АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2023, том 100, № 6, с. 524–534

МЕТОД КРУГЛЫХ КОЛЕЦ ГАУССА В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

© 2023 г. Б. П. Кондратьев[1,2,*], В. С. Корноухов[1]

[1] *Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга МГУ, Москва, Россия*

[2] *Главная (Пулковская) Астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия*

******E-mail: work@boris-kondratyev.ru*

Поступила в редакцию 10.03.2023 г.
После доработки 01.04.2023 г.
Принята к публикации 18.05.2023 г.

Развит расширенный подход к модели круглых колец Гаусса для изучения вековой эволюции орбит двух планет под действием взаимного гравитационного возмущения. Орбиты планет имеют малый угол взаимного наклона и представлены круглыми кольцами, на которые переносятся массы, большие полуоси и углы наклона орбит, а также орбитальные угловые моменты планет. Роль функции возмущений в задаче играет взаимная гравитационная энергия колец, которая получена в интегральном виде и в виде ряда по степеням углов наклона, коэффициенты ряда выражаются через эллиптические интегралы. Метод впервые учитывает несовпадение узлов орбит планет и разработан в двух вариантах: i) с большим, и ii) малым углом между узлами орбит. Для каждого из этих вариантов составлены и в конечном аналитическом виде решены системы из 4 дифференциальных уравнений, описывающих вековую эволюцию орбит. Доказано, что в процессе эволюции в обоих случаях угол взаимного наклона орбит остается постоянным. Вариант (i) проверен на примере Солнце–Юпитер–Сатурн, вариант (ii) тестируется на изучении эволюции орбит экзопланет Kepler-10b и Kepler-10c. Для обеих систем вычислены параметры прецессии и построены графики.

Ключевые слова: круглые кольца Гаусса, взаимная энергия, уравнения вековой эволюции, экзопланеты, двупланетная задача, прецессия и эволюция оскулирующих орбит

DOI: 10.31857/S0004629923060051, **EDN:** ZGDTCX

1. ВВЕДЕНИЕ

В небесной механике для изучения вековых возмущений орбит применяются три основных подхода.

Первый подход (аналитический) основан на разложении функции возмущений Лагранжа в ряд по малым значениям эксцентриситетов и углов наклона орбит [1, 2]. Этим методом Лаплас доказал замечательную теорему об устойчивости (в первом приближении) Солнечной Системы. Для достижения большей точности расчетов число слагаемых в разложении функции возмущений должно быть достаточно большим, что заметно повышает трудоемкость метода Лагранжа.

Второй метод (а точнее, группа методов) связан с численным интегрированием уравнений движения как для всего семейства планет Солнечной системы, так и для разных усеченных вариантов, см., например, [3]. Для эфемеридного и навигационного обеспечения было создано много специальных вычислительных алгоритмов, см. обзор [4, 5], что позволило подтвердить и уточнить выводы теории. Численные методы в сочетании с развитием компьютерных технологий позволяют проводить расчеты с любой точностью, однако не дают качественную картину явлений, так что для интерпретации результатов приходится прибегать к наглядным механическим моделям.

Третий подход основан на методах осреднения. Здесь одним из основных является метод колец Гаусса, предназначенный для изучения вековых возмущений первого порядка. Этот метод отличается наглядностью и основан на том, что возмущающее воздействие одного тела на другое при некоторых условиях эквивалентно влиянию силового поля материального гравитирующего кольца (кольца Гаусса), полученного при распределении возмущающей массы по эллиптической орбите.

В связи с открытием экзопланет, интерес к развитию методов, связанных с кольцами Гаусса, заметно оживился. Пространственный потенциал кольца Гаусса новым способом был получен в [6]. На базе эллиптических колец создан общий метод изучения долгопериодических и вековых возмущений в задачах небесной механики [7]. Есть еще два метода, в основе которых лежит идея усреднения по быстрым переменным прецессирующего эллиптического Гауссова кольца. В од-

ном из них усреднение прецессии кольца по вращению линии апсид дает модель круглого двумерного диска (R-кольцо) [8], а дополнительное усреднение по движению узлов кольца Гаусса дает модель 3D R-тороида [9]. Напомним, что R-кольца образуются из прецессирующих эллиптических орбит, в фокусе которых находится центральная звезда или черная дыра, модели же R-тороидов применяются, например, при изучении вековой эволюции циркумбинарных экзопланет.

Ввиду сложности задач по изучению вековой устойчивости, актуальным является поиск упрощенных подходов к их решению. Одним из приемов упрощения является переход к *круговым* кольцам Гаусса [10]. Этот метод, несмотря на ограничения в выборе формы орбит, имеет и определенные достоинства: дифференциальные уравнения эволюции орбит, полученные методом круговых колец, оказываются более простыми, причем решения этих уравнений, как показано в данной работе, можно получить в конечном аналитическом виде. Это дает качественную картину движения.

В литературе иногда высказывалось мнение [11], что при резонансах орбитальных движений метод колец применять нельзя. Однако в этом тонком вопросе следует учитывать, что в реальных астрономических системах резонансы не являются, как правило, острыми, поэтому метод колец Гаусса остается эффективным способом решения сложных задач. В [10] этот вопрос обсуждается на примере резонанса 5 : 2 у планет-гигантов Юпитера и Сатурна. В этом случае период усреднения дополнительной возмущающей силы равен $T \approx 1332$ л, что намного меньше периода нодальной прецессии орбит планет-гигантов $T \approx 5\times10^4$ л.

Напомним, что в работе [10] рассматривался частный случай, когда два круговых кольца пересекаются по диаметру (т.е. узлы орбит совпадают). Но даже в этом, наиболее простом случае, была подтверждена адекватность метода круглых колец: найденная скорость попятного движения узлов орбит 25.6 ″/год оказалась довольно близкой к $\dot{\Omega} \approx 25.93$ ″/год, полученной общим методом с применением возмущающей функции Лагранжа [12].

Однако в реальных астрономических системах случаи совпадения узлов двух орбит могут встречаться лишь в исключительных случаях: в общем же случае узлы орбит не будут совпадать. Так, у орбит Юпитера и Сатурна узлы в эклиптике, см. [13], отстоят друг от друга на 13.0953°. Поэтому представляет интерес выяснить, насколько повысится точность метода круглых колец при учете несовпадения узлов орбит.

В данной работе разработан более общий, чем в [10], подход к методу круговых колец Гаусса, мы дополнительно учитываем факт несовпадения узлов орбит. Здесь есть два варианта: i) с большим и ii) с малым углом $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ между узлами орбит. В разделе 1 изложен краткий обзор проблемы. В разделе 2 дана постановка задачи и в интегральном виде получено выражение взаимной гравитационной энергии двух колец с несовпадающими узлами. Раздел 3 посвящен разложению функции взаимной энергии в двойной ряд по углам наклонов плоскостей колец. В разделе 4 рассматривается первый вариант теории и выводится замкнутая система из четырех дифференциальных уравнений, описывающих вековую эволюцию орбит планет. Решение этих уравнений в аналитическом виде дано в разделе 5. В разделе 6 построена теория для орбит с малым $\Delta\Omega$. В разделе 7 даны приложения обоих методов; в 7.1 первый вариант применяется к изучению вековой эволюции орбит Юпитера и Сатурна, а в 7.2 с помощью второго варианта исследуется вековая эволюция орбит экзопланет в системе Kepler-10.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЗАИМНАЯ ГРАВИТАЦИОННАЯ ЭНЕРГИЯ ДВУХ КРУГЛЫХ КОЛЕЦ

Рассмотрим в инерциальной системе координат $Oxyz$ два однородных круглых гравитирующих кольца с центрами в точке O. Эти кольца Гаусса моделируют орбиты двух планет. Первое кольцо имеет радиус r_1, одномерную плотность μ_1, долготу восходящего узла Ω_1 и наклон i_1 к плоскости Oxy. Аналогично, второе кольцо описывается параметрами $(r_2, \mu_2, \Omega_2, i_2)$. Положение пробной точки на первом кольце фиксируется углом истинной аномалии υ_1, а на втором кольце – углом v_2. На рис. 1 дана схема расположения этих колец.

2.1. Расстояние между произвольными (пробными) точками на двух кольцах

Для изучения прецессии узлов в рассматриваемой двупланетной задаче “Звезда–Планета 1–Планета 2” вначале найдем взаимную гравитационную энергию колец W_{mut}. По определению, вклад в энергию W_{mut} от двух элементарных точечных масс dm_1 и dm_2 равен

$$dW_{\text{mut}} = -\frac{G dm_1 dm_2}{r_{12}}, \qquad r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \tag{1}$$

где r_{12} – расстояние между указанными материальными точками. Полное выражение взаимной гравитационной энергии колец получим двукрат-

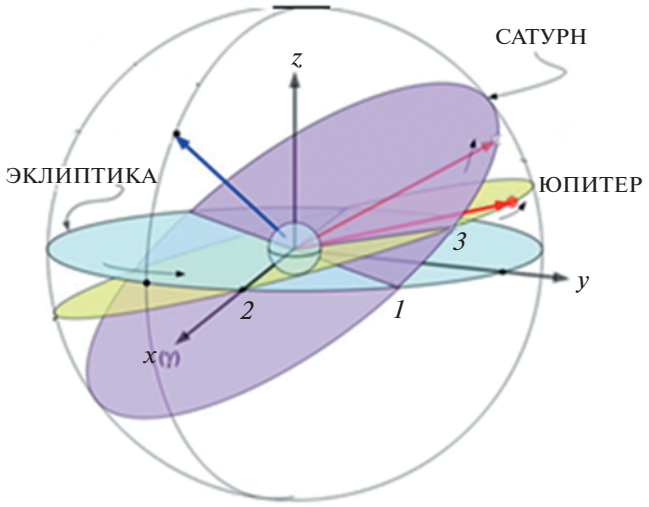

Рис. 1. Схема двух круглых колец с узлами в эклиптике Ω_1 (для орбиты Сатурна) и Ω_2 (для орбиты Юпитера). Для удобства изображения радиус орбиты Юпитера преувеличен. Дугой $\Omega_2 - \Omega_1$ показано расстояние между узлами орбит.

ным интегрированием по обеим кольцам. Так как $dm_1 = r_1\mu_1 dv_1$ и $dm_2 = r_2\mu_2 dv_2$, имеем

$$W_{\text{mut}} = -G\mu_1\mu_2 r_1 r_2 \int_0^{2\pi} dv_2 \int_0^{2\pi} \frac{dv_1}{r_{12}}. \qquad (2)$$

Чтобы найти r_{12}, заметим, что в указанной системе отсчета Oxyz координаты пробной точки на круглом кольце 1 можно представить формулами, см., например, [1]:

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1(\cos v_1 \cos\Omega_1 - \sin v_1 \sin\Omega_1 \cos i_1);\\ y_1 &= r_1(\cos v_1 \sin\Omega_1 + \sin v_1 \cos\Omega_1 \cos i_1); \qquad (3)\\ z_1 &= r_1 \sin v_1 \sin i_1; \end{aligned}$$

аналогичными формулами выразим и координаты пробной точки на втором кольце:

$$\begin{aligned} x_2 &= r_2(\cos v_2 \cos\Omega_2 - \sin v_2 \sin\Omega_2 \cos i_2);\\ y_2 &= r_2(\cos v_2 \sin\Omega_2 + \sin v_2 \cos\Omega_2 \cos i_2); \qquad (4)\\ z_2 &= r_2 \sin v_2 \sin i_2. \end{aligned}$$

Подставляя в формулы (3) и (4) и учитывая, что

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}, \qquad (5)$$

после преобразований представим расстояние в виде r_{12}

$$r_{12} = \sqrt{2r_1 r_2}\sqrt{a - b\sin v_1 - c\cos v_1}. \qquad (6)$$

Здесь коэффициенты a, b и c определяются формулами

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_1^2 + r_2^2}{2r_1 r_2} = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{n}\right), \quad n = \frac{r_2}{r_1} \le 1;\\ b &= [\cos i_1 \cos i_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) +\\ &+ \sin i_1 \sin i_2]\sin v_2 - \cos i_1 \sin(\Omega_1 - \Omega_2)\cos v_2; \qquad (7)\\ c &= \cos(\Omega_1 - \Omega_2)\cos v_2 +\\ &+ \cos i_2 \sin(\Omega_1 - \Omega_2)\sin v_2. \end{aligned}$$

На рис. 2 приводится график зависимости коэффициента a от отношения радиусов колец $n = \frac{r_2}{r_1}$; обратим внимание, что при любом отно-

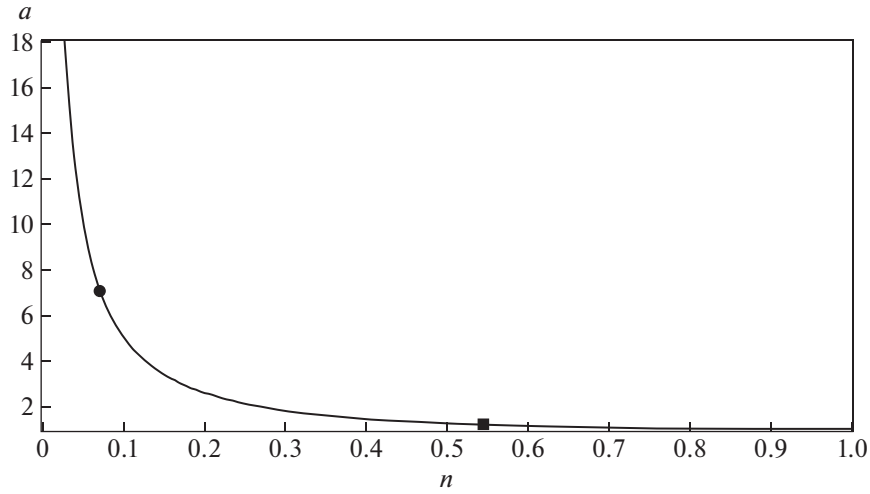

Рис. 2. Зависимость коэффициента a в формулах (7) от отношения радиусов колец $n = \frac{r_2}{r_1}$. Черным кружком отмечено положение системы экзопланет в Kepler-10, квадратом – положение системы Юпитер–Сатурн.

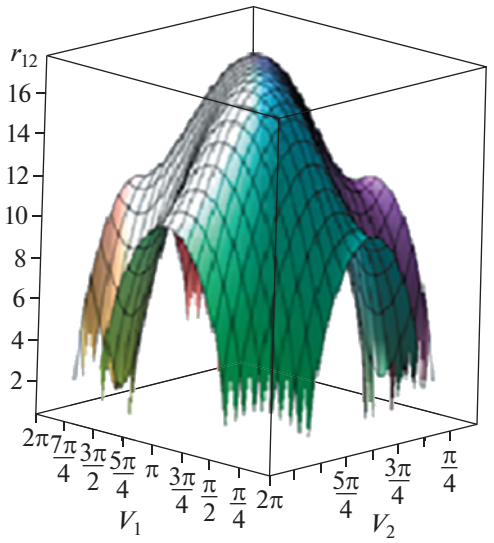

Рис. 3. 3D-изображение взаимного расстояния между пробными точками на кольцах Юпитера и Сатурна. По абсциссе и ординате отложены углы истинной аномалии v_2 и v_1.

шении радиусов колец n выполняется неравенство $a \geq 1$.

Трехмерное изображение взаимного расстояния между точками на кольцах Юпитера и Сатурна показано на рис. 3.

2.2. Интегральное выражение для взаимной энергии двух колец

С учетом r_{12} из (6), формула для взаимной энергии (2) примет вид

$$W_{\text{mut}} = -G\mu_1\mu_2\sqrt{\frac{r_1 r_2}{2}}\int_0^{2\pi} dv_2 \int_0^{2\pi} \frac{dv_1}{\sqrt{a - b\sin v_1 - c\cos v_1}}. \quad (8)$$

Двойной интеграл в (8) в общем случае не берется. Рассмотрим там внутренний интеграл

$$In = \int_0^{2\pi} \frac{dv_1}{\sqrt{a - b\sin v_1 - c\cos v_1}}. \quad (9)$$

Заменой переменной интегрирования [14]

$$v_1 = 2\psi + \alpha, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c}, \quad p = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad (10)$$

запишем интеграл (9) в виде

$$In = \int_0^{2\pi} \frac{dv_1}{\sqrt{a - b\sin v_1 - c\cos v_1}} = 2\int_{-\alpha/2}^{\pi-\alpha/2} \frac{d\psi}{\sqrt{a - p + 2p\cos^2\psi}}. \quad (11)$$

В силу симметрии подынтегральной функции, интеграл (11) можно представить так

$$I_1 = \frac{4}{\sqrt{a+p}}\int_{-\alpha/4}^{\pi/2-\alpha/4} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{2p}{a+p}\sin^2\psi}}. \quad (12)$$

Обратим внимание: так как подынтегральная функция в (12) на интервале $0 \leq \psi \leq -\frac{\alpha}{4}$ не имеет особенностей, пределы интегрирования можно изменить и записать (12) в эквивалентном и уже табличном виде через эллиптический интеграл первого рода

$$I_1 = \frac{4}{\sqrt{a+p}}\int_0^{\pi/2} \frac{dv_1}{\sqrt{1 - \frac{2p}{a+p}\sin^2\psi}} = \frac{4}{\sqrt{a+p}} K\left(\sqrt{\frac{2p}{a+p}}\right). \quad (13)$$

С учетом (13), выражение для взаимной энергии колец (8) можно представить в виде однократного интеграла

$$W_{\text{mut}} = -2\sqrt{2}G\mu_1\mu_2\sqrt{r_1 r_2}\int_0^{2\pi} \frac{dv_2}{\sqrt{a+p}} K\left(\sqrt{\frac{2p}{a+p}}\right). \quad (14)$$

Проверка формулы (14) в частном случае $\Omega_2 - \Omega_1 = 0$

Тогда узлы орбит совпадают и круговые кольца пересекаются по диаметрам. Ранее этот вариант был рассмотрен в монографии [15] (см. также статью [10]). В этом случае коэффициенты b и c из (7) заметно упрощаются

$$b = \cos(i_1 - i_2)\sin v_2; \quad c = \cos v_2, \quad (15)$$

и (14) приводится к выражению

$$W_{\text{mut}} = -16G\mu_1\mu_2\sqrt{r_1 r_2}\int_0^{\pi/2} \frac{dv_2}{m} K\left(\frac{2n^{1/4}}{m}\right);$$

$$m = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1 r_2} + 2\sqrt{n'}}; \quad (16)$$

$$n' = \sin^2\theta\cos^2\alpha + \cos^2\theta,$$

которое ранее было получено в [10, 15]. Это подтверждает справедливость формулы (14).

3. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНОЙ ЭНЕРГИИ КОЛЕЦ В ДВОЙНОЙ РЯД. СЛУЧАЙ МАЛЫХ УГЛОВ НАКЛОНА

3.1. Преобразование интеграла (14)

Так, интеграл (14) в конечном виде не берется, представим его в виде ряда по степеням малых углов i_1 и i_2. Такое разложение – трудоемкая операция, поэтому дальнейшие расчеты разделим на несколько этапов.

Прежде всего, подстановка коэффициентов b и c из (7) в выражение для p из (10) дает

$$p^2 = p_{11}\sin^2 v_2 + p_{22}\cos^2 v_2 + 2p_{12}\sin v_2 \cos v_2. \quad (17)$$

Из (17) видно, что два первых члена в правой части инвариантны относительно изменения знака v_2, а третий член с $\sin v_2$ антисимметричен. С учетом этого, пределы интегрирования в (14) можно изменить на более удобные $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ и представить выражение для взаимной энергии в виде суммы

$$W_{\text{mut}} = -4\sqrt{2}G\mu_1\mu_2\sqrt{r_1 r_2}\{In_1 + In_2\}, \quad (18)$$

где

$$In_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{dv_2}{\sqrt{a+p}} K\left(\sqrt{\frac{2p}{a+p}}\right), \quad (19)$$

а

$$In_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{dv_2}{\sqrt{a+p'}} K\left(\sqrt{\frac{2p'}{a+p'}}\right), \quad (20)$$
$$p' = p\left(\sin v_2 \to -\sin v_2\right).$$

3.2. Процедура разложения в двойной ряд

Интеграл In_1 из (19) представим в форме

$$In_1 = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2} \frac{d_2}{\sqrt{a+p-2p\sin^2 x}}, \quad (19a)$$

и здесь подынтегральную функцию

$$F(i_1,i_2) = \frac{1}{\sqrt{a+p-2p\sin^2 x}} \quad (21)$$

раскладываем в двойной ряд Тейлора по степеням малых углов (i_1,i_2), ограничиваясь квадратичными членами. Затем полученный ряд Тейлора дважды интегрируем: вначале по переменной v_2, затем по x. В итоге, получим ряд

$$In_1 = t_0 + t_{11}i_1^2 + t_{12}i_1 i_2 + t_{22}i_2^2, \quad (22)$$

где коэффициенты равны

$$t_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}K(k);$$
$$t_{11} = -\frac{\pi - k_{11}}{16\sqrt{1+a}}\left\{\frac{a}{a-1}E(k) - K(k)\right\};$$
$$t_{12} = -\frac{1}{8\sqrt{1+a}}[2\sin(\Omega_1-\Omega_2) - \quad (23)$$
$$-\pi\cos(\Omega_1-\Omega_2)]\left\{\frac{a}{a-1}E(k) - K(k)\right\};$$
$$t_{22} = -\frac{\pi}{16\sqrt{1+a}}\left\{\frac{a}{a-1}E(k) - K(k)\right\}.$$

Здесь (а также в формулах (26)) модуль эллиптических интегралов k и вспомогательный коэффициент k_{11} равны

$$k = \sqrt{\frac{2}{1+a}} \le 1;$$
$$k_{11} = 4\sin(\Omega_1-\Omega_2)\cos(\Omega_1-\Omega_2). \quad (24)$$

Аналогичные расчеты выполнены и для In_2 из (20), который также вначале представим в виде

$$In_2 = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2} \frac{dv_2}{\sqrt{a+p'-2p'\sin^2 x}}, \quad (20a)$$

где, напомним, $p' = p\left(\sin v_2 \to -\sin v_2\right)$. После многих выкладок и указанного двойного интегрирования получим ряд

$$In_2 = t'_0 + t'_{11}i_1^2 + t'_{12}i_1 i_2 + t'_{22}i_2^2, \quad (25)$$

с коэффициентами

$$t'_0 = t_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}K(k);$$
$$t'_{11} = -\frac{\pi + k_{11}}{16\sqrt{1+a}}\left\{\frac{a}{a-1}E(k) - K(k)\right\};$$
$$t'_{12} = \frac{1}{8\sqrt{1+a}}[2\sin(\Omega_1-\Omega_2) + \quad (26)$$
$$+\pi\cos(\Omega_1-\Omega_2)]\left\{\frac{a}{a-1}E(k) - K(k)\right\};$$
$$t'_{22} = t_{22} = -\frac{\pi}{16\sqrt{1+a}}\left\{\frac{a}{a-1}E(k) - K(k)\right\}.$$

Обратим внимание, что для рядов (23) и (26) справедливы следующие соотношения между коэффициентами:

$$t'_0 = t_0; \quad t'_{22} = t_{22}, \quad \text{но} \quad t'_{11} \ne t_{11}; \quad t_{12} \ne t'_{12}. \quad (27)$$

3.3. Представление взаимной энергии колец двойным рядом

Для получения полной взаимной энергии колец сложим ряды (23) и (26), и результат подставим в (19):

$$W_{\text{mut}} = -4\sqrt{2}G\mu_1\mu_2\sqrt{r_1 r_2}\{In_1 + In_2\}. \tag{28}$$

Учитывая вспомогательные соотношения (27), сумму $In_1 + In_2$ запишем в виде

$$\begin{aligned} In = In_1 + In_2 = 2t_0 + (t_{11} + t'_{11})i_1^2 + \\ + 2t_{22}i_2^2 + (t_{12} + t'_{12})i_1 i_2. \end{aligned} \tag{29}$$

Здесь

$$\begin{aligned} 2t_0 &= \frac{\pi}{\sqrt{1+a}}K(k); \\ (t_{11} + t'_{11}) &= -\frac{\pi}{8\sqrt{1+a}}\left\{\frac{a}{a-1}E(k) - K(k)\right\}; \\ 2t_{22} &= -\frac{\pi}{8\sqrt{1+a}}\left\{\frac{a}{a-1}E(k) - K(k)\right\}; \\ t_{12} + t'_{12} &= \frac{\pi\cos(\Omega_1 - \Omega_2)}{4\sqrt{1+a}}\left\{\frac{a}{a-1}E(k) - K(k)\right\}. \end{aligned} \tag{30}$$

В результате находим

$$W_{\text{mut}} = W_0 + W_{11}i_1^2 + +W_{22}i_2^2 + W_{12}i_1 i_2. \tag{31}$$

Коэффициенты в (31) равны

$$\begin{aligned} W_0 &= -\frac{\sqrt{2}GM_1M_2}{\pi\sqrt{r_1 r_2}\sqrt{1+a}}K(k); \\ W_{11} = W_{22} &= \frac{G\sqrt{2}M_1M_2}{8\pi\sqrt{r_1 r_2}\sqrt{1+a}}\left\{\frac{a}{a-1}E(k) - K(k)\right\}; \\ W_{12} &= -\frac{G\sqrt{2}M_1M_2}{4\pi\sqrt{r_1 r_2}\sqrt{1+a}}\cos(\Omega_1 - \Omega_2)\times \\ &\times\left\{\frac{a}{a-1}E(k) - K(k)\right\}. \end{aligned} \tag{32}$$

Таким образом, выражение для взаимной энергии приводится к виду

$$\begin{aligned} W_{\text{mut}} = -\frac{\sqrt{2}GM_1M_2}{\pi\sqrt{r_1 r_2}\sqrt{1+a}}\times \\ \times\left\{K(k) - \frac{1}{8}\left[\frac{a}{a-1}E(k) - K(k)\right]\times\right. \\ \left.\times\left[i_1^2 + i_2^2 - 2\cos(\Omega_1 - \Omega_2)i_1 i_2\right]\right\}. \end{aligned} \tag{33}$$

Для численных расчетов коэффициенты ряда (31) можно преобразовать. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_1^2 + r_2^2}{2r_1 r_2} = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{n}\right), \quad n = \frac{r_2}{r_1} \le 1; \\ a - 1 &= \frac{(1-n)^2}{2n}; \quad \frac{a}{a-1} = \frac{1+n^2}{(1-n)^2}; \\ \sqrt{1+a} &= \frac{1+n}{\sqrt{2n}}; \quad k = \frac{2\sqrt{n}}{1+n}. \end{aligned} \tag{34}$$

Тогда взаимная гравитационная энергия двух круглых колец Гаусса в квадратичном приближении имеет вид

$$\begin{aligned} W_{\text{mut}} = -\frac{2Gm_1m_2}{\pi r_1}\times \\ \times\left\{K(n) - \frac{\Delta i'^2}{4(1-n^2)}\left[\frac{1+n^2}{(1-n)^2}E(n) - K(n)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{35}$$

где угол взаимного наклона $\Delta i'$ колец связан с углами ориентации колец в системе координат, связанных с главной плоскостью, соотношением

$$\cos\Delta i' = \cos i_1\cos i_2 + \sin i_1\sin i_2\cos(\Omega_2 - \Omega_1). \tag{36}$$

С учетов малости наклонов колец к главной плоскости, $\Delta i'$ из (36) выражается также через углы в системе координат, связанной с эклиптикой (нештрихованные координаты)

$$\Delta i'^2 \approx i_1^2 + i_2^2 - 2i_1 i_2\cos(\Omega_2 - \Omega_1). \tag{37}$$

Подчеркнем: так как выражение (37) относится к случаю, когда малы углы наклона i_1 и i_2, поэтому мала и разность $\Delta i = i_2 - i_1$; однако, разность долгот узлов $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ не обязательно является малой величиной.

4. УРАВНЕНИЯ ВЕКОВОЙ ЭВОЛЮЦИИ ОРБИТ

Уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов второго кольца в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{di_2}{dt} &= -\frac{1}{n_2R_1^2n^2\sin i_2}\frac{\partial R_2}{\partial\Omega_2}; \\ \frac{d\Omega_2}{dt} &= \frac{1}{n_2R_1^2n^2\sin i_2}\frac{\partial R_2}{\partial i_2}, \end{aligned} \tag{38}$$

где нормированная возмущающая функция равна

$$R_2 = -\frac{W_{\text{mut}}}{m_2}. \tag{39}$$

В итоге, добавив к уравнениям (38) для первого кольца еще два уравнения для второго (последние можно получить из (38) путем перестановки индексов), и учитывая третий закон Кеплера

$$GM = n_1^2a_1^3 = n_2^2a_1^3n^3. \tag{40}$$

Полную систему уравнений вековой эволюции двух круглых колец запишем в виде

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = -\frac{n_1}{2\pi(1+n)}\frac{m_2}{M}\left[\frac{1+n^2}{(1-n)^2}E(k) - K(k)\right]\times \times\left(1 - \frac{i_2}{i_1}\cos\Delta\Omega\right);$$

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{n_1}{2\pi(1+n)}\frac{m_2}{M}\left[\frac{1+n^2}{(1-n)^2}E(k) - K(k)\right]\times \times i_2\sin\Delta\Omega; \quad (41)$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = -\frac{n_2 n}{2\pi(1+n)}\frac{m_1}{M}\left[\frac{1+n^2}{(1-n)^2}E(k) - K(k)\right]\times \times\left(1 - \frac{i_1}{i_2}\cos\Delta\Omega\right);$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{n_2 n}{2\pi(1+n)}\frac{m_1}{M}\left[\frac{1+n^2}{(1-n)^2}E(k) - K(k)\right]\times \times i_1\sin\Delta\Omega.$$

5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭВОЛЮЦИИ (41)

Прежде всего, разделив в (41) второе уравнение на четвертое, получим

$$\frac{di_1}{di_2} = -\frac{n_1 m_2}{n n_2 m_1}\frac{i_2}{i_1}. \quad (42)$$

Интегрируя (42), получим простое соотношение между углами

$$i_1^2 + q_1 i_2^2 = c_1. \quad (43)$$

Для дальнейшего анализа уравнений (43) введем переменные

$$h_1 = i_1\cos\Omega_1; \quad k_1 = i_1\sin\Omega_1;$$
$$h_2 = i_2\cos\Omega_2; \quad k_2 = i_2\sin\Omega_2. \quad (44)$$

Тогда уравнения (41) преобразуются к более простому виду

$$\frac{dh_1}{dt} = -\sigma_1(k_2 - k_1); \quad \frac{dk_1}{dt} = \sigma_1(h_2 - h_1);$$
$$\frac{dh_2}{dt} = \sigma_2(k_2 - k_1); \quad \frac{dk_2}{dt} = -\sigma_2(h_2 - h_1), \quad (45)$$

где через σ_1, σ_2 мы обозначили две частоты вековых колебаний

$$\sigma_1 = \frac{n_1}{2\pi(1+n)}\frac{m_2}{M}\left[\frac{1+n^2}{(1-n)^2}E(k) - K(k)\right];$$
$$\sigma_2 = \frac{n_2 n}{2\pi(1+n)}\frac{m_1}{M}\left[\frac{1+n^2}{(1-n)^2}E(k) - K(k)\right]. \quad (46)$$

Решением системы дифференциальных уравнений (45) является

$$h_1(t) = C_1 + \sigma_1[C_3\cos\sigma t + C_4\sin\sigma t];$$
$$k_1(t) = C_2 + \sigma_1[-C_3\sin\sigma t + C_4\cos\sigma t];$$
$$h_2(t) = C_1 - \sigma_2[C_3\cos\sigma t + C_4\sin\sigma t];$$
$$k_2(t) = C_2 - \sigma_2[-C_3\sin\sigma t + C_4\cos\sigma t]. \quad (47)$$

Здесь полная частота

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad (48)$$

а константы интегрирования

$$C_1 = \frac{\sigma_1 h_2^0 + \sigma_2 h_1^0}{\sigma_1 + \sigma_2}; \quad C_2 = \frac{\sigma_1 k_2^0 + \sigma_2 k_1^0}{\sigma_1 + \sigma_2};$$
$$C_3 = -\frac{h_2^0 - h_1^0}{\sigma_1 + \sigma_2}; \quad C_4 = -\frac{k_2^0 - k_1^0}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad (49)$$

включают в себя начальные условия

$$h_1^0 = h_1(0); \quad k_1^0 = k_1(0);$$
$$h_2^0 = h_2(0); \quad k_2^0 = k_2(0). \quad (50)$$

Подставив решение (47) в (37) и учитывая выражения (44), находим, что в линейном приближении угол взаимного наклона орбит в ходе эволюции остается постоянным

$$\Delta i' = \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + (k_1 - k_2)^2} = \text{const}. \quad (51)$$

6. ВТОРОЙ ВАРИАНТ: ОРБИТЫ С ДВУМЯ МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ $(\Delta i, \Delta\Omega)$

Рассмотрим второй вариант теории, когда малыми величинами являются не только взаимный наклон орбит $\Delta i = i_2 - i_1$, но и разность долгот восходящих узлов $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$. Тогда угол взаимного наклона колец в системе координат наблюдателя выражается через малые параметры с помощью формулы

$$\Delta i'^2 \approx \Delta i^2 + \sin^2 i\,\Delta\Omega^2, \quad i = \frac{i_1 + i_2}{2}. \quad (52)$$

Формула (52) получается из (37) при учете малости величины $\Delta\Omega$. Взаимную энергию колец в этом случае мы получим подстановкой $\Delta i'^2$ из (52) в основную формулу (35).

С помощью уравнений (38), по аналогии с (41), получаем уравнения вековой эволюции круглых колец в данном варианте теории

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = \sigma_1\frac{\Delta i}{\sin i}; \quad \frac{di_1}{dt} = -\sigma_1\sin i\,\Delta\Omega;$$
$$\frac{d\Omega_2}{dt} = -\sigma_2\frac{\Delta i}{\sin i}; \quad \frac{di_2}{dt} = \sigma_2\sin i\,\Delta\Omega. \quad (53)$$

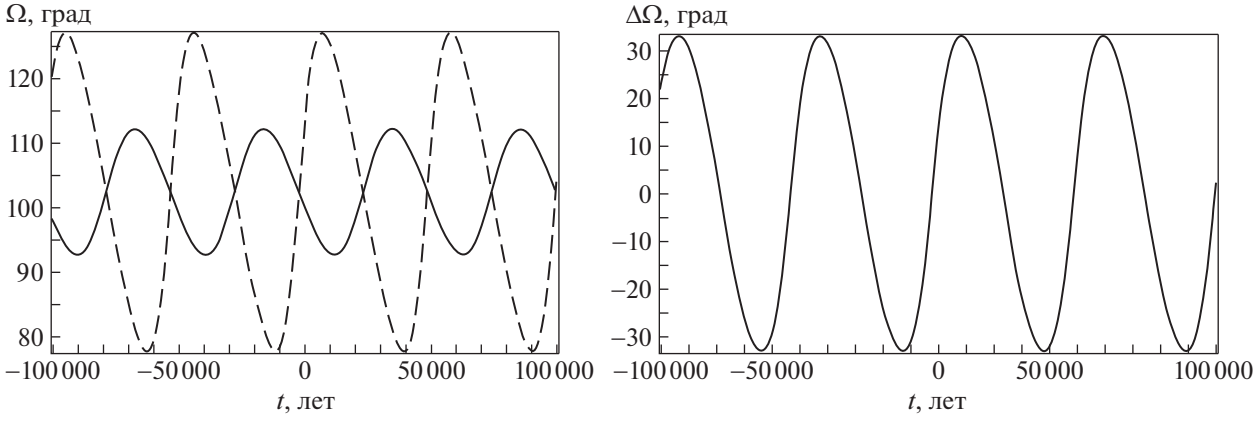

Рис. 4. Слева: зависимость изменения долготы восходящего узла для Юпитера (сплошная линия) и Сатурна (штрихи), представляющие вековую прецессию плоскостей орбит планет-гигантов под действием взаимного возмущения; справа: разность долгот узлов орбиты Юпитера и Сатурна как функция времени.

Введем новые переменные

$$p = \sin i\,\Delta\Omega, \quad q = \Delta i, \tag{54}$$

к которым добавятся средний наклон колец из (52) и средняя долгота восходящего узла

$$\Omega = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}, \tag{55}$$

тогда уравнения эволюции двух круглых колец приводятся к виду

$$\begin{gathered}\frac{dp}{dt} = -(\sigma_1 + \sigma_2)\,q; \quad \frac{dq}{dt} = (\sigma_1 + \sigma_2)\,p;\\ \frac{di}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\frac{dq}{dt}; \quad \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\sin i}\right).\end{gathered} \tag{56}$$

Эти уравнения имеют решения

$$\begin{gathered}p(t) = (\sigma_1 + \sigma_2)[-C_1^2 \sin((\sigma_1 + \sigma_2)t) + \\ + C_2^2 \cos((\sigma_1 + \sigma_2)t)];\\ q(t) = (\sigma_1 + \sigma_2)[C_1^2 \cos((\sigma_1 + \sigma_2)t) + \\ + C_2^2 \sin((\sigma_1 + \sigma_2)t)];\\ i(t) = C_3^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)[C_1^2 \cos((\sigma_1 + \sigma_2)t) + \\ + C_2^2 \sin((\sigma_1 + \sigma_2)t)];\\ \Omega(t) = C_4^2 - \frac{1}{2}\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{\sin i(t)}[-C_1^2 \sin((\sigma_1 + \sigma_2)t) + \\ + C_2^2 \cos((\sigma_1 + \sigma_2)t)],\end{gathered} \tag{57}$$

где константы, выраженные через начальные условия

$$\begin{gathered}i_0 = \frac{i_1^0 + i_2^0}{2} = i(0); \quad \Delta i_0 = i_2^0 - i_1^0 = \Delta i(0);\\ \Omega_0 = \frac{\Omega_1^0 + \Omega_2^0}{2} = \Omega(0);\\ \Delta\Omega_0 = \Omega_2^0 - \Omega_1^0 = \Delta\Omega(0),\end{gathered} \tag{58}$$

записываются в виде

$$\begin{gathered}C_1^2 = \frac{\Delta i_0}{\sigma_1 + \sigma_2}; \quad C_2^2 = \frac{\sin i^0 \Delta\Omega^0}{\sigma_1 + \sigma_2};\\ C_3^2 = \frac{\sigma_1 i_2^0 + \sigma_2 i_1^0}{\sigma_1 + \sigma_2}; \quad C_4^2 = \frac{\sigma_1 \Omega_2^0 + \sigma_2 \Omega_1^0}{\sigma_1 + \sigma_2}.\end{gathered} \tag{59}$$

Из полученного решения (57), с учетом (52), следует (как и в первом варианте (51)), что при эволюции угол взаимного наклона орбит в линейном приближении остается постоянным

$$\Delta i' = \sqrt{p^2 + q^2} = \text{const}. \tag{60}$$

7. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КРУГЛЫХ КОЛЕЦ

7.1. Применение первого варианта метода к двупланетной задаче "Солнце–Юпитер–Сатурн"

По начальным параметрам орбит Юпитера и Сатурна, взятых, например, из [13], мы рассчитали с помощью полученных выше решений (41) эволюцию долгот восходящих узлов и наклонов орбит планет Юпитер и Сатурн на интервале 200 000 лет. Результаты представлены на рис. 4 и рис. 5.

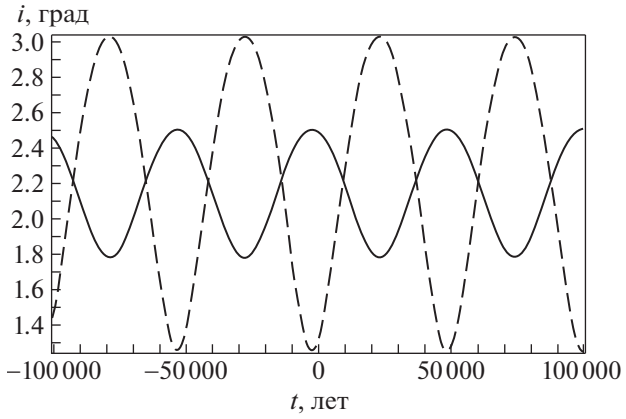

Рис. 5. Зависимость от времени наклона (к эклиптике) кольца Юпитера (сплошная линия) и Сатурна (штрихи).

Период либраций орбит для наклона и движения узлов одинаков и составляет примерно 50 950 лет (в [10] в случае совпадения узлов, было получено 50 625 лет).

7.2. Применение второго варианта теории для расчета вековой эволюции системы экзопланет в Kepler-10

Звезда Kepler-10 очень похожа на Солнце, ее масса $M \approx 0.91\ M_{\rm Sun}$. Вокруг этой звезды обращаются две планеты Kepler-10b и Kepler-10c (существование третьей планеты в этой системе не подтверждено). Данные об этих планетах приводятся в табл. 1.

Для планет в системе Kepler-10 долготы восходящих узлов не определены, поэтому, без ограничения в общности, положим среднеарифметическую долготу восходящего узла на начальный момент времени равной

$$\Omega_0 = 0. \tag{61}$$

Полагая, что угол взаимного наклона орбит планет в системе Kepler-10 мал, тогда, с учетом близких по значению наклонов орбит этих планет к лучу зрения наблюдателя ($\Delta i \approx 4.49°$), малой будет и величина $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$. Для разности долгот восходящих узлов для наглядности возьмем три значения, например,

$$\Delta\Omega_0 = \{-\Delta i_0, 0, \Delta i_0\}. \tag{62}$$

Результаты расчетов изменений долгот восходящих узлов и наклонов по формулам (57) показаны на рис. 6, рис. 7.

Период либрационных колебаний орбит оказывается примерно в два раза меньше, чем у Юпитера и Сатурна и составляет

$$T_{\rm libr} = 2.90 \times 10^5 \text{ лет}. \tag{63}$$

Приведем на рис. 8 и рис. 9 также графики зависимостей максимумов и минимумов параметров орбит планет от начальной разности долгот восходящих узлов $\Delta\Omega_0$.

Заметим, что зависимости амплитуд либраций ориентационных углов орбит планет от малой разностной долготы восходящего узла на рис. 8 и 9 получены в квадратичном приближении.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе был дополнен и расширен метод круглых колец Гаусса. В новой формулировке метод позволяет учитывать известный из наблюдений факт несовпадения узлов орбит планет. На кольца переносятся массы, большие полуоси и углы наклона орбит, а также орбитальные угловые моменты планет. Особенностью метода является то, что роль функции возмущений играет взаимная гравитационная энергия колец $W_{\rm mut}$. Эта функция взаимной энергии получена не только в интегральном виде, но также в виде ряда в квадратичном приближении по степеням углов наклона орбит, причем коэффициенты этого ряда получены в конечном виде и выражаются через эллиптические интегралы.

Учет несовпадения узлов потребовал значительной перестройки всего математического аппарата. Если в работе [10] единственной неизвестной функцией времени была долгота общего узла двух орбит планет, то теперь от времени зависят уже четыре неизвестные функции: два узла и два угла наклона обеих орбит. Целесообразно было разработать два варианта метода: с большим и с малым углом между узлами орбит. Для каждого варианта были впервые составлены и в конечном аналитическом виде решены системы из 4 дифференциальных уравнений, описывающих вековую эволюцию орбит. Установлен нетривиальный динамический факт: в обоих вариантах

Таблица 1. Параметры экзопланет вокруг звезды Kepler-10: Kepler-10b [15–17]); Kepler-10c [17, 18]

Планета	a	e	T	i	m	R
Kepler-10b	0.0172 au	$0.06^{+0.16}_{-0.06}$	0.837491 d	85°.1	$0.0145 m_{\rm J}$	$0.132 R_{\rm J}$
Kepler-10c	0.241 au	0	45.2946 d	89°.59	$7.37 m_{\oplus}$	$2.35 R_{\oplus}$

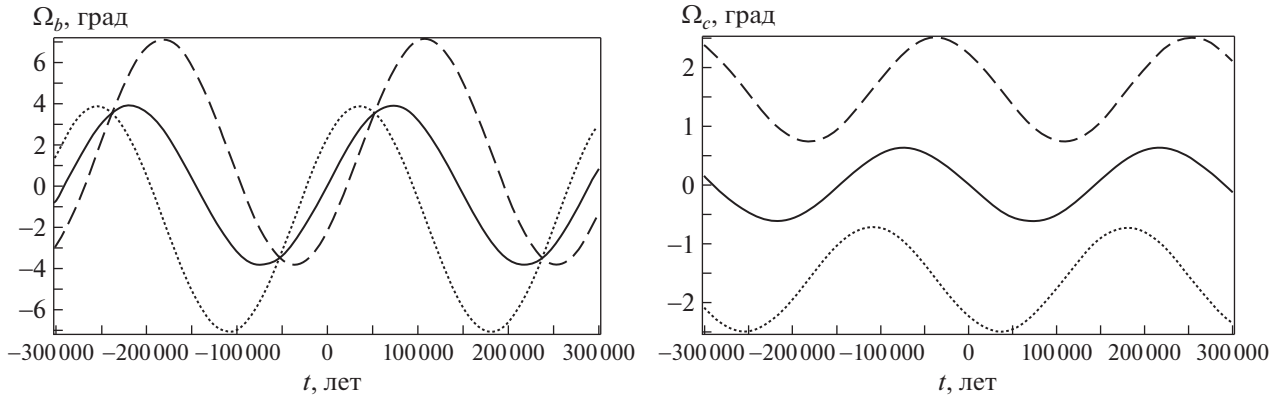

Рис. 6. Зависимость долгот восходящих узлов для планеты *b* (левый график) и планеты *c* (правый график) от времени. Пунктирная линия соответствует значению $\Delta\Omega_0 = -\Delta i_0$, сплошная линия – значению $\Delta\Omega_0 = 0$, а штрихованная – значению $\Delta\Omega_0 = \Delta i_0$.

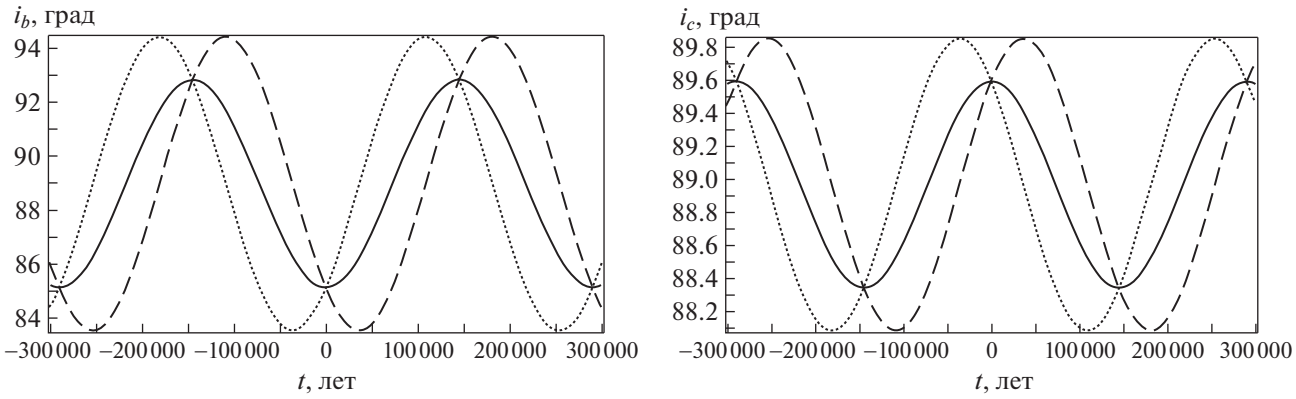

Рис. 7. Зависимость наклонов орбит планеты *b* (левый график) и планеты *c* (правый график) к картинной плоскости от времени. Пунктирная линия соответствует значению $\Delta\Omega_0 = -\Delta i_0$, сплошная линия – значению $\Delta\Omega_0 = 0$, а штрихованная – значению $\Delta\Omega_0 = \Delta i_0$.

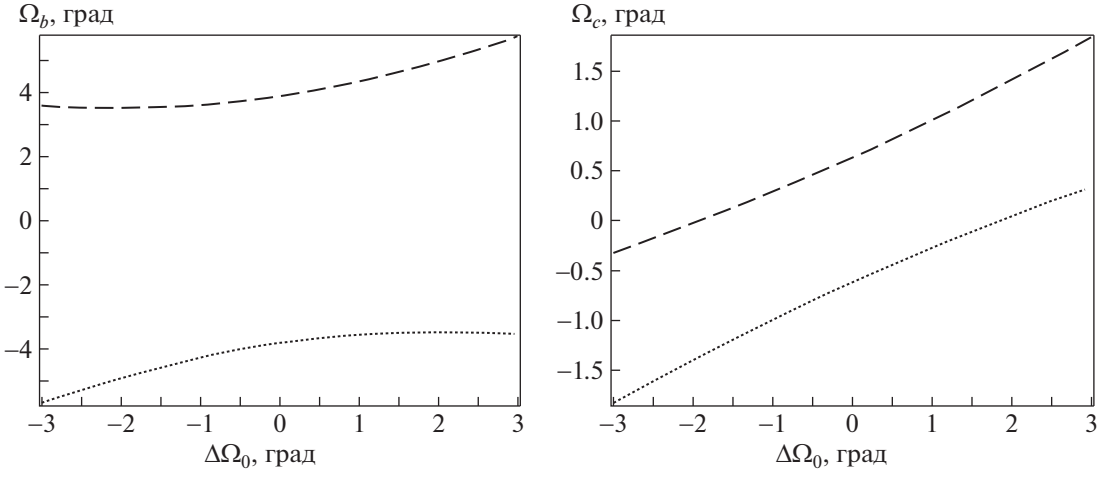

Рис. 8. Зависимость максимального (штрихи) и минимального (точки) либрационных значений долгот восходящих узлов планеты *b* (левый график) и планеты *c* (правый график) от малой разностной долготы восходящего узла планет.

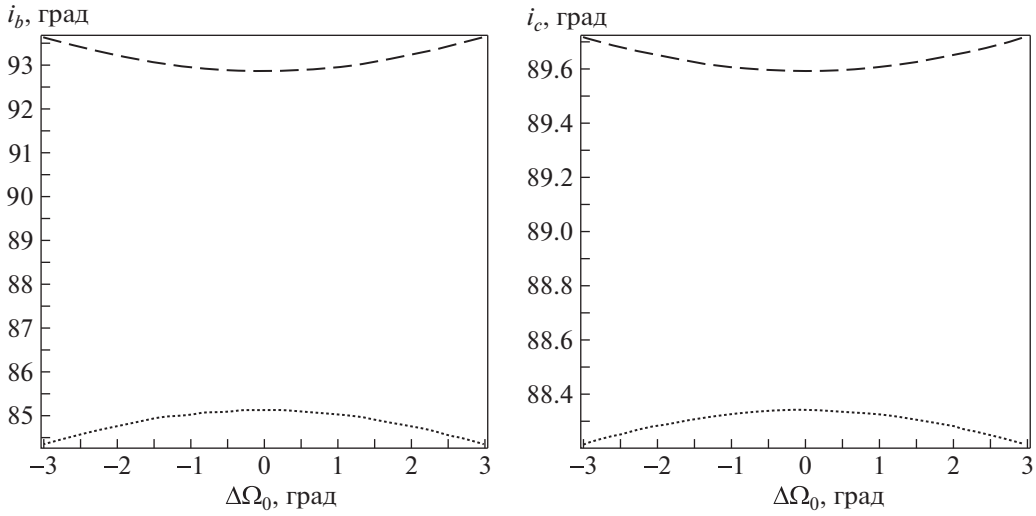

Рис. 9. Зависимость максимального (штрихи) и минимального (точки) либрационных значений наклонов орбит планеты *b* (левый график) и планеты *c* (правый график) к картинной плоскости от малой разностной долготы восходящего узла планет.

угол взаимного наклона орбит в линейном приближении остается постоянным.

Для проверки полученных решений в первом варианте была рассмотрена система Солнце–Юпитер–Сатурн. Здесь наши результаты расчетов вносят определенные поправки к тем, которые ранее были получены классическим общим методом через функцию возмущений Лагранжа [12, 13].

Проведенные расчеты весьма трудоемки, но это – характерная черта многих задач небесной механики. Подчеркнем, что оба представленных здесь варианта теории с круговыми кольцами Гаусса разработаны впервые.

Решения уравнений вековой эволюции орбит во втором варианте также были получены в аналитическом виде и затем протестированы на примере системы экзопланет Kepler-10b и Kepler-10c. Показано, что и в этой системе возмущающий момент сил вызывает прецессию и поворот плоскостей орбит планет. Почти все известные на сегодня двупланетные системы у других звезд имеют большие, близкие к 90° углы наклона плоскостей орбит. Это подчеркивает актуальность разработанного здесь двух вариантов метода изучения вековой эволюции орбит в двупланетных задачах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Г. Н. Дубошин*, *Небесная механика. Основные задачи и методы* (М.: Наука, 1975).
2. *М. Ф. Субботин*, *Введение в теоретическую астрономию* (М.: Наука, 1968).
3. *J. L. Laskar*, Astron. and Astrophys. **198**, 341 (1988).
4. *J. L. Simon, P. Bretagnon, J. Chapront, et al.*, Astron. and Astrophys. **282**, 663 (1994).
5. *К. В. Хошевников, Э. Д. Кузнецов*, Астрон. вестник **41**, № 4, 291 (2007).
6. *Б. П. Кондратьев*, Астрон. вестник **46**, № 5. 380 (2012).
7. *Б. П. Кондратьев, В. С. Корноухов*, Астрон. журн. **97**, №5, 408 (2020).
8. *B. P. Kondratyev*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **442**, 1755 (2014).
9. *Б. П. Кондратьев, В. С. Корноухов*, Астрон. журн. **98**, №7, 571 (2021).
10. *Б. П. Кондратьев*, Астрон. вестник **48**, № 5, 396, (2014).
11. *Х. Альвен, Г. Арениус*, *Эволюция Солнечной системы* (М.: Мир, 1979).
12. *К. Шарлье*, *Небесная механика* (М.: Наука, 1966).
13. *К. Мюррей, С. Дермотт*, *Динамика Солнечной системы* (М.: Физматлит, 2009).
14. *А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев*, *Интегралы и ряды* (М.: Физматлит, Т. 1, 2003).
15. *Б. П. Кондратьев Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями* (М.: Мир, 2007).
16. *V. Singh, et al.*, Astron. and Astrophys. **658**, A132 (2022).
17. *N. M. Batalha, et al.*, Astrophys J. **729**, 27 (2011).
18. *L. M. Weiss, L. A. Rogers, H. T. Isaacson, et al.*, Astrophys J. **819**, 83 (2016).
19. *X. Dumusque, et al.*, arXiv: 1405.7881, 2014, [astro-ph.EP].