F. A. Harrison, H. Miyasaka, B. W. Grefenstette, et al.*, Science **348**(6235), 670 (2015).
37. *A. A. Baranov and V. M. Chechetkin*, Astron. Rep. **55**, 525 (2011).
38. *V. S. Imshennik and O. G. Ryazhskaya*, Astron. Letters **30**, 14 (2004), astro-ph/0401613.
39. *V. S. Imshennik and D. V. Popov*, Astron. Letters **28**, 465 (2002).
40. *A. G. Aksenov, E. A. Zabrodina, V. S. Imshennik, and D. K. Nadezhin*, Astron. Letters **23**, 677 (1997).
41. *M. V. Popov, A. A. Filina, A. A. Baranov, P. Chardonnet, and V. M. Chechetkin*, Astrophys. J. **783**, id.43 (2014).
42. *G. S. Bisnovaty-Kogan*, Astronomicheskii Zhurnal **47**(8), 813 (1970).
43. *G. S. Bisnovaty-Kogan, S. G. Moiseenko, and N. V. Ardelyan*, Phys. Atomic Nuclei **81**, 266 (2018), arXiv:1903.12628 [astro-ph.HE].
44. *O. G. Ryazhskaya*, Physics Uspekhi **49**, 1017 (2006).
45. *B. J. Owen, L. Lindblom, and L. S. Pinheiro*, Astrophys. J. **935**, id.L7 (2022), arXiv:2206.01168 [gr-qc].
46. *A. G. Aksenov and V. M. Chechetkin*, Astron. Rep. **57**, 498 (2013).
47. *S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky*, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects* (New York, Wiley: A Wiley-Interscience Publ., 1986).
48. *M. V. Sazhin, S. D. Ustyugov, and V. M. Chechetkin*, J. Experim. Theor. Phys. **86**(4), 629 (1998).
49. *S. W. Bruenn*, Astrophys. J. Suppl. **58**, 771 (1985).
50. *G. S. Bisnovaty-Kogan*, Astrophysics **55**(3), 387 (2012), arXiv:1203.0997 [astro-ph.HE].
51. *A. G. Aksenov*, Universe **8**, 372 (2022).
52. *A. G. Aksenov*, Comp. Math. and Math. Physics **55**, 1752 (2015).
53. *G. Vereshchagin and A. Aksenov*, *Relativistic Kinetic Theory With Applications in Astrophysics and Cosmology* (Cambridge University Press, 2017).
54. *A. G. Aksenov, V. F. Tishkin, and V. M. Chechetkin*, Math. Models Computer Simulations **11**, 360 (2019).
55. *C. W. Gear*, *Numerical initial value problems in ordinary differential equations* (Upper Saddle River, NJ United States: Prentice Hall PTR, 1971).
56. *A. G. Aksenov*, Astron. Letters **25**, 185 (1999).

57. *A. G. Aksenov and S. I. Blinnikov*, *Astron. and Astrophys.* **290**, 674 (1994).
58. *A. G. Aksenov, S. I. Blinnikov, and V. S. Imshennik*, *Astron. Rep.* **39**, 638 (1995).
59. *P. Ledoux*, *Astrophys. J.* **105**, 305 (1947).
60. *Г. С. Бисноватый-Коган*, *Физические вопросы теории звездной эволюции* (М.: Наука, 1989).
61. *M. A. Skinner, J. C. Dolence, A. Burrows, D. Radice, and D. Vartanyan*, *Astrophys. J. Suppl.* **241**, id.7 (2019).
62. *S. Chandrasekhar and N. R. Lebovitz*, *Astrophys. J.* **138**, 185 (1963).
63. *K. Abe, P. Adrich, H. Aihara, R. Akutsu, et al.*, *Astrophys. J.* **916**, id.15 (2021).
64. *H. Nagakura*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **500**, 319 (2021), arXiv:2008.10082 [astro-ph.HE].
65. *H. Nagakura, A. Burrows, and D. Vartanyan*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **506**, 1462 (2021), arXiv:2102.11283 [astro-ph.HE].
66. *D. Vartanyan, M. S. B. Coleman, and A. Burrows*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **510**, 4689 (2022), arXiv:2109.10920 [astro-ph.SR].