АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2023, том 100, № 6, с. 500–511

МАССОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ БЛЕСКА ЗВЕЗД В ПРОИЗВОЛЬНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПОЛОСЕ

© 2023 г. М. Е. Прохоров[1,*], А. И. Захаров[1], В. Г. Мошкалев[1], Н. Л. Крусанова[1], М. С. Тучин[1]

[1] *Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга МГУ, Москва, Россия*

******E-mail: mike@sai.msu.ru*

Поступила в редакцию 13.02.2023 г.
После доработки 27.03.2023 г.
Принята к публикации 27.03.2023 г.

Рассмотрена задача о вычислении блеска массива звезд в произвольной фотометрической полосе, не являющейся стандартной полосой астрономической фотометрии, по их многоцветной фотометрии в некоторой другой фотометрической системе. Похожая задача заключается в переводе фотометрических измерений звезд из одной многоцветной фотометрической системы в другую. Эта задача включает в себя методы вычисления и сравнения звездных величин, а также слияния фотометрических каталогов. Рассматриваются вопросы выбора различных нуль-пунктов фотометрии и редукции измерений за атмосферу. Обсуждаются вопросы уменьшения погрешности предложенных методик. Статья частично основана на докладе, представленном на конференции “Современная звездная астрономия-2022”, прошедшей в Кавказской горной обсерватории ГАИШ МГУ им. М.В. Ломоносова 8–10 ноября 2022 г.

Ключевые слова: фотометрия, фотометрические системы, фотометрические каталоги, звездные величины

DOI: 10.31857/S0004629923050092, **EDN:** YXCAPG

1. ВВЕДЕНИЕ

Фундаментальная фотометрия астрономических объектов проводится в определенных фотометрических системах (наборах фотометрических полос), которых на сегодняшний день разработано более двух сотен [1]. Самыми популярными системами сегодня являются системы UBVR Джонсона [2] и ugriz (точнее u’g’r’i’z') [3]. В обеих системах получен большой наблюдательный материал, объем которого продолжает расти. Время от времени возникает задача вычисления блеска звезд (звезды) в какой-то другой полосе по измерениям в этих фотометрических системах. Один из примеров – объединение массивов наблюдений в системах Джонсона и ugriz, т.е. вычисление звездных величин в полосах Джонсона по ugriz или наоборот. Другой пример из прикладной области – вычисление блеска звезд в широкой панхроматической полосе кремниевого приемника излучения, сенсибилизированного в красную или синюю области спектра. Такие приемники используются в приборах для ориентации и навигации в космосе.

Рассматриваемый нами метод ориентирован на максимально точный перевод блеска звезд в заданную полосу, но не для каждой отдельной звезды, а для основной массы звезд. Для небольшой доли “пекулярных” объектов будут наблюдаться “выбросы” – отклонения от истинных значений их звездных величин.

Рассмотрим оба этих примера: первый – создание каталога блеска звезд в широкой панхроматической полосе для использования в оптико-электронных приборах (ОЭП) космического базирования (например, в звездных датчиках ориентации), и второй – пересчет величин звезд между фотометрическими системами UBVR Джонсона и ugriz.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН ЗВЕЗД В ПАНХРОМАТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЕ

2.1. Постановка задачи и исходные данные

Задача для этого случая ставится следующим образом. Нам известна кривая спектральной чувствительности приемника излучения ОЭП для которого будет проводиться расчет звездных величин $S(\lambda)$. Для некоторого списка звезд нам необходимо рассчитать их звездные величины в этой полосе. Основным критерием при составлении списка звезд обычно является предельная звездная величина (причем наиболее корректно использовать предельную звездную величину именно в рассчитываемой полосе S). Помимо

этого из списка могут исключаться самые яркие звезды, неразрешенные двойные, переменные звезды и другие пекулярные объекты. Номер звезды в списке будем обозначать индексом i.

На момент начала расчетов фотометрического каталога звезд в полосе S нет, и его создание путем проведения наблюдений с помощью целевого ОЭП или его фотоприемника не предполагается.

Исходными данными для нас является массив фотометрических наблюдений звезд m_*, входящих в упомянутый выше список, в одной или нескольких фотометрических системах $R_j(\lambda)$, где индекс j обозначает полосы фотометрических систем, в которых проведены фотометрические измерения. У произвольной звезды из списка измерения в части фотометрических полос могут отсутствовать.

Нам известны все кривые спектральной чувствительности фотометрических систем $R_j(\lambda)$, фотометрические наблюдения в которых мы будем использовать.

Помимо этого для *некоторых* звезд мы знаем распределения энергии в их спектрах $E_*(\lambda)$. Такие звезды мы будем называть "фотометрическими стандартами" или просто "стандартами". Их число невелико по сравнению с полным числом звезд в списке.

Наконец, если фотометрические измерения звезд имеют классическую калибровку на звезду спектрального класса A0V ("Вегу") [4], то нам будет нужно распределение энергии в ее спектре $E_{\mathrm{A0}}(\lambda)$. Далее мы будем рассматривать в первую очередь случаи именно с такой калибровкой.

Спектры фотометрических стандартов и спектр "Веги" должны перекрывать фотометрическую полосу $S(\lambda)$ и все полосы $R_j(\lambda)$.

2.2. Основные соотношения

Звездные величины (энергетические), откалиброванные по "Веге" задаются следующими выражениями. Для звезд, измеренных в астрономических фотометрических полосах $R_j(\lambda)$,

$$m_{j*} - m_{j,\mathrm{A0}} = -2.5\lg\frac{\int\limits_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} E_*(\lambda)R_j(\lambda)d\lambda}{\int\limits_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} E_{\mathrm{A0}}(\lambda)R_j(\lambda)d\lambda}, \qquad (1)$$

а для измерений звезд в полосе ОЭП $S(\lambda)$

$$m_{S,*} - m_{S,\mathrm{A0}} = -2.5\lg\frac{\int\limits_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} E_*(\lambda)S(\lambda)d\lambda}{\int\limits_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} E_{\mathrm{A0}}(\lambda)S(\lambda)d\lambda}. \qquad (2)$$

Эти соотношения имеются для всех звезд списка, хотя индекс i в формулах (1) и (2) опущен. Формула (1) может быть записана не для всех значений j, мы уже отмечали выше, что фотометрические измерения звезд могут быть проведены не во всех полосах R_j.

Если в используемых нами фотометрических измерениях звезд использовалась калибровка по звезде A0V, то по определению все показатели цвета этой звезды равны нулю [4], в том числе и все показатели цвета со звездной величиной в полосе S:

$$m_{j,\mathrm{A0}} - m_{S,\mathrm{A0}} \equiv 0. \qquad (3)$$

Тогда, просуммировав формулы (1) и (2) и воспользовавшись соотношением (3), получаем выражение

$$m_{S,*} - m_{j,*} = -2.5\lg\frac{\int\limits_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} E_{\mathrm{A0}}(\lambda)R_j(\lambda)d\lambda}{\int\limits_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} E_{\mathrm{A0}}(\lambda)S(\lambda)d\lambda} + 2.5\lg\frac{\int\limits_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} E_*(\lambda)R_j(\lambda)d\lambda}{\int\limits_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} E_*(\lambda)S(\lambda)d\lambda}. \qquad (4)$$

Для фотометрических стандартов, у которых известны распределения энергии $E_*(\lambda)$, интегралы в формулах (1), (2) и (4) считаются явно. Для них мы можем вычислить звездные величины во всех спектральных полосах R_j, фигурирующих в фотометрическом каталоге (помимо реальных фотометрических измерений, в этом каталоге содержащихся). Важное отличие фотометрических стандартов от остальных звезд в том, что по формулам (2) и (3) мы можем посчитать их звездные величины в полосе ОЭП – S.

Если фотометрических стандартов достаточно много, то мы можем попытаться по ним аппроксимировать зависимость (4). Встает вопрос о классе функций, который следует использовать для проведения этой аппроксимации. Теоретически вопрос об "идеальной аппроксимационной функции" очень сложен, но для практического решения задач нужна не идеальная, а хорошая

аппроксимация. Указание же на выбор такой функции (достаточно хорошей для проведения аппроксимации) получить довольно легко, поскольку многие двуцветные диаграммы показателей цвета звезд хорошо описываются полиномами с небольшими степенями. Обычно нас этот выбор вполне удовлетворяет.

Таким образом, мы будем искать аппроксимацию зависимости (4) для фотометрических стандартов в виде

$$m_{S,*} - m_{j,*} = P\left(CI_{*,1},...,CI_{*,N}\right), \quad (5)$$

где P – многомерный полином, аргументами которого являются показатели цвета звезд CI_n, равные разностям звездных величин звезды в парах различных фотометрических полос из набора R_j при всех возможных сочетаниях полос (см. формулу (6) ниже).

Степень аппроксимирующего полинома P определяется в ходе определения его коэффициентов, но она не должна быть очень высокой (3, в крайнем случае, 5).

Аргументами этого полинома могут быть любые показатели цвета, построенные для фотометрических полос каталога R_j:

$$CI_{*,n} = m_* \left(R_j\right) - m_* \left(R_k\right). \quad (6)$$

Полосы не должны совпадать ($j \neq k$), а из двух симметричных показателей цвета, отличающихся только знаком, $m_* \left(R_j\right) - m_* \left(R_k\right)$ и $m_* \left(R_k\right) - m_* \left(R_j\right)$, надо оставить только один, из любых соображений. Если в наборе R_j содержится J фотометрических полос, то, с учетом приведенных соображений, различных показателей цвета можно построить $(J-1)(J-2)/2$, но независимыми из них будут только $J-1$. Это и есть максимальное число аргументов полинома P, т.е. его размерность по числу аргументов.

Последнее замечание к формуле (5). Звездная величина в полосе ОЭП вычисляется как показатель цвета относительно j-й фотометрической полосы R_j. Для разных звезд каталога можно использовать разные показатели цвета, но гораздо удобнее для всех звезд обрабатываемого списка использовать одну и ту же опорную фотометрическую полосу, например, первую, $j = 1$, или самую популярную и самую точную при редукции за атмосферу – полосу V фотометрической системы Джонсона. Будем обозначать номер выбранной нами единой для всех звезд опорной фотометрической полосы $j = l$.

Теперь для всех звезд списка, не являющихся фотометрическими стандартами, вычисляем их величины $m_{S,*}$ в полосе ОЭП по формуле (5).

Коснемся вопроса оценки точности полученных результатов. Зная число квантов излучения, зарегистрированных при проведении фотометрии, можно оценить случайную погрешность измерения, которая является оценкой снизу для полной ошибки, включающей систематическую составляющую. Если в каталоге имеется несколько измерений одной и той же звезды, выполненных в разное время, в разных местах и на разной аппаратуре, то мы получаем другой инструмент для оценки ошибки фотометрии. (Если мы уверены, что звезда не является переменной, то ее наблюдения можно усреднить, чтобы повысить точность.) Эти два способа оценки применимы для всех звезд из обрабатываемого списка, поскольку для них нужны только результаты фотометрических измерений. Для фотометрических стандартов, если они являются реальными звездами, а не средними или синтетическими спектрами, можно сделать еще две проверки. Во-первых, можно провести сравнение вычисленных по спектру, по формуле (1), звездных величин с реальными фотометрическими измерениями. Это позволяет оценить точность спектральных распределений фотометрических стандартов. Во-вторых, можно провести сравнение звездных величин, вычисленных по аппроксимационному полиному, с реальными наблюдениями. Это определяет точность рассматриваемого метода.

2.3. Звезды с неполным набором фотометрии

Реальная процедура выглядит несколько сложнее. Это связано с тем, что не для всех звезд в имеющемся у нас фотометрическом каталоге присутствуют измерения блеска для всех фотометрических полос R_j. Пусть, например, этот набор содержит J фотометрических полос, по которым можно построить $J-1$ независимых показателей цвета. Можно ожидать, что такой же должна быть и размерность полинома P: $\dim(P) = J-1$. Это наиболее полный полином (самой большой возможной размерности).

Однако для звезд, у которых один или несколько показателей цвета отсутствуют, проводить вычисление звездной величины $m_{S,*}$ по этому полиному невозможно. Такие звезды нужно объединить в группы, в которых у всех звезд есть определенный набор показателей цвета (некоторые звезды из этой группы могут иметь “лишние” показатели цвета, которых нет у всех звезд группы). Для фотометрического каталога с $J-1$ показателями цвета (т.е. с J фотометрическими полосами R_j) группы начинаются с “одноцветных”, число которых равно числу показателей цвета каталога $J-1$, затем идут “двуцветные”, звезды в которых содержат два различных показателя цвета (порядок их следования не важен), всего “дву-

цветных" групп будет $(J-1)(J-2)/2$, затем идут группы с большим числом показателей цвета вплоть до максимальной, в которой звезды обладают всеми $J-1$ показателями цвета. Всего различных групп будет $2^{J-1}-1$. Из всех возможных групп выбираем наиболее многочисленные, а при близком числе звезд в группах – те из них, у которых больше число показателей цвета. Вполне может случиться так, что число звезд, у которых есть измерения во всех J фотометрических полосах, может быть настолько невелико, что использование этой группы будет малоинтересно. Для каждой из отобранных звезд строится свой аппроксимационный полином. Размерность этих полиномов равна числу показателей цвета в соответствующей группе. Эта процедура возможна, поскольку фотометрические стандарты обладают всеми показателями цвета и, соответственно, входят во все возможные группы звезд.

В разделе 3 мы рассмотрим пример проведения подобной процедуры, а затем дадим к нему дополнительные комментарии.

2.4. Звездные величины, заданные в системе "AB"

В настоящее время все шире используется система звездных величин AB [5], в которой звезды вместо спектра "Веги" калибруются по гипотетическому эталонному спектру, имеющему постоянный поток в единичном частотном интервале. Нуль-пункт для звездных величин AB определяется таким образом, чтобы освещенности от звезд в системе AB и в системе с калибровкой по Веге были приблизительно равны в полосе фильтра V.

Звездные величины в калибровке AB содержатся в таких популярных каталогах, как SDSS [6] и PanSTARRS [7]. В обоих каталогах используется фотометрическая система ugriz.

В этом случае формулы (1) и (2) принимают вид

$$m^{\mathrm{AB}}_{S,*} = -2.5\lg\frac{\int\limits_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} E_*(\lambda)S(\lambda)d\lambda}{\int\limits_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} (3631\ \mathrm{Jy})S(\nu)d\lambda},$$
$$m^{\mathrm{AB}}_{j,*} = -2.5\lg\frac{\int\limits_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} E_*(\lambda)R_j(\lambda)d\lambda}{\int\limits_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} (3631\ \mathrm{Jy})R_j(\nu)d\lambda}. \qquad (7)$$

2.5. Редукция наземных наблюдений "за атмосферу"

Поглощение в атмосфере зависит от длины волны, в которой ведутся наблюдения, и от воздушной массы атмосферы на луче зрения M_Z. Последняя величина зависит в первую очередь от зенитного расстояния z, на котором наблюдается звезда:

$$M_Z \approx \sec z. \qquad (8)$$

Стандартный закон атмосферного поглощения выражается функцией

$$P_{\mathrm{st}}(\lambda, z) = p_{\mathrm{st}}^{M_z}(\lambda), \qquad (9)$$

где P_{st} – стандартное поглощение атмосферы на зенитном расстоянии – z, p_{st} – стандартное поглощение атмосферы в зените (т.е. при $z=0$). Стандартное поглощение зависит от температуры воздуха, меняется от сезона к сезону, может меняться от ночи к ночи, конечно, зависит от географического положения обсерватории, от ее высоты над уровнем моря и т.д. Закону стандартного поглощения посвящено большое число работ, см., например, [8–10] и ссылки в них.

При наблюдении с Земли регистрируемый сигнал от звезды вместо формул (1) и (2) будет описываться соотношениями

$$m'_{j,*} - m'_{j,\mathrm{A0}} = -2.5\lg\frac{\int\limits_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} E_*(\lambda)R_j(\lambda)p_{st}^{M_Z}(\lambda)d\lambda}{\int\limits_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} E_{\mathrm{A0}}(\lambda)R_j(\lambda)p_{st}^{M_Z}(\lambda)d\lambda},$$
$$m'_{S,*} - m'_{S,\mathrm{A0}*} = -2.5\lg\frac{\int\limits_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} E_*(\lambda)S(\lambda)p_{st}^{M_Z}(\lambda)d\lambda}{\int\limits_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} E_{\mathrm{A0}}(\lambda)S(\lambda)p_{st}^{M_Z}(\lambda)d\lambda}. \qquad (10)$$

Штрих над буквой m в формуле (11) говорит о том, что это "податмосферная" звездная величина.

Более подробно о деталях редукции атмосферного поглощения в оптическом диапазоне можно прочитать в работе [11], посвященной повторной обработке Тянь-Шаньского WBVR-каталога ГАИШ [12].

3. ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕЛИЧИН ЗВЕЗД В ПАНХРОМАТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЕ

Рассмотрим реальный пример создания фотометрического каталога звезд в широкой панхроматической полосе S матричного ПЗС-приемника излучения с обратной засветкой. Создаваемый каталог должен содержать все звезды неба, которые в этой полосе имеют блеск $S < 7.0^{\mathrm{m}}$. Полоса S, для которой рассчитывался каталог, близка к полосе чувствительности матрицы e2v CCD47-20BI NIMO с просветлением, оптимизированным на середину видимого диапазона ("Midband

Coated”) [13]. В фотометрическом каталоге звезд содержались величины в спектральных полосах B_T и V_T из каталога Tycho-2 [14] в видимом диапазоне и величины в спектральных полосах J, H, K (расширенная на инфракрасный диапазон фотометрическая система Джонсона [4]) из каталога 2MASS [15]. Все эти фотометрические полосы показаны на рис. 1. В исходный каталог входили различные звезды, наиболее яркие в полосе V_T, а также звезды, яркие в ближней инфракрасной области. (Для части этих звезд после проведения расчетов оказалось $S > 7.0^m$. Такие звезды были исключены из списка.)

В качестве спектров “фотометрических стандартов” в этом примере использовались средние Вильнюсские спектры [16–18]. В этих работах было опубликовано 49 средних спектров звезд различных спектральных классов и классов светимостей (на момент написания этих работ были измерены спектры примерно 1400 индивидуальных звезд [17], которые использовались для усреднения). Все спектры были приведены к нулевому межзвездному поглощению (“отбелены”) [17]. К ним были добавлены покрасненные спектры от $A_V = 0^m$ до $A_V = 3.3^m$ со случайным шагом. Для покраснения спектров звезд использовался закон межзвездного покраснения из работы [19].

Каталоги Tycho-2 и 2MASS откалиброваны по Веге, поэтому при вычислениях использовались формулы (1–7).

Редукция звездных величин за атмосферу не проводилась. Для каталога Tycho-2 она не требуется, поскольку звездные величины B_T и V_T получены с борта космического аппарата Hipparcos и исходно являются внеатмосферными. В пояснительном дополнении к каталогу 2MASS [20] содержатся графики зависимости поглощения света от воздушной массы (поглощение парами воды – основной источник поглощения в атмосфере в этих полосах) в каждой из трех фотометрических полос каталога, и поясняется, что достоверно учесть поглощение на различных воздушных массах оказалось трудноразрешимой задачей. Следу-

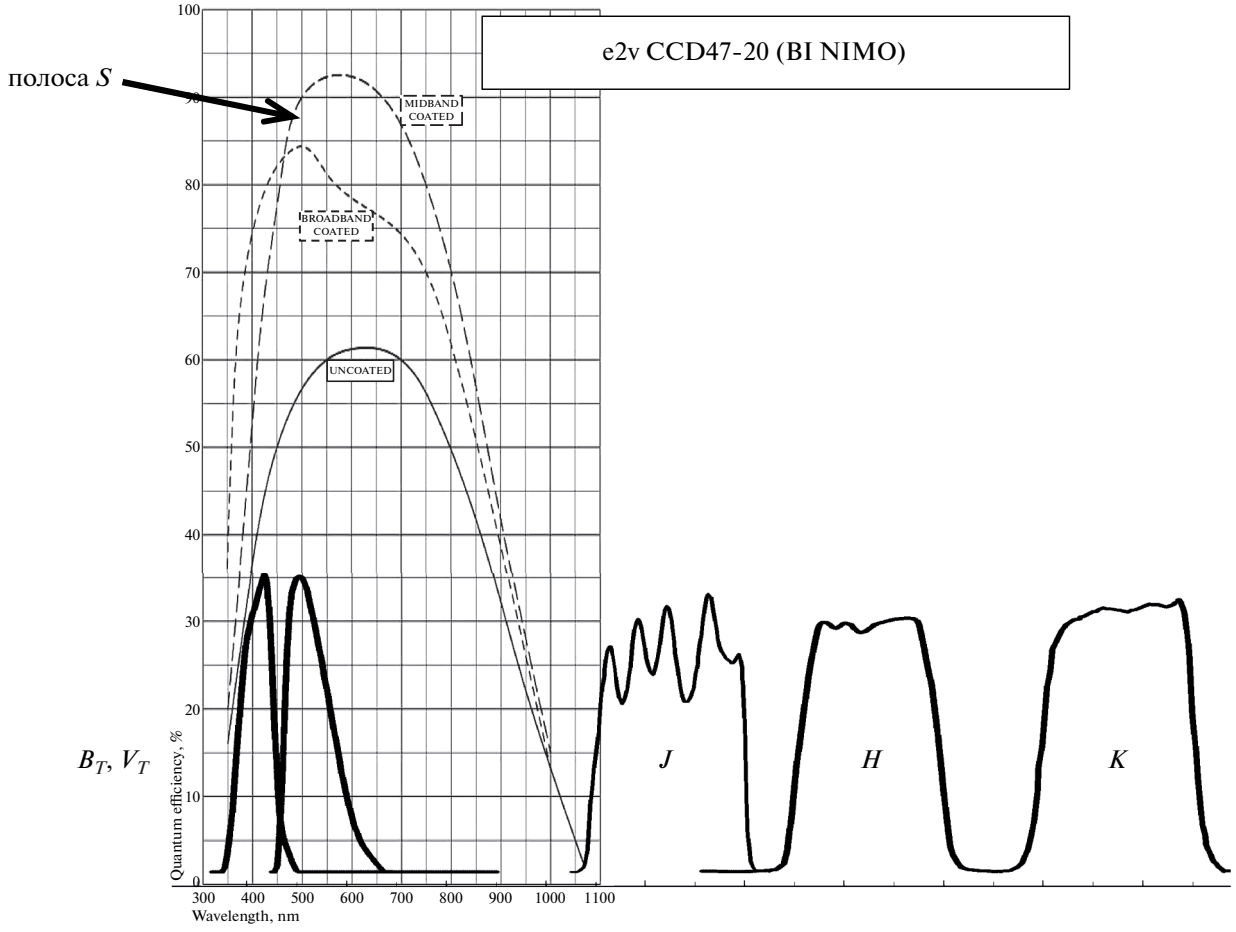


Рис. 1. Кривые спектральной чувствительности для панхроматической полосы S и для пяти полос фотометрического каталога звезд: B_T, V_T, J, H и K.

Таблица 1. Характеристики групп звезд из рассматриваемого примера

№ п/п	dim(P)	Формула (5)
1	3	$m_{S,1} - V_T = P_1(B_T - V_T, V_T - J, V_T - K) + C_1$
2	2	$m_{S,2} - V_T = P_2(B_T - J, V_T - J) + C_2$
3	2	$m_{S,3} - V_T = P_3(B_T - H, V_T - H) + C_3$
4	2	$m_{S,4} - V_T = P_4(B_T - K, V_T - K) + C_4$
5	2	$m_{S,4} - V_T = P_4(V_T - J, V_T - K) + C_4$
6	1	$m_{S,5} - V_T = P_5(V_T - J) + C_5$

ет заметить, что в полосах 2MASS атмосферное поглощение ниже, чем в видимом диапазоне.

Пять фотометрических полос входного каталога позволяют составить четыре независимых показателя цвета. Звезды входного списка можно разделить на 15 групп по наличию у них различных показателей цвета (см. подраздел 2.3). Но самыми многочисленными из них оказались 6 групп, приведенных в табл. 1. Для этих групп были построены аппроксимационные полиномы $P_1,\ldots,P_6$, аргументы которых также приведены в табл. 1. Степени полиномов по каждой переменной не превышали 3.

Для нахождения коэффициентов полиномов использовалась устойчивая процедура МНК, использующая сингулярное разложение матрицы плана [21]. При проведении МНК использовалась дополнительная процедура регуляризации, при которой малозначимые коэффициенты полинома обнулялись: такими считались коэффициенты, сингулярные числа которых составляли менее 10^{-4} от максимального сингулярного числа матрицы плана. Подробнее процедура регуляризации описана в [22, 23].

Далее для каждой звезды вычислялись показатели цвета, фигурирующие среди аргументов полиномов (см. табл. 1). У звезды с неполным набором фотометрии не все эти индексы будут существовать. Далее, в порядке возрастания порядковых номеров полиномов в табл. 1, мы сравниваем получившийся набор показателей цвета звезды с набором аргументов соответствующего полинома. Первое же найденное совпадение используется для расчета звездной величины звезды m_S в панхроматической полосе S.

Из получившегося выходного каталога были исключены звезды с $S > 7.0^{\mathrm{m}}$. После этого была пересчитана численность групп звезд, для которых строились аппроксимационные полиномы (см. табл. 1). Мы были готовы изменить состав групп и провести повторное построение полиномов, если бы численность групп сильно изменилась, но этого не понадобилось.

4. ПЕРЕВОД ЗВЕЗДНЫХ ВЕЛИЧИН ИЗ ОДНОЙ МНОГОЦВЕТНОЙ ФОТОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ДРУГУЮ

4.1. Отличия в постановке задачи и исходных данных

Рассмотрим две достаточно близкие фотометрические системы. В качестве примера здесь и ниже мы будем использовать 5-цветную систему Джонсона (полосы UBVRI) и систему u'g'r'i'z' (далее штрихи при обозначении полос этой системы мы будем опускать). Обе эти системы рассчитаны на видимый диапазон, который они охватывают полностью, немного заходя в близкий УФ диапазон и ближний ИК (см. рис. 2). У нас есть фотометрические наблюдения некоторого набора непеременных звезд в одной из этих систем, нам надо перевести их в другую, т.е. вычислить блеск этих звезд в полосах другой фотометрической системы. Для конкретности будем рассматривать перевод из исходной системы ugriz в конечную UBVRI.

Мы можем свести эту задачу к предыдущей – решать ее независимо для каждой полосы конечной системы (т.е. для полос U, B, V, R и I) методом, описанным в разделах 2 и 3. Заметим, что в этих разделах мы везде упоминали, что конечная полоса S является панхроматической. Это соответствует и рассмотренному в разделе 3 примеру, и сложившейся практике создания каталогов звезд для ОЭП. Однако нигде в разделах 2 и 3 не использовалось условие существенно большей ширины конечной спектральной полосы по сравнению с фотометрическими полосами исходного каталога. И это действительно так – описанная в разделах 2 и 3 методика применима не только к панхроматическим полосам, но и к полосам с шириной, типичной для широкополосной астрономической фотометрии звезд ($\Delta\lambda/\lambda \sim 10\%$).

Однако задача в такой постановке предоставляет нам дополнительные возможности. Если при создании каталога звезд для ОЭП наблюдения в его фотометрической полосе S всегда отсутствуют, то в рассматриваемом случае ситуация обычно другая: чаще всего нужен не просто перевод из исходной фотометрической системы в конечную, а слияние двух каталогов – вычисление звездных величин UBVRI по величинам ugriz и включение их в уже имеющийся конечный фотометрический UBVRI-каталог. При этом часть звезд исходного каталога в конечном каталоге отсутствует, а для другой части его звезд в конечном каталоге есть прямые наблюдения этих же звезд (по крайней мере, в некоторых фотометрических

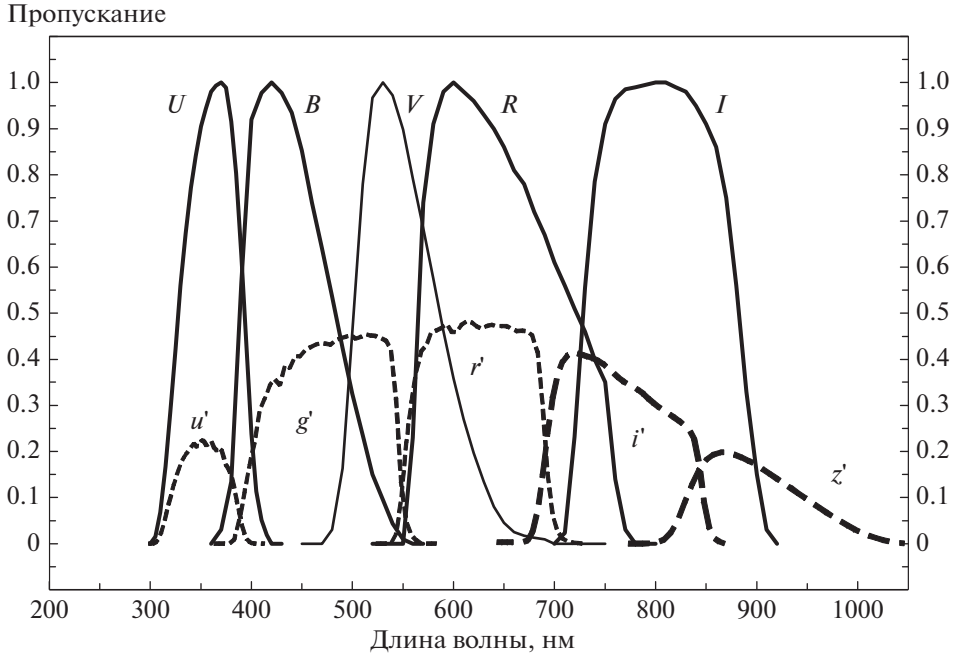


Рис. 2. Кривые пропускания фотометрических полос систем UBVRI Джонсона и ugriz. Для наглядности кривые пропускания приведены в разных нормировках. Каждая кривая системы Джонсона нормирована на единицу в максимуме пропускания, кривые системы ugriz приведены в абсолютной энергетической нормировке.

полосах UBVRI). Последняя группа звезд позволяет нам оценить погрешности проводимой процедуры. Для звезд, которые присутствуют в обоих каталогах, мы с помощью аппроксимационных полиномов P по показателям цвета звезд в исходной фотометрической системе ugriz вычисляем их звездные величины в (некоторых) полосах конечной системы UBVRI. Затем мы сравниваем полученные значения с прямыми наблюдениями в этих полосах и получаем оценки погрешностей нашей процедуры.

4.2. Решение задачи без использования спектров звезд

Реально ситуация еще богаче. Если звезд, входящих в оба каталога, достаточно много, мы можем отказаться от использования спектральных распределений энергии для звезд-фотометрических стандартов, а работать только по фотометрическим данным.

В этом случае процедура слияния каталога UBVRI с каталогом ugriz будет состоять из следующих шагов.

1. Среди звезд, входящих в оба каталога, выделяем группы звезд по наличию у них различных наборов показателей цвета, построенных только из цветов исходного каталога ugriz. Процедура полностью аналогична описанной в подразделе 2.3.

2. Из построенных групп звезд оставляем только достаточно многочисленные.

3. Выбираем одну из оставшихся групп.

3.1. Составляем аппроксимационный полином в соответствии с набором показателей цвета исходного каталога у выбранной группы звезд. (Коэффициенты полинома пока не определены.)

3.2. Выбираем одну из фотометрических полос конечной системы UBVRI.

3.2.1. Оставляем в группе только звезды, у которых есть наблюдения в этой полосе в конечном каталоге.

3.2.2. Проверяем, достаточно ли число звезд, оставшихся в группе, для проведения аппроксимации. (Если нет – возвращаемся к шагу 3.2, выбирая другую полосу.)

3.2.3. Методом наименьших квадратов или наибольшего правдоподобия определяем набор коэффициентов полинома, при котором между значениями полиномов и прямыми наблюдениями звезды в выбранной полосе невязка минимальна для всего набора звезд, оставшихся в группе. (Желательно использовать устойчивые методы.)

3.2.4. Сохраняем (запоминаем) коэффициенты полинома и невязку.

3.2.5. Берем следующую фотометрическую полосу конечной системы UBVRI.

3.2.6. Возвращаемся к шагу 3.2.

3.3. Выбираем следующую группу.

3.4. Возвращаемся к шагу 3.

4. Для каждой полосы конечной системы UBVRI упорядочиваем полиномы, вычисляющие звездные величины в этой полосе, по размерности (по числу используемых показателей цвета).

5. Для всех звезд, у которых отсутствуют измерения в какой-либо полосе конечной фотометрической системы, вычисляем эти значения по полиному с максимально возможной размерностью.

6. Включаем вычисленную звездную величину в конечный каталог.

5. ИСТОЧНИКИ СПЕКТРОВ ДЛЯ ФОТОМЕТРИЧЕСКИХ СТАНДАРТОВ

Вопрос источников спектров для фотометрических стандартов заслуживает отдельного обсуждения. Таких источников несколько: это средние спектры звезд, синтетические спектры, наблюдения индивидуальных звезд и массовые спектральные обзоры неба. Обсудим каждый из этих источников.

5.1. Средние спектры звезд

Для создания средних спектров нужны достаточно многочисленные индивидуальные спектральные наблюдения звезд. Эти звезды классифицируются в соответствии со спектральной классификацией [24]. Пекулярные объекты отбрасываются, а оставшиеся звезды группируются по спектральным классам и классам светимости. Затем необходимо привести спектры к одинаковому значению межзвездного поглощения – обычно к нулевому (т.е. “отбелить” спектры). После этого спектры звезд внутри каждой группы усредняются.

Построение средних спектров – очень кропотливая процедура. Для нее нужно, чтобы индивидуальные спектры звезд перекрывали один и тот же спектральный интервал и были построены с примерно одинаковым шагом.

Одними из первых работ были уже упомянутые выше работы Вильнюсской группы [16–18]. Аналогичные работы были выполнены Пиклсом [25, 26]. Был ряд других подобных работ, последняя из которых вышла примерно в 2000 г.

5.2. Синтетические спектры звезд

Расчеты синтетических спектров основаны на различных программах моделирования переноса излучения в звездных атмосферах, например, на коде Куруца [27]. Такой подход позволяет рассчитывать спектры для сотен тысяч сочетаний эффективной температуры, ускорения силы тяжести на уровне фотосферы, химического состава и ряда других параметров звезд. При этом расчеты могут проводиться в очень широком интервале длин волн и практически для любого спектрального разрешения. Только за последнее десятилетие опубликованы библиотеки синтетических спектров POLLUX [28], Stagger-grid [29], INTRIGOSS [30], PHOENIX [31] и др. К сожалению, несмотря на огромные успехи в синтезе спектров звезд в последние десятилетия спектры многих реальных звезд заметно отклоняются от синтетических.

При построении синтетических спектров межзвездное поглощение не учитывается.

5.3. Реальные спектральные измерения звезд

На сегодняшний день число спектров звезд с необходимым для нашей задачи разрешением и с высоким отношением сигнала к шуму, полученных астрономами, вероятно, приближается к миллиону. Их использование затруднено разнородностью представления материала и разрозненностью хранения.

5.4. Массовые спектральные обзоры неба

Этот источник данных представляется очень перспективным. Примером подобного обзора является проект LAMOST [32]. За 10 лет работы этого телескопа получено более 11.2 млн. спектров низкого разрешения и почти 30 млн. среднего разрешения (DR9 V1.0). Последний публичный релиз (LAMOST DR8 V2.0) содержит более 10.6 млн спектров низкого разрешения и более 22 млн среднего [32].

6. ОБСУЖДЕНИЕ

6.1. Основные внешние источники ошибок

6.1.1. Что такое внешние ошибки. Описанный нами метод определения блеска звезд в произвольной фотометрической полосе по их многоцветной фотометрии в других полосах основан на предположении, что фотометрические и спектральные параметры звезд меняются не произвольно, а взаимно зависимы – в многомерном пространстве фотометрических параметров (ПФП) звезды выстраиваются вдоль некоторых линий или поверхностей. Это предположение подтверждается наблюдениями – достаточно взглянуть на диаграмму Герцшпрунга–Рассела или на любую двуцветную диаграмму.

Если какая-либо причина изменяет положение звезды в ПФП, мы считаем ее внешней ошибкой. Таких причин немного, рассмотрим их ниже.

Звезды с существенными внешними ошибками надо исключать из исходного каталога.

6.1.2. Ошибки отождествления звезд из разных фотометрических каталогов. Если данные исходного каталога взяты из нескольких разных фотометрических каталогов (в примере, рассмотренном в разделе 3, из Tycho-2 и 2MASS), то возникает задача взаимного отождествления фигурирующих в них звезд. При ее решении неизбежно возникают ошибки – неверные отождествления. У неверно отождествленной пары объектов набор фотометрических характеристик может очень сильно отличаться от зависимости для реальных звезд.

6.1.3. Двойные и кратные звезды. Если компоненты двойной звезды заметно различаются по спектру (по эффективной температуре) и при этом сравнимы по блеску (разница не более нескольких звездных величин), то их суммарный спектр и, соответственно, набор фотометрических характеристик может быть не похож ни на одну реальную звезду.

То же относится и к кратным звездам.

6.1.4. Переменные звезды. Ситуация с переменным звездами несколько более сложная. В отношении нашей задачи переменные звезды можно разделить на три группы. К первой из них относятся звезды, на поверхности которых есть участки с существенно различающейся температурой. Такими звездами являются двойные с сильным эффектом отражения, например, HZ Her, или "пятнистые" вращающиеся переменные типа BY Dra. Спектр и набор показателей цвета у таких переменных может очень сильно отличаться от нормальных звезд – как у рассмотренных выше двойных.

Вторая группа – это переменные звезды, у которых эффективная температура меняется со временем, но в любой момент одинакова на всей их поверхности. К этой группе относятся пульсирующие переменные. В этом случае наш метод будет работать, но при условии, что их наблюдения в исходном каталоге выполнены (квази)одновременно. В этом случае для каждого набора одновременных измерений в исходном каталоге мы сможем определить звездную величину в выходной фотометрической полосе, которая будет меняться от измерения к измерению.

К третьей группе относятся широкие затменные переменные звезды. Эффекты отражения и эллипсоидальности малы, следовательно, компоненты затменной системы имеют разные, но постоянные по поверхности температуры. Вне затмений такие системы не отличаются от неразрешенных двойных звезд (см. выше), их блеск не меняется. В моменты затмений спектр и показатели цвета системы меняются, т.к. меняется видимая площадь компонентов.

Компиляция фотометрических измерений переменных звезд, выполненных в разное время, недопустима.

6.1.5. Пекулярные звезды. Спектры некоторых звезд отличаются от спектров, которые ожидались бы для них, в соответствии с их температурой и светимостью. Такие звезды называют пекулярными. Описанный метод не обеспечивает корректное вычисление их блеска в выходных полосах. Пекулярные звезды необходимо исключать из исходного каталога.

6.2. Собственные ошибки метода

Согласно принятой спектральной классификации звезд [24] основным параметром, от которого зависят фотометрические характеристики звезды, является эффективная температура фотосферы $T_{\rm eff}$, связанная со спектральным классом звезды. Эффективная температура меняется непрерывно, в результате чего показатели цвета звезд, различающихся только по температуре, оказываются расположенными вдоль некоторой линии в ПФП.

Вторым параметром в этой классификации является класс светимости. Этот параметр дискретный и принимает значения от I до VI (класс светимости может разделяться на подклассы). Этот параметр связан с ускорением силы тяжести на поверхности звезды g (обычно используют $\lg g$). Звездам одного и того же спектрального класса, но разных классов светимости соответствуют различные значения $\lg g$. Следует заметить, что модели звездных атмосфер позволяют рассчитывать спектры звезд для любых сочетаний $T_{\rm eff}$, $\lg g$ и других параметров, но в действительности классы светимости достаточно хорошо разделяются, т.е. распределение звезд по $\log g$ не является равномерным. Это объясняется тем, что в ходе эволюции звезд от начальной главной последовательности реализуются не все возможные сочетания их параметров.

Таким образом, учет распределения звезд по двум основным параметрам приводит к тому, что показатели цвета звезд разных классов светимости оказываются расположенными вдоль нескольких линий в ПФП (каждый класс – вдоль своей линии). Точнее это будут не линии, а двумерные полосы конечной ширины ("ленточки"). Ширина полосы зависит от интервала значений $\lg g$, относящихся к соответствующему классу светимости, она зависит от $T_{\rm eff}$. Полосы всех спектральных классов лежат на общей двумерной поверхности в ПФП, описывающей зависимость показателей цвета от $T_{\rm eff}$ и $\lg g$ при произвольных значениях этих параметров.

Ошибки фотометрических измерений и “тонкие” параметры звезд, оказывающие незначительное влияние на их спектры и показатели цвета (турбулентность, скорость вращения и наклон оси вращения к линии визирования, магнитное поле и т.п.), приводят к тому, что звезды в ПФП будут лежать не точно на полосах классов светимости, а в их окрестностях.

Изменения еще двух параметров могут вызывать значительные изменения спектров и показателей цвета звезд и не могут быть отнесены к “тонким”. Первый их них – содержание металлов в звезде – обычно задается относительным содержанием железа [Fe/H], которое равно разности логарифмов отношения концентрации атомов железа к атомам водорода в звезде и в Солнце. Второй – межзвездное поглощение A_V, которое зависит от количества вещества на луче зрения между наблюдателем и звездой. Межзвездное поглощение зависит от длины волны, т.е. приводит к изменению показателей цвета звезд (к ее покраснению). Каждый из этих параметров имеет свои ограничения. Так, разброс обилия тяжелых элементов в звездах с общим происхождением обычно невелик. [Fe/H] в шаровых скоплениях намного меньше, чем в диске Галактики, но в каждом из этих объектов его разброс не превышает ±0.5. Межзвездное поглощение может быть очень велико, однако закон нормального поглощения близок к степенной зависимости от длины волны, поэтому можно попытаться найти комбинацию показателей цвета, на которую параметр A_V не влияет [33, 34]. Изменение обилия металлов и межзвездное поглощение смещают положение звезды в ПФП каждый в определенном направлении, величина смещения зависит от [Fe/H] и A_V. Таким образом, полосы классов светимости превращаются в многомерные параллелепипеды.

Встает вопрос о том, будет ли работать рассмотренный выше метод расчета в общем случае и как уменьшить его погрешность.

Один способ снижения погрешности достаточно понятен. Звезды образуют в ПФП гиперповерхность меньшей размерности. Точность результатов будет тем выше, чем больше размерность ПФП. Из приведенных выше рассуждений понятно, что размерность этой гиперповерхности лежит в интервале от 2 до 4, она зависит от набора звезд, входящего в исходный каталог, и мы не можем на него повлиять. Однако можно увеличить размерность ПФП, добавив в исходный каталог дополнительные фотометрические полосы. При этом добавляемые полосы должны быть реально независимы от уже имеющихся в каталоге. Для этого полосы близкой ширины не должны сильно перекрываться, но возможно включение более узких полос, охватывающих определенные спектральные линии или скачки. Строгую проверку независимости полос фотометрической системы можно провести, проанализировав исходный каталог методом главных компонентов [35, 36] или подсчитав количество значимых сингулярных чисел его SVD разложения [22].

Рассмотрим ситуацию с малым разбросом [Fe/H] и A_V. Если мы будем обрабатывать исходный каталог или набор фотометрических стандартов как единый массив данных, смогут ли аппроксимационные полиномы охватить все полосы классов светимости? Эту проблему можно решить двумя способами – оба они еще не применялись, и их эффективность требует исследования. Первый способ – независимая обработка каждого класса светимости звезд. В этом случае снимается вопрос об охвате всех полос, но снижается число объектов, по которым строится полином. Пока неясно, как это скажется на погрешности метода.

Второй способ – включение в ПФП и в аргументы полиномов $\log g$. Эти данные сегодня известны для многих звезд, например, в каталоге Starhorse 2021 [37] содержатся значения параметров звезд, включая $\lg g$, для 362 млн. объектов. Также $\log g$ должно быть известно для фотометрических стандартов, если они используются.

Однако то, что полосы классов светимости, вероятно, лежат на общей непрерывной (а скорее, на гладкой в математическом смысле) поверхности, указывает, что предложенный нами метод полиномиальной аппроксимации будет работать для всего исходного каталога в целом. Пример, приведенный в разделе 3, это подтверждает. Остается вопрос об оптимальности применения именно полиномов для аппроксимации, но его проще перенести в практическую плоскость, чем решать теоретически.

При большом разбросе обилия металлов в звездах исходного каталога можно включить параметр [Fe/H] в ПФП и в аргументы полиномов. Значения этого параметра также известны для многих звезд, в частности для 362 млн. объектов каталога [37].

Последнее, что осталось обсудить, это учет межзвездного поглощения. Если мы строим аппроксимационные полиномы по синтетическим или средним спектрам, у которых $A_V = 0$, то из каждого такого спектра мы можем создать серию покрасненных спектров с любыми значениями A_V, и использовать их при построении полиномов.

Если мы используем реальные спектры для фотометрических стандартов, то мы также можем выполнять процедуру покраснения (для увеличения A_V) или “поголубения” (для уменьшения A_V). Если же мы работаем только с фотометрией, изменение звездных величин осуществляется по формулам (11), в которых закон атмосферного

поглощения заменен на межзвездное поглощение. В обоих случаях желательно знать исходные значения A_V для звезд входного каталога и фотометрических стандартов.

Сегодня такие источники есть, например, тот же каталог [37]. Если A_V имеется для многих звезд исходного каталога, то этот параметр можно включить в ПФП и добавить к аргументам полиномов, но необходимость такого действия не ясна.

Поскольку можно создать произвольное число по-разному покрасненных спектров, встает вопрос об их оптимальном количестве и распределении по A_V. Ясно, что при небольшом числе фотометрических стандартов или при использовании в них спектров с нулевым A_V, добавление покрасненных спектров повышает качество аппроксимационного полинома, но этот процесс должен быстро выходить на насыщение. Более того, использование спектров с большими покраснениями, превышающими A_V звезд исходного каталога, может ухудшить полиномы. Этот вопрос, а также оптимальное количество добавляемых покрасненных спектров требуют дополнительного исследования.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача о вычислении звездных величин некоторой достаточно многочисленной группы звезд в некоторых, в общем случае произвольно заданных фотометрических полосах, по фотометрических измерениям этих звезд (фотометрическому каталогу) в нескольких других фотометрических полосах, например, в стандартных астрономических фотометрических системах UBVR Джонсона и ugriz.

При решении этой задачи возможны два случая. Первый – когда прямые наблюдения в выходных фотометрических полосах полностью отсутствуют. Такие ситуации типичны для создания каталогов звезд для приборов ориентации и навигации в космосе. Для решения этой задачи у некоторой небольшой части обрабатываемых звезд должны быть известны спектры в диапазоне, перекрывающем полосы чувствительности всех фотометрических полос, как выходных, так и полос входного астрономического фотометрического каталога. Такие звезды являются фотометрическими стандартами.

Во втором случае непосредственные фотометрические измерения звезд есть как во входных, так и в выходных полосах. В этом случае задача сводится к слиянию фотометрических каталогов или сравнению полученных в них наблюдений. Ее решение можно свести к первому рассмотренному случаю для каждой из выходных фотометрических полос. Однако при наличии достаточно большого количества звезд, присутствующих *одновременно* во входных и выходных фотометрических полосах, возможно решение этой задачи без использования спектров фотометрических стандартов.

В обоих случаях задача решается путем построения набора многомерных аппроксимационных полиномов по показателям цвета звезд. Практическое использование описанного в статье метода показало его хорошую среднюю точность при малой доле аномальных (“отскакивающих”) звезд.

Исходное применение метода рассчитано на одиночные непеременные звезды, однако он вполне пригоден к тем двойным системам и тем переменным звездам, у которых нет большого различия эффективных температур в разных точках поверхности звезды или между компонентами двойной звезды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *О. Ю. Малков*, Астрон. журн. **92**, 890 (2018).
2. *H. L. Johnson and W. W. Morgan*, Astrophys. J. **117**, 313 (1953).
3. *J. A. Smith, D. L. Tucker, S. Kent, M. W. Richmond, M. Fukugita, T. Ichikawa, S. Ichikawa, A. M. Jorgensen, A. Uomoto, J. E. Gunn, M. Hamabe, M. Watanabe, A. Tolea, and A. Henden, J. Annis*, Astron. J. **123**, 2121 (2002).
4. *M. S. Bessel*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **43**, 291 (2005).
5. *J. B. Oke and J. E. Gunn*, Astrophys. J. **266**, 713 (1983).
6. *M. Fukugita, T. Ichikawa, J. E. Gunn, M. Doi, K. Shimasaku, and D. P. Schneider*, Astron. J. **111**, 1748 (1996).
7. *E. A. Magnier, E. Schlafly, D. Finkbeiner, M. Juric, et al.*, Astrophys. J. Suppl. **205**, Id. 20 (2013).
8. *C. W. Stubbs, F. W. High, M. R. George, K. L. DeRose, S. Blondin, J. L. Tonry, K. C. Chambers, B. R. Granett, D. L. Burke, and R. C. Smith*, PASP **119**, 1163 (2007).
9. *C. Buton, Y. Copin, G. Aldering, P. Antilogus, et al.*, Astron. and Astrophys. **549**, Id. A8 (2013).
10. *A. Zakharov, A. Mironov, A. Biryukov, N. Kroussanova, M. Prokhorov, G. Beskin, S. Karpov, S. Bondar, E. Ivanov, A. Perkov, and V. Sasyuk*, Acta Astron **65**, 197 (2015).
11. *А. И. Захаров, М. Е. Прохоров, А. В. Миронов, В. Г. Мошкалев, Н. Л. Крусанова, М. С. Тучин, А. В. Бирюков*, 2023 (in preparation).
12. *В. Г. Корнилов, И. М. Волков, А. И. Захаров, В. С. Козырева и др.*, Каталог WBVR величин ярких звезд Северного неба. – Труды Государственного астрономического института им. П.К. Штернберга, Т. 63. – М.: Изд. Моск. ун-та, 1981. – 400 с.
13. CCD47-20 Back Illuminated NIMO Frame-Transfer High Performance CCD Sensor / A1A-100040 V.5, Teledyne e2v (UK) Ltd 2017 // URL: https://www.teledyneimaging.com/download/559369b0-7ff8-4d9b-ad41-0951c14c3aa4/ (дата обращения 30.11.2022).

14. *E. Høg, C. Fabricius, V. V. Makarov, S. Urban, T. Corbin, G. Wycoff, U. Bastian, P. Schwekendiek, and A. Wicenec*, Astron. and Astrophys. **355**, L27 (2000).
15. *S. G. Kleinmann*, in Robotic telescopes in the 1990s, ed. *A.V. Filippenko*, ASP Conf. Ser. **34**, 203 (1992).
16. *V. Straizys and Z. Sviderskiene*, Astron. and Astrophys. 17, 312 (1972).
17. *V. Straizys and Z. Sviderskiene*, Vilnius Astronomijos Observatorijos Biuletenis, **35**, 3 (1972).
18. *Z. Sviderskiene*, Vilnius Astronomijos Observatorijos Biuletenis, **40**, 26 (1974).
19. *M. A. Fluks, B. Plez, P. S. The, D. de Winter, B. E. Westerlund, and H. C. Steenman*, Astron. Astrophys. Suppl. **105**, 311 (1994).
20. *R. M. Cutri, M. F. Skrutskie, S. Van Dyk, T. Chester, T. Evans, J. Fowler, J. Gizis, E. Howard, J. Huchra, T. Jarrett, E. L. Kopan, J. D. Kirkpatrick, R. M. Light, K. A. Marsh, H. McCallon, S. Schneider, R. Stiening, M. Sykes, M. Weinberg, W. A. Wheaton, S. Wheelock*, Pasadena: Caltech, 2001 // URL: https://www.ipac.caltech.edu/2mass/releases/second/doc/explsup.html.
21. *Дж. Голуб*, *Ч. Ван Лоун*, *Матричные вычисления* (М.: Мир, 1999).
22. *Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер*, *Машинные методы математических вычислений* (М.: Мир, 1980).
23. *D. Chicco and M. Masseroli*, IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics **12**, 837 (2015).
24. *W. W. Morgan and P. C. Keenan*, Ann. Rev. Astron. and Astrophys. **11**, 29 (1973).
25. *A. J. Pickles*, Astrophys. J. Suppl. **59**, 33 (1985).
26. *A. J. Pickles*, PASP **110**, 863 (1998).
27. *R. L. Kurucz*, Mem. Soc. Astron. It. Suppl. **8**, 14 (2005).
28. *A. Palacios M. Gebran, E. Josselin, F. Martins, B. Plez, M. Belmas, and A. Lebre*, Astron. and Astrophys. **545**, Id. A67 (2021).
29. *A. Chiavassa, L. Casagrande, R. Collet, Z. Magic, L. Bigot, F. Thevenin, and M. Asplund*, Astron. and Astrophys. **611**, Id. A11 (2018).
30. *M. Franchini, C. D. Morossi, P. Di Marcancantonio, and M. Chavez*, in Chemical and Dynamical Evolution of Galaxies, Id. 3 (2018).
31. *T.-O. Husser, S. Wende-von Berg, S. Dreizler, D. Homeier, A. Reiners, T. Barman, and P. H. Hauschildt*, Astron. and Astrophys. **553**, Id. A6 (2013).]
32. Large Sky Area Multi-Object Fibre Spectroscopic Telescope (LAMOST) / National Astronomical Observatories, China. 1905–2021. // URL: http://www.lamost.org/lmusers/ (дата обращения 30.11.2022).
33. *В. Л. Страйжис Многоцветная фотометрия звезд* (Вильнюс: “Мокслас”, 1977).
34. *V. Straižys Multicolor stellar photometry* (Tucson: Pachart Pub. House, 1992).
35. *С. А. Айвазян, В. М. Бухштабер, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности* (М.: Финансы и статистика, 1989).
36. *I. T. Jolliffe and J. Cadima*, Philos. Trans. Royal Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci. **374** (2016).
37. *F. Anders, A. Khalatyan, A. B. A. Queiroz, C. Chiappini, et al.*, Astron. and Astrophys. **658**, Id. A91 (2022).