

УДК 521.14

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА ЗЕМЛИ ПО МОДИФИЦИРОВАННЫМ СФЕРИЧЕСКИМ ГАРМОНИКАМ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ И ОЦЕНКИ ЕГО МОДЕЛЕЙ

© 2019 г. А. Н. Вершков^a, *, М. С. Петровская^a

^aГлавная (Пулковская) Астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: avershkov@mail.ru

Поступила в редакцию 13.11.2017 г.

После доработки 02.07.2018 г.

Принята к публикации 02.07.2018 г.

Производные потенциала Земли второго порядка в локальной северо-ориентированной системе координат разложены в ряды модифицированных сферических гармоник. Выведены линейные соотношения между спектральными коэффициентами этих рядов и спектром геопотенциала. На основе этих соотношений разработаны рекуррентные процедуры для оценки коэффициентов геопотенциала из спектра каждой производной и, наоборот, для имитации последнего из известной геопотенциальной модели. Очень простая структура производных выражений для производных удобна для оценки коэффициентов геопотенциала методом наименьших квадратов на определенном шаге обработки данных спутниковой градиентометрии. Так как новые ряды ортогональны, может быть применен метод с квадратурной формулой, который позволяет избежать ошибок алиасинга, вызванных усечением ряда. Спектральные коэффициенты производных оцениваются на основе полученных соотношений для различных моделей на средней орбитальной сфере спутника GOCE и других высотах над поверхностью Земли.

Ключевые слова: геопотенциал, гравитационное поле Земли, производные гравитационного потенциала, сферические гармоники, функции Лежандра

DOI: 10.1134/S0320930X19010079

ВВЕДЕНИЕ

Возьмем возмущающий потенциал Земли $T = V - U$, где V – полный гравитационный потенциал, а U – нормальный.

Вторые производные от потенциала T по координатам x, y, z рассматриваются в правосторонней локальной северо-ориентированной системе координат (ЛСК), где ось z направлена по геоцентрическому радиус-вектору, x направлена на север, а y на запад (Коор, 1993. Р. 182). Обычные разложения этих производных получены прямым дифференцированием сферического гармонического ряда для геопотенциала. Подробное рассмотрение такой процедуры и ее применение можно увидеть, например, в работе (Холшевников, 2007) и цитируемых в ней статьях. Эти разложения, за исключением радиальной производной, не удобны для обработки данных спутниковой градиентометрии, так как они зависят от производных первого и второго порядков присоединенных функций Лежандра и содержат

сингулярные множители, стремящиеся к бесконечности при приближении к полюсам.

Поскольку производные геопотенциала любого порядка ограничены и непрерывны во внешнем пространстве, то их можно разложить в ряд по различным ортогональным базисам. Rummel и van Gelderen (1992) разработали для производных второго порядка бесконечные ряды по трем видам тензорных сферических гармоник, определенных в их статья на стр. 161, 162. Rummel и Albertella построили усеченные ряды по биортогональным функциональным базисам (Rummel и др., 1993. Р. 2.44–2.50; Albertella и др., 1995a. Р. 350–361; 1995b. Р. 111–115).

Наиболее удобными для практического применения будут ряды для производных второго порядка по сферическим гармоникам. Такие ряды были построены для тангенциальных производных T_{xx}, T_{yy} и T_{xy} в работе (Petrovskaya и др., 2001). Для производных T_{xz} и T_{yz} в статье (Petrovskaya, Vershkov, 2004) были разработаны разложения по

модифицированным сферическим гармоникам, совпадающие с приведенными в настоящей работе.

Последующее численное исследование полученных результатов показало, что ряды для тангенциальных производных по стандартным сферическим гармоникам являются неоптимальными, так как они очень медленно сходятся. Поэтому в них необходимо учесть большее число членов для аппроксимации усеченных обычных разложений производных. В то же время усеченные ряды модифицированных сферических гармоник для T_{xz} и T_{yz} в точности равны усеченным обычным разложениям этих производных.

В процессе этого исследования, в работе (Petrovskaya, Vershkov, 2006), обозначим ее для краткости PV2006, получены альтернативные не-сингулярные выражения для производных, зависящие от присоединенных функций Лежандра (ПФЛ). Эти выражения не являются ортогональными, но они имеют простую структуру и удобны для применения в процедуре метода наименьших квадратов при обработке данных спутниковой градиентометрии. По сравнению с обычными сферическими гармоническими разложениями последний ряд не зависит от производных ПФЛ и не содержит сингулярных множителей.

На основе результатов, полученных в PV2006, в настоящей работе все усеченные обычные ряды для производных геопотенциала (за исключением T_{zz}) преобразуются в усеченные ряды модифицированных сферических гармоник. В отличие от исходных, модифицированные сферические гармоники ортогональны, и гармонические коэффициенты в новых разложениях могут быть определены по интегральным формулам. По сравнению со стандартными сферическими функциями $\bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta) \sin m\lambda$ и $\bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta) \cos m\lambda$ в модифицированных гармониках индексы у ПФЛ на одну или две единицы больше или меньше, чем в приведенных выше гармониках. Важно отметить, что степень усечения новых рядов такая же, как и для обычных рядов и рядов из PV2006.

В главе, следующей за Введением, рассмотрены различные формы разложений в локальной северо-ориентированной системе координат. В третьей главе установлено, что вводимые гармоники представляют собой ортогональные базисы, а в четвертой главе разработан метод построения соотношений между коэффициентами разложения геопотенциала и представлениями его вторых производных. В результате выведены простые рекуррентные соотношения между ними.

На основе этих соотношений можно решать две взаимно обратные задачи: моделировать спектры производных на основе известной геопотенциальной модели и оценивать коэффициенты геопотенциала из известного спектра каждой производной.

В разделе “Численные результаты” синтезируются спектральные коэффициенты новых рядов на основе смешанных геопотенциальных моделей высокой степени (до 2190) EGM2008 (Pavlis и др., 2012), EIGEN-6C4 (Shako и др., 2014) и модели GO_CONS_GCF_2_SPW_R5 (Gatti и др., 2016) (степень модели равна 330), построенной исключительно на основе спутниковых данных миссии GOCE, на средней орбитальной сфере спутника GOCE и высоте 10 км над поверхностью Земли. Проводится сравнение соответствующих дисперсий.

РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ РАЗЛОЖЕНИЙ ПРОИЗВОДНЫХ В ЛОКАЛЬНОЙ СЕВЕРО-ОРИЕНТИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рассмотрим усеченный ряд по сферическим гармоникам для возмущающего потенциала T

$$T = \frac{\mu}{a} \sum_{n=2}^N \sum_{|m|=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \bar{C}_{n,m} \bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda), \quad (1)$$

где $\bar{Y}_{n,m}$ сферические гармоники

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda) &= \bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta) Q_m(\lambda), \\ Q_m(\lambda) &= \begin{cases} \cos m\lambda, & m \geq 0 \\ \sin |m|\lambda, & m < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь r, θ, λ – сферические координаты. Величина $\mu = GM$ – гравитационная постоянная, умноженная на массу Земли, a – большая полуось эллипсоида относимости, $\bar{C}_{n,m}$ и $\bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta)$ представляют собой полностью нормированные коэффициенты потенциала и присоединенные функции Лежандра соответственно.

Из уравнения (1) вытекает разложение для радиальной производной второго порядка

$$T_{zz} = \frac{\mu}{a^3} \sum_{n=2}^N \sum_{|m|=0}^n (n+1)(n+2) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \bar{C}_{n,m} \bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda). \quad (3)$$

В этом и последующих уравнениях суммирование по $|m|$ означает использование как положительных, так и отрицательных значений m .

Приведем исходные выражения (5)–(9) из PV2006 для остальных производных:

$$\left. \begin{aligned}
 T_{xx} &= \frac{\mu}{a^3} \sum_{n=2}^N \sum_{|m|=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \times \\
 &\times \bar{C}_{n,m} \left[-(n+1) \bar{P}_{n,|m|}(\theta) + \frac{d^2 \bar{P}_{n,|m|}(\theta, \lambda)}{d\theta^2} \right] Q_m(\lambda), \\
 T_{yy} &= \frac{\mu}{a^3} \sum_{n=2}^N \sum_{|m|=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \times \\
 &\times \bar{C}_{n,m} \left[-(n+1) \bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \times \right. \\
 &\times \left. \frac{d \bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta)}{d\theta} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta) \right] Q_m(\lambda), \\
 T_{xy} &= \frac{\mu}{a^3} \sum_{n=2}^N \sum_{|m|=1}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} m \bar{C}_{n,-m} \times \\
 &\times \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d \bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta)}{d\theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta) \right] Q_m(\lambda), \\
 T_{xz} &= \frac{\mu}{a^3} \sum_{n=2}^N \sum_{|m|=0}^n (n+2) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \times \\
 &\times \bar{C}_{n,m} \frac{d \bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta)}{d\theta} Q_m(\lambda), \\
 T_{yz} &= \frac{\mu}{a^3} \sum_{n=2}^N \sum_{|m|=1}^n (n+2) m \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \times \\
 &\times \bar{C}_{n,-m} \frac{\bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta)}{\sin \theta} Q_m(\lambda).
 \end{aligned} \right\} (4)$$

Из них в PV2006 были получены следующие соотношения:

$$T_{xx} = \frac{\mu}{a^3} \sum_{n=2}^N \sum_{|m|=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \bar{C}_{n,m} Q_m(\lambda) \{ a_{n,m} \bar{P}_{n,|m|-2}(\cos \theta) + \} (5)$$

$$+ [b_{n,m} - (n+1)(n+2)] \bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta) + c_{n,m} \bar{P}_{n,|m|+2}(\cos \theta) \},$$

$$T_{yy} = -\frac{\mu}{a^3} \sum_{n=2}^N \sum_{|m|=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \bar{C}_{n,m} Q_m(\lambda) [a_{n,m} \bar{P}_{n,|m|-2}(\cos \theta) + \} (6)$$

$$+ b_{n,m} \bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta) + c_{n,m} \bar{P}_{n,|m|+2}(\cos \theta)],$$

$$T_{xy} = \frac{\mu}{a^3} \sum_{n=2}^N \sum_{|m|=1}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \bar{C}_{n,m} Q_m(\lambda) [d_{n,m} \bar{P}_{n-1,|m|-2}(\cos \theta) + \} (7)$$

$$+ g_{n,m} \bar{P}_{n-1,|m|}(\cos \theta) + h_{n,m} \bar{P}_{n-1,|m|+2}(\cos \theta)],$$

$$T_{xz} = \frac{\mu}{a^3} \sum_{n=2}^N \sum_{|m|=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \bar{C}_{n,m} Q_m(\lambda) \times (8)$$

$$\times [\beta_{n,m} \bar{P}_{n,|m|-1}(\cos \theta) + \gamma_{n,m} \bar{P}_{n,|m|+1}(\cos \theta)],$$

$$T_{yz} = \frac{\mu}{a^3} \sum_{n=2}^N \sum_{|m|=1}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \bar{C}_{n,m} Q_{-m}(\lambda) \times (9)$$

$$\times [\mu_{n,m} \bar{P}_{n-1,|m|-1}(\cos \theta) + \nu_{n,m} \bar{P}_{n-1,|m|+1}(\cos \theta)].$$

Численные постоянные для уравнений в (5)–(9) и последующих выражений приведены в Приложении Б.

По сравнению с уравнениями (4), выражения в (5)–(9) не зависят от производных ПФЛ и не содержат сингулярные множители $\sin^{-1} \theta$ и $\sin^{-2} \theta$.

В настоящей работе выведена третья форма производных геопотенциала. Запишем радиальную производную, определяемую уравнением (3), в следующем виде:

$$T_{zz} = \sum_{|m|=0}^N \sum_{n=\max\{2,|m|\}}^N \bar{R}_{n,m} \bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda), (10)$$

где величины

$$\bar{R}_{n,m} = \frac{\mu}{a^3} (n+1)(n+2) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \bar{C}_{n,m} (11)$$

введены вместо коэффициентов $\bar{C}_{n,m}$, чтобы упростить последующие преобразования.

Уравнения (5)–(9) для других производных будут преобразованы в ортогональные ряды по двум видам модифицированных сферических гармоник. Мы приводим эти ряды в данном разделе для более легкого сравнения различных выражений для каждой производной, а также для сравнения выражений для различных производных.

В настоящей работе будут получены следующие разложения:

$$T_{xx} = \sum_{|m|=0}^N \sum_{n=|m|}^{N+2} \bar{H}_{n,m} \bar{Z}_{n,m}(\theta, \lambda), (12)$$

$$T_{yy} = \sum_{|m|=0}^N \sum_{n=|m|}^{N+2} \bar{G}_{n,m} \bar{Z}_{n,m}(\theta, \lambda), (13)$$

$$T_{xy} = \sum_{|m|=1}^N \sum_{n=|m|}^{N+1} \bar{M}_{n,m} \bar{Z}_{n,m}(\theta, \lambda), (14)$$

$$T_{xz} = \sum_{|m|=0}^N \sum_{n=|m|}^{N+1} \bar{B}_{n,m} \bar{X}_{n,m}(\theta, \lambda), (15)$$

$$T_{yz} = \sum_{|m|=1}^N \sum_{n=|m|}^N \bar{A}_{n,m} \bar{X}_{n,m}(\theta, \lambda). (16)$$

Коэффициенты этих рядов зависят от r .

Модифицированные гармоники для тангенциальных производных определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z}_{n,m}(\theta, \lambda) &= \bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta) Q_m(\lambda), \\ |m| &= 0, 1, \\ \bar{Z}_{n,m}(\theta, \lambda) &= \bar{P}_{n-2,|m|-2}(\cos \theta) Q_m(\lambda), \\ |m| &= 2, 3, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Для производных T_{xz} и T_{yz} гармоники такие же, как в статье (Petrovskaya and Vershkov, 2004):

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_{n,0}(\theta, \lambda) &= \bar{P}_{n,1}(\cos \theta), \\ \bar{X}_{n,m}(\theta, \lambda) &= \bar{P}_{n-1,|m|-1}(\cos \theta) Q_m(\lambda), \\ |m| &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Давайте сравним модифицированные гармоники в (17) и (18) и обычные гармоники $\bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda)$, определяемые (2). Функции $\bar{Z}_{n,m}(\theta, \lambda)$ при $|m| = 0, 1$ совпадают с $\bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda)$. Для $|m| \neq 0, 1$ в $\bar{Z}_{n,m}(\theta, \lambda)$ индексы на 2 меньше, чем в $\bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda)$. Для $m = 0$ мы имеем $\bar{X}_{n,0}(\theta, \lambda) = \bar{P}_{n,1}(\cos \theta)$. Для $m \neq 0$ в $\bar{X}_{n,m}(\theta, \lambda)$ индексы в ПФЛ на 1 меньше, чем в $\bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda)$.

Легко установить, что гармоники $\bar{Z}_{n,m}(\theta, \lambda)$ и $\bar{X}_{n,m}(\theta, \lambda)$ в формулах (12)–(18) ортогональны, так же, как и обычные сферические гармоники $\bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda)$. Функции $\bar{Z}_{n,m}(\theta, \lambda)$ из (17), например, при $|m| = 0, 1$ представляют собой обычные гармоники $\bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda)$. Для $|m| = 2, 3, \dots, N$ эти функции так же ортогональны:

$$I_{n,m,l,k} = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \bar{Z}_{l,k}(\theta, \lambda) \bar{Z}_{n,m}(\theta, \lambda) d\sigma = \frac{1}{4\pi} \times \int_0^{2\pi} Q_k(\lambda) Q_m(\lambda) d\lambda \int_{-1}^1 \bar{P}_{l,|k|-2}(x) \bar{P}_{n,|m|-2}(x) dx = \delta_{k,m} \delta_{l,n}, \quad (19)$$

где σ это единичная сфера, $x = \cos \theta$, а $\delta_{p,q}$ – символ Кронекера. Подобное уравнение существует и для базисных функций $\bar{X}_{n,m}(\theta, \lambda)$ из (18). Так как модифицированные сферические гармоники ортогональны, то гармонические коэффициенты в уравнениях (12)–(16) могут быть определены по интегральным формулам. В частности, мы имеем

$$\bar{H}_{n,m} = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} T_{xx}(\theta, \lambda) \bar{Z}_{n,m}(\theta, \lambda) d\sigma. \quad (20)$$

ОБЩИЙ ПОДХОД К ВОССТАНОВЛЕНИЮ ОРТОГОНАЛЬНОГО БАЗИСА ПО МОДИФИЦИРОВАННЫМ СФЕРИЧЕСКИМ ГАРМОНИКАМ

Покажем, каким образом установлено, что функции в уравнениях (17) и (18) представляют

собой ортогональные базисы для производных второго порядка в ЛСК.

Во-первых, обратим внимание на характерные общие черты ПФЛ, входящих в уравнения (5)–(9). Выражения для производных T_{xx} и T_{yy} в уравнениях (5) и (6) имеют совершенно одинаковый вид, отличающийся только численными коэффициентами. Если в уравнении (7) для T_{xy} индекс внутреннего суммирования заменить с $n - 1$ на n то тогда выражение в квадратных скобках будет иметь вид, аналогичный выражениям в уравнениях (5) и (6). Это верно и для производных T_{xz} и T_{yz} в уравнениях (8) и (9). Другой общей чертой производных является то, что в каждом члене ряда в уравнениях (5)–(9) ПФЛ имеют вторые индексы (порядки) одинаковой четности, т.е. все они либо четные, либо нечетные. Вторые индексы в соседних ПФЛ отличаются друг от друга на две единицы.

В качестве примера, мы покажем, почему базис, определяемый уравнением (17), выбран для разложения производной T_{xx} . Приведенные выше общие черты уравнений (5)–(9) позволят распространить выводы, относящиеся к T_{xx} , на другие производные.

Выражение для T_{xx} в (5) зависит от функций $\bar{P}_{n,|m|-2}(\cos \theta)$, $\bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta)$ и $\bar{P}_{n,|m|+2}(\cos \theta)$. Сначала мы преобразуем последнюю функцию в линейное выражение, зависящее от функций $\bar{P}_{k,|m|}(\cos \theta)$. Тогда последние функции и приведенная выше функция $\bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta)$ будут представлены в виде линейных выражений относительно $\bar{P}_{l,|m|-2}(\cos \theta)$. Последняя процедура применяется только для $|m| = 2, 3, \dots, N$, так как для $|m| = 0, 1$ выражение в уравнении (5) не зависит от $\bar{P}_{n,|m|-2}(\cos \theta)$ (см. комментарий ниже).

Мы исходим из уравнения (54) в (Claessens, 2005) для ненормированных ПФЛ, в которых $n + 1$ заменено на k и $m \geq 0$,

$$P_{k,m+2} = P_{k-2,m+2} - (k - m - 1)(k - m)P_{k,m} + (k + m - 1)(k + m)P_{k-2,m}. \quad (21)$$

Так как $P_{k,m+2} = 0$ для $k < m + 2$, то рассматривается случай, когда $k = m + 2$, $m + 3, \dots, n$.

Когда индекс n в уравнении (5) имеет ту же четность, что и m , мы подставляем в уравнении (21) $k = m + 2$. В другом случае производится замена $k = m + 3$. В результате получаются следующие начальные соотношения:

$$P_{m+2,m+2} = -2P_{m+2,m} + (2m + 1)(2m + 2)P_{m,m} \quad (22)$$

и

$$P_{m+3,m+2} = -6P_{m+3,m} + (2m + 2)(2m + 3)P_{m+1,m}. \quad (23)$$

Видно, что в правых частях уравнений (22) и (23) все ПФЛ имеют один и тот же второй индекс m , который на две единицы меньше чем в ПФЛ в левых частях. Первые индексы в этих ПФЛ равны или меньше первых индексов ПФЛ в левых частях.

Ограничимся случаем, соответствующим уравнению (22), поскольку в случае, соответствующем уравнению (23), преобразования будут схожими. После подстановки в (21) $k = m + 4$, получаем

$$P_{m+4,m+2} = P_{m+2,m+2} - 12P_{m+4,m} + (2m + 3)(2m + 4)P_{m+2,m}. \quad (24)$$

Подстановка (22) в уравнение (24) дает

$$P_{m+4,m+2} = -12P_{m+4,m} + 2(2m^2 + 7m + 5)P_{m+2,m} + (2m + 1)(2m + 2)P_{m,m}. \quad (25)$$

Видно, что это уравнение имеет форму, сходную с (22).

Описанную выше процедуру преобразования уравнения (21) в уравнения (22) и (25) можно повторить для $k = m + 6, m + 8, \dots, n$. В результате, после перехода к нормированным ПФЛ, функция $\bar{P}_{n,|m|+2}$ в уравнении (5) будет представлено в виде линейной комбинации функций $\bar{P}_{k,|m|}$, в которой $k \leq n$ и k имеют одинаковую четность с n .

Рассмотрим часть уравнения (5), в которой $|m| = 2, 3, \dots, N$. После замены в уравнении (21) $m + 2$ на m преобразования, аналогичные приведенным выше, могут быть выполнены относительно функций $\bar{P}_{n,|m|}$ из (5) и функций $\bar{P}_{k,|m|}$, входящих в это выражение для $\bar{P}_{n,|m|+2}$. Все эти функции будут представлены в виде линейных комбинаций $\bar{P}_{l,|m|-2}$. В результате для каждого фиксированного $|m|$ все выражение для $|m| \geq 2$ в уравнении (5) можно преобразовать в ортогональный ряд относительно $\bar{P}_{n,|m|-2}$, которая соответствует второй функции из базиса в (17).

Равенство $a_{n,m} = 0$ в (5) для $|m| = 0, 1$ (см. Приложение Б) приводит к исчезновению функции $\bar{P}_{n,|m|-2}$ из той части этого уравнения, которая соответствует $|m| = 0, 1$. Как следствие, выражение в уравнении (5) для $|m| = 0, 1$ превращается в обычный сферический гармонический ряд.

Принимая во внимание комментарии в начале этого раздела, касающиеся общих черт уравнений (5)–(9), и приведенные выше результаты для T_{xx} , можно сделать вывод, что ортогональный базис для каждой производной в ЛСК определяется

ПФЛ в его выражении, которое имеет наименьший второй индекс среди других ПФЛ.

ЛИНЕЙНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СПЕКТРАМИ ПРОИЗВОДНЫХ И ГЕОПОТЕНЦИАЛА

Общий подход к построению спектральных соотношений для тангенциальных производных

Уравнения (5)–(7) и (12)–(14) для тангенциальных производных будут использоваться в качестве исходных для получения линейных соотношений между коэффициентами соответствующих разложений (для краткости будем называть их в дальнейшем спектральными соотношениями). Мы вкратце опишем преобразования для этих производных на примере T_{yy} , так как уравнение (6) несколько проще уравнения (5) для T_{xx} . Благодаря сходной структуре уравнений (5)–(7) и общего функционального базиса, определяемого уравнением (17), преобразования для T_{xx} и T_{xy} будут совершенно одинаковыми.

Два выражения для T_{yy} преобразуются совместно, одно из них представлено уравнением (6), а другое – формулой (13). Первое выражение обозначается как \tilde{T}_{yy} , а второе – как \hat{T}_{yy} . В этих уравнениях переходим к ненормированным величинам и умножаем каждое уравнение на $\sin^2 \theta$. Затем функции $\sin^2 \theta \tilde{T}_{yy}$ и $\sin^2 \theta \hat{T}_{yy}$ преобразуются в обычные сферические гармонические ряды с применением известных соотношений (приведенные ниже) между соседними ПФЛ. После возвращения к нормированным величинам в полученном ряду для $\sin^2 \theta \tilde{T}_{yy}$ нормированные гармонические коэффициенты $\tilde{D}_{n,m}(\bar{R}_{k,l})$ будут линейными функциями величин $\bar{R}_{k,l}$, связанных с коэффициентами геопотенциала $\bar{C}_{k,l}$ по формуле (11). В разложении для $\sin^2 \theta \hat{T}_{yy}$ соответствующие коэффициенты $\hat{D}_{n,m}(\bar{G}_{p,q})$ будут линейными функциями коэффициентов $\bar{G}_{p,q}$ ряда (13).

Таким образом, эти обычные ряды по сферическим гармоникам будут иметь вид

$$\sin^2 \theta \tilde{T}_{yy} = \sum_{|m|=0}^N \sum_{n=\max\{2,|m|\}}^{N+2} \tilde{D}_{n,m}(\bar{R}_{k,l}) \bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda), \quad (26)$$

и

$$\sin^2 \theta \hat{T}_{yy} = \sum_{|m|=0}^N \sum_{n=\max\{2,|m|\}}^{N+2} \hat{D}_{n,m}(\bar{G}_{p,q}) \bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda). \quad (27)$$

Так как $\hat{T}_{yy} = \tilde{T}_{yy}$, то из уравнений (26) и (27) следует равенство

$$\hat{D}_{n,m}(\bar{G}_{p,q}) = \tilde{D}_{n,m}(\bar{R}_{k,l}) = \bar{D}_{n,m}. \quad (28)$$

Представим уравнение (28) в виде двух наборов линейных соотношений, связывающих величины $\bar{G}_{p,q}$ и величины $\bar{R}_{k,l}$,

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{n,m}(\bar{R}_{k,l}) &= \bar{D}_{n,m}, \\ |m| &= 0, 1, \dots, N, \quad n = \max\{2, |m|\}, \dots, N+2 \end{aligned} \quad (29)$$

и

$$\begin{aligned} \hat{D}_{n,m}(\bar{G}_{p,q}) &= \bar{D}_{n,m}, \\ |m| &= 0, 1, \dots, N, \quad n = |m|, \dots, N+2. \end{aligned} \quad (30)$$

На основании уравнений (29) и (30), можно решить две взаимно обратные задачи. В одной из них известные величины $\bar{R}_{k,l}$ подставляются в левые части соотношений из (29), а затем вычисляются соответствующие величины $\bar{D}_{n,m}$. После подстановки найденных $\bar{D}_{n,m}$ в соотношения из (30) последняя система уравнений решается относительно $\bar{G}_{p,q}$ с помощью рекуррентной процедуры для каждого фиксированного m и переменного n . Обратная процедура имеет сходный вид. Она начинается с уравнения (30), в которое подставляются $\bar{G}_{p,q}$, полученные по данным спутниковой градиентометрии. Эта процедура заканчивается решением рекуррентных уравнений из (29) относительно неизвестных величин $\bar{R}_{k,l}$.

Ниже приведены соотношения, которые позволяют преобразовать левые части уравнений (26) и (27) в обычный сферический гармонический ряд из правых частей.

После подстановки в левые части уравнений (26) и (27) выражения для \tilde{T}_{yy} из уравнения (6) и выражение для \hat{T}_{yy} из уравнения (13), перейдем к ненормированным величинам. Полученные выражения в левых частях этих уравнений будут зависеть от функций

$$\sin^2 \theta P_{n,|m|-2}(\theta), \quad \sin^2 \theta P_{n,|m|}(\theta), \quad \sin^2 \theta P_{n,|m|+2}(\theta). \quad (31)$$

Каждая из этих функций преобразуется в линейную функцию от $P_{k,|m|}$ при применении следующих уравнений.

В статье (Claessens, 2005) есть следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta P_{n,|m|} &= \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} P_{n+2,|m|+2} - \\ &- \frac{2}{(2n-1)(2n+3)} P_{n,|m|+2} + \\ &+ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} P_{n-2,|m|+2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Мы применим также уравнение (15) из этой же статьи

$$\sin^2 \theta P_{n,|m|} = \tilde{a}_{n,m} P_{n+2,|m|} + \tilde{b}_{n,m} P_{n,|m|} + \tilde{c}_{n,m} P_{n-2,|m|}. \quad (33)$$

В статье (Плк, 1983) есть уравнение (Z.1.39)

$$\begin{aligned} \sin \theta P_{n,|m|} &= \frac{(n+|m|)(n+|m|-1)}{(2n+1)} P_{n-1,|m|-1} - \\ &- \frac{(n-|m|+1)(n-|m|+2)}{(2n+1)} P_{n+1,|m|-1}. \end{aligned} \quad (34)$$

Используем формулу (32) для преобразования первой функции из уравнения (31) и формулу (33) для второй функции. Обе функции преобразуются в линейные функции от $P_{k,|m|}$. Последняя функция в уравнении (31) преобразуется в два этапа по формуле (34). Сначала в уравнении (34) индекс $|m|$ изменяется на $|m|+2$, а затем уравнение умножается на $\sin \theta$. В полученном выражении для $\sin^2 \theta P_{n,|m|+2}$ правая часть становится линейной функцией от $\sin \theta P_{k,|m|+1}$. После применения уравнения (34) для каждой из последних функций полученное выражение для $\sin^2 \theta P_{n,|m|+2}$ превращается в линейную функцию от $P_{l,|m|}$.

После перехода в полученных выражениях в левых частях уравнений (26) и (27) к нормированным величинам были получены ряды в правых частях.

Более подробная демонстрация предлагаемого подхода на примере T_{yy}

На основании уравнений (26) и (28) в явном виде получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \sum_{|m|=0}^N \sum_{n=\max\{2,|m|\}}^{N+2} \bar{D}_{n,m} \bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda) &= \sum_{|m|=0}^N \sum_{n=\max\{4,|m|+2\}}^{N+2} \bar{g}_{n,m} \bar{R}_{n-2,m} \times \\ &\times \bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda) - \sum_{|m|=0}^N \sum_{n=\max\{2,|m|\}}^N \bar{h}_{n,m} \bar{R}_{n,m} \bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda). \end{aligned} \quad (35)$$

После приравнивания коэффициентов гармоник с обеих сторон уравнения (35) выведен набор

линейных соотношений, соответствующий уравнению (29),

$$\left. \begin{aligned} -\bar{h}_{\bar{m},m}\bar{R}_{\bar{m},m} &= \bar{D}_{\bar{m},m} \\ -\bar{h}_{\bar{m}+1,m}\bar{R}_{\bar{m}+1,m} &= \bar{D}_{\bar{m}+1,m} \\ \bar{g}_{\bar{m}+2,m}\bar{R}_{\bar{m},m} - \bar{h}_{\bar{m}+2,m}\bar{R}_{\bar{m}+2,m} &= \bar{D}_{\bar{m}+2,m} \\ \bar{g}_{\bar{m}+3,m}\bar{R}_{\bar{m}+1,m} - \bar{h}_{\bar{m}+3,m}\bar{R}_{\bar{m}+3,m} &= \bar{D}_{\bar{m}+3,m} \\ \dots \\ \bar{g}_{N-2,m}\bar{R}_{N-4,m} - \bar{h}_{N-2,m}\bar{R}_{N-2,m} &= \bar{D}_{N-2,m} \\ \bar{g}_{N-1,m}\bar{R}_{N-3,m} - \bar{h}_{N-1,m}\bar{R}_{N-1,m} &= \bar{D}_{N-1,m} \\ \bar{g}_{N,m}\bar{R}_{N-2,m} - \bar{h}_{N,m}\bar{R}_{N,m} &= \bar{D}_{N,m} \\ \bar{g}_{N+1,m}\bar{R}_{N-1,m} &= \bar{D}_{N+1,m} \\ \bar{g}_{N+2,m}\bar{R}_{N,m} &= \bar{D}_{N+2,m} \\ |m| &= 0, 1, \dots, N, \quad \bar{m} = \max\{2, |m|\}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Выражение в уравнении (13) для производной \hat{T}_{yy} представлено в виде

$$\hat{T}_{yy} = \hat{T}_{yy}^{(1)} + \hat{T}_{yy}^{(2)}, \quad (37)$$

где $\hat{T}_{yy}^{(1)}$ соответствует $|m| = 0, 1$, а $\hat{T}_{yy}^{(2)}$ — $|m| = 2, 3, \dots, N$. Из (13) и (17) следует, что

$$\hat{T}_{yy}^{(1)} = \sum_{|m|=0}^1 \sum_{n=|m|}^{N+2} \bar{G}_{n,m} \bar{P}_{n,|m|}(\cos \theta) Q_m(\lambda) \quad (38)$$

и

$$\hat{T}_{yy}^{(2)} = \sum_{|m|=2}^N \sum_{n=|m|}^{N+2} \bar{G}_{n,m} \bar{P}_{n-2,|m|-2}(\cos \theta) Q_m(\lambda). \quad (39)$$

Уравнение (27) для функции $\hat{T}_{yy}^{(1)}$ выглядит так:

$$\sin^2 \theta \hat{T}_{yy}^{(1)} = \sum_{|m|=0}^1 \sum_{n=|m|}^{N+2} \hat{D}_{n,m}(\bar{G}_{p,q}) \bar{Y}_{n,m}. \quad (40)$$

После применения уравнения (30) это уравнение принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_{|m|=0}^1 \sum_{n=|m|}^{N+2} \bar{D}_{n,m} \bar{Y}_{n,m} &= - \sum_{|m|=0}^1 \sum_{n=4}^{N+2} \bar{a}_{n,m} \bar{G}_{n-2,m} \bar{Y}_{n,m} + \\ &+ \sum_{|m|=0}^1 \sum_{n=2}^N \bar{b}_{n,m} \bar{G}_{n,m} \bar{Y}_{n,m} - \sum_{|m|=0}^1 \sum_{n=2}^{N-2} \bar{c}_{n,m} \bar{G}_{n+2,m} \bar{Y}_{n,m} + \\ &+ \left(\frac{2}{3} \bar{G}_{0,0} - \frac{2}{3\sqrt{5}} \bar{G}_{2,0} \right) \bar{Y}_{0,0} + \left(\frac{2}{5} \bar{G}_{1,0} - \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{7}} \bar{G}_{3,0} \right) \bar{Y}_{1,0} + \quad (41) \\ &+ \left(\frac{4}{5} \bar{G}_{1,1} - \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}} \bar{G}_{3,1} \right) \bar{Y}_{1,1} + \left(\frac{4}{5} \bar{G}_{1,-1} - \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}} \bar{G}_{3,-1} \right) \bar{Y}_{1,-1} - \\ &- \frac{2}{3\sqrt{5}} \bar{G}_{0,0} \bar{Y}_{2,0} - \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{7}} \bar{G}_{1,0} \bar{Y}_{3,0} - \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}} \bar{G}_{1,1} \bar{Y}_{3,1} - \\ &- \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}} \bar{G}_{1,-1} \bar{Y}_{3,-1}. \end{aligned}$$

Мы видим, что в (41) и, следовательно, в (38) и (13)

$$\bar{G}_{N+1,m} = \bar{G}_{N+2,m} = 0, \quad |m| = 0, 1. \quad (42)$$

Поскольку в уравнении (35) нет гармоник нулевой и первой степеней, то в уравнении (41) должны выполняться равенства

$$\bar{G}_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{5}} \bar{G}_{2,0}, \quad \bar{G}_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{7}} \bar{G}_{3,0}, \quad \bar{G}_{1,m} = \frac{1}{\sqrt{14}} \bar{G}_{3,m}, \quad (43)$$

$$|m| = 1.$$

Подставим выражения из (43) в последние четыре члена в уравнении (41). Затем преобразованные члены добавляются ко второй сумме в правой части уравнения (41).

После приравнивания гармонических коэффициентов с обеих сторон преобразованного уравнения (41) получается линейная система соотношений, соответствующая уравнению (30) при $|m| = 0, 1$,

$$\left. \begin{aligned} \bar{b}_{2,m}^* \bar{G}_{2,m} - \bar{c}_{2,m} \bar{G}_{4,m} &= \bar{D}_{2,m} \\ \bar{b}_{3,m}^* \bar{G}_{3,m} - \bar{c}_{3,m} \bar{G}_{5,m} &= \bar{D}_{3,m} \\ -\bar{a}_{4,m} \bar{G}_{2,m} + \bar{b}_{4,m}^* \bar{G}_{4,m} - \bar{c}_{4,m} \bar{G}_{6,m} &= \bar{D}_{4,m} \\ -\bar{a}_{5,m} \bar{G}_{3,m} + \bar{b}_{5,m}^* \bar{G}_{5,m} - \bar{c}_{5,m} \bar{G}_{7,m} &= \bar{D}_{5,m} \\ \dots \\ -\bar{a}_{N-2,m} \bar{G}_{N-4,m} + \bar{b}_{N-2,m}^* \bar{G}_{N-2,m} - \bar{c}_{N-2,m} \bar{G}_{N,m} &= \bar{D}_{N-2,m} \\ -\bar{a}_{N-1,m} \bar{G}_{N-3,m} + \bar{b}_{N-1,m}^* \bar{G}_{N-1,m} &= \bar{D}_{N-1,m} \\ -\bar{a}_{N,m} \bar{G}_{N-2,m} + \bar{b}_{N,m}^* \bar{G}_{N,m} &= \bar{D}_{N,m} \\ -\bar{a}_{N+1,m} \bar{G}_{N-1,m} &= \bar{D}_{N+1,m} \\ -\bar{a}_{N+2,m} \bar{G}_{N,m} &= \bar{D}_{N+2,m} \\ |m| &= 0, 1. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Уравнение (27) для функции $\hat{T}_{yy}^{(2)}$ имеет вид, соответствующий уравнению (39),

$$\sin^2 \theta \hat{T}_{yy}^{(2)} = \sum_{|m|=2}^N \sum_{n=|m|}^{N+2} \hat{D}_{n,m}(\bar{G}_{p,q}) \bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda). \quad (45)$$

После применения уравнения (30) равенство (45) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_{|m|=2}^N \sum_{n=|m|}^{N+2} \bar{D}_{n,m} \bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda) &= \sum_{|m|=2}^N \sum_{n=|m|}^{N+2} \bar{a}_{n,m} \bar{G}_{n,m} \bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda) + \\ &+ \sum_{|m|=2}^N \sum_{n=|m|}^N \bar{b}_{n,m} \bar{G}_{n+2,m} \bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda) + \quad (46) \\ &+ \sum_{|m|=2}^{N-2} \sum_{n=|m|}^{N-2} \bar{c}_{n,m} \bar{G}_{n+4,m} \bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda). \end{aligned}$$

Приравнивая гармонические коэффициенты с обеих сторон уравнения (46), мы в явном виде получаем набор линейных соотношений

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{\bar{m},m} \bar{G}_{\bar{m},m} + \bar{b}_{\bar{m},m} \bar{G}_{\bar{m}+2,m} + \bar{c}_{\bar{m},m} \bar{G}_{\bar{m}+4,m} &= \bar{D}_{\bar{m},m} \\ \bar{a}_{\bar{m}+1,m} \bar{G}_{\bar{m}+1,m} + \bar{b}_{\bar{m}+1,m} \bar{G}_{\bar{m}+3,m} + \bar{c}_{\bar{m}+1,m} \bar{G}_{\bar{m}+5,m} &= \bar{D}_{\bar{m}+1,m} \\ \dots \\ \bar{a}_{N-2,m} \bar{G}_{N-2,m} + \bar{b}_{N-2,m} \bar{G}_{N,m} + \bar{c}_{N-2,m} \bar{G}_{N+2,m} &= \\ = \bar{D}_{N-2,m} \\ \bar{a}_{N-1,m} \bar{G}_{N-1,m} + \bar{b}_{N-1,m} \bar{G}_{N+1,m} &= \bar{D}_{N-1,m} \\ \bar{a}_{N,m} \bar{G}_{N,m} + \bar{b}_{N,m} \bar{G}_{N+2,m} &= \bar{D}_{N,m} \\ \bar{a}_{N+1,m} \bar{G}_{N+1,m} &= \bar{D}_{N+1,m} \\ \bar{a}_{N+2,m} \bar{G}_{N+2,m} &= \bar{D}_{N+2,m} \\ |m| = 2, 3, \dots, N, \quad \bar{m} = |m|. \end{aligned} \right\} (47)$$

С использованием уравнений (36), (44) и (47) можно решить две взаимно обратные задачи, описанные после уравнения (30) в разделе “Общий подход...”. Эти наборы линейных отношений решаются для каждого фиксированного m рекуррентными процедурами, начиная с двух последних уравнений в каждой системе. Первые два соотношения в уравнениях (36) и (44) не используются.

Величины в (43) вычисляются после решения уравнений (44) относительно $\bar{G}_{p,q}$. Таким образом, синтезируются коэффициенты в уравнении (13) для нулевой и первой степеней. Однако уравнение (43) не используется для вычисления величин $\bar{R}_{k,l}$, которые полностью определяются из уравнения (36).

Условие (42) должно быть учтено в уравнении (13) для $|m| = 0, 1$.

Спектральные соотношения для производных T_{xx} , T_{xy} , T_{xz} , T_{yz}

Производная T_{xx} представлена уравнениями (5) и (12). Основываясь на этих выражениях и выполняя процедуры, описанные в двух предыдущих разделах, мы получили линейные соотношения, связывающие гармонические коэффициенты $\bar{H}_{n,m}$ этой производной и величины $\bar{R}_{n,m}$, представляющие коэффициенты геопотенциала $\bar{C}_{n,m}$ согласно уравнению (11). Эти соотношения представлены формулами (50)–(55) в Приложении А. Аналогичным образом из уравнений (7) и (14) были получены спектральные соотношения для производной T_{xy} . Эти соотношения представлены уравнениями (56)–(59) в Приложении А.

Для производной T_{xz} в качестве исходных возьмем уравнения (8) и (15), а для T_{yz} – уравнения (9) и (16). Процедуры получения спектральных соот-

ношений для T_{xz} и T_{yz} аналогичны тем, что применялись для тангенциальных производных и описаны в разделе “Общий подход...”. Отличие в том, что для T_{xz} и T_{yz} исходные уравнения умножаются не на $\sin^2 \theta$, а на $\sin \theta$. Соответственно, вместо функций из (31), функции

$$\sin \theta P_{n,|m|-1}, \quad \sin \theta P_{n,|m|+1} \quad (48)$$

были преобразованы в линейные комбинации функций Лежандра $P_{k,|m|}$. Для этого мы использовали уравнение (Z.1.40) из работы (Илк, 1983)

$$\sin \theta P_{n,|m|} = \frac{1}{2n+1} (P_{n+1,|m|+1} - P_{n-1,|m|+1}) \quad (49)$$

и уравнение (34) этой статьи.

Результирующие линейные соотношения для T_{xz} и T_{yz} приведены в Приложении А. Это уравнения (60)–(62) и (63), (64). Отметим, что уравнения для T_{yz} , входящие в (63), явно разрешены относительно величин $\bar{R}_{n,m}$, представляющих коэффициенты разложения геопотенциала $\bar{C}_{n,m}$ (уравнение (11)).

В предыдущем разделе была описана схема применения полученных линейных соотношений для производной T_{yy} . Для производной T_{xx} она выглядит следующим образом:

– если по известной модели нам нужно вычислить производную, то мы по известным $\bar{R}_{n,m}$ при помощи уравнений (50) и (52) вычисляем коэффициенты $\bar{K}_{n,m}$, а потом по ним с помощью рекуррентной процедуры по соотношениям (51), (53)–(55) получаем искомые коэффициенты разложения производной $\bar{H}_{n,m}$;

– когда мы по измерениям производной хотим построить разложение потенциала, то по известным величинам $\bar{H}_{n,m}$ с помощью формул (51), (53)–(55) вычисляем промежуточные коэффициенты $\bar{K}_{n,m}$, а затем применяем рекуррентную процедуру к соотношениям (50) и (52).

Для производных T_{xy} , T_{xz} и T_{yz} применяются аналогичные схемы с использованием уравнений (56)–(64).

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассматривался возмущающий потенциал T , являющийся разницей между геопотенциальной моделью и нормальным полем GRS80 (Moritz, 1980). Новые выражения для производных второго порядка потенциала, определяемые уравнениями (12)–(16), были проверены численно. С помощью рекуррентных соотношений, приведенных в разделе “Более подробная демонстрация...”

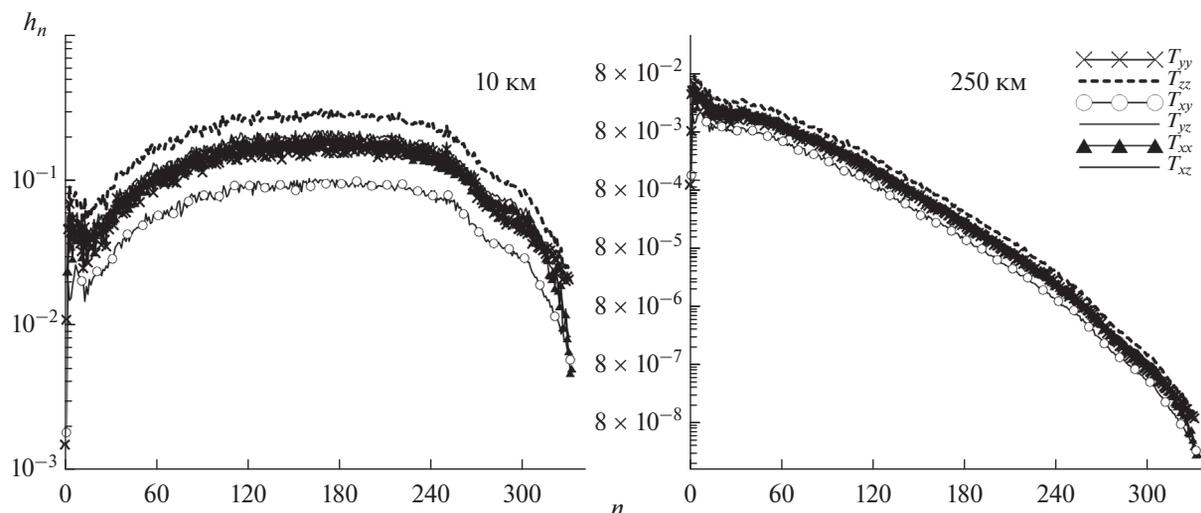


Рис. 1. Среднеквадратические дисперсии h_n (в этвешах) для производных T_{xx} , T_{yy} , T_{zz} , T_{xz} , T_{yz} и T_{xy} , вычисленные по модели геопотенциала GO_CONS_GCF_2_SPW_R5 на высотах 10 и 250 км.

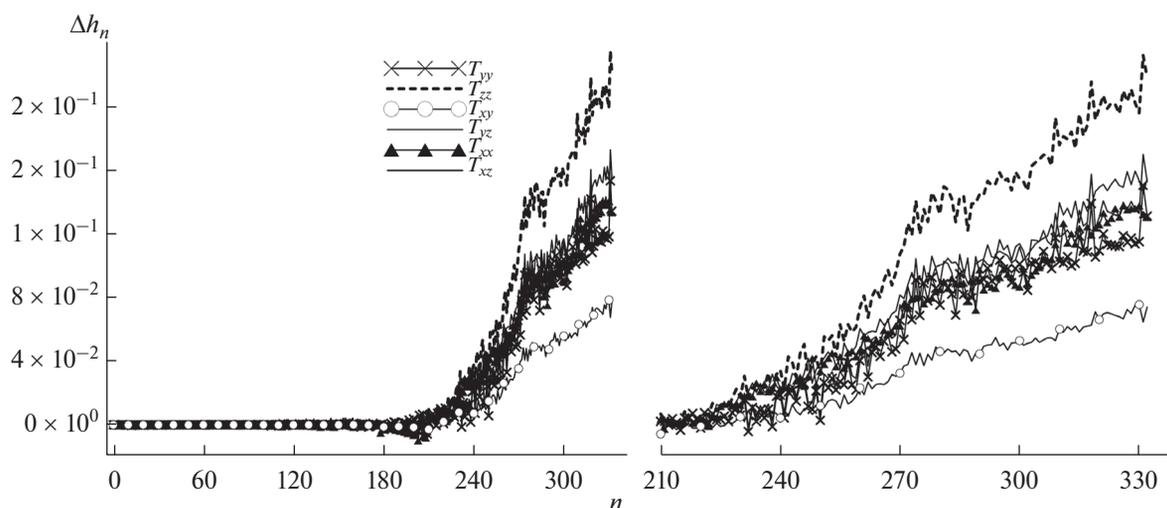


Рис. 2. Разность среднеквадратических дисперсий Δh_n (в этвешах), соответствующих моделям GO_CONS_GCF_2_SPW_R5 и EIGEN-6C4 на высоте 10 км.

и Приложении А, на основе модели EGM2008, были синтезированы спектральные коэффициенты этих производных. После подстановки этих коэффициентов в уравнения (12)–(16) были вычислены производные на множестве точек на средней орбитальной сфере для спутника GOCE (на высоте $h = 250$ км). Широты точек тестирования изменяются от нуля до 90° для обоих полушарий. Совпадение производных, вычисленных с помощью уравнений (12)–(16) и (5)–(9) было установлено с точностью 10^{-30} Е, где Е – единица Этвеша. Таким образом, была подтверждена правильность новых разложений.

Из спектров производных, соответствующих модели GO_CONS_GCF_2_SPW_R5, были вычислены на высотах 10 и 250 км степенные среднеквадратические дисперсии (СД) $h_n = \sqrt{\sum_{|m|=0}^n F_{n,m}^2}$ (где $F_{n,m}$ – спектральные коэффициенты соответствующей производной), которые представлены на рис. 1. Как и следовало ожидать, дисперсии для T_{zz} имеют максимальную мощность и минимальную для T_{xy} , по сравнению с другими производными. Для последних производных кривые очень близки друг к другу.

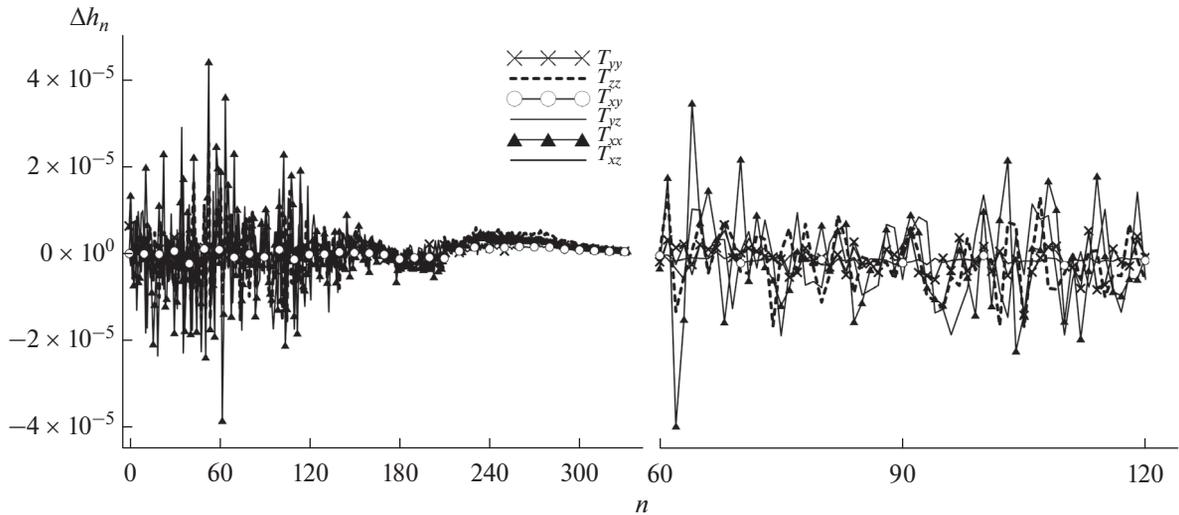


Рис. 3. Разность среднеквадратических дисперсий Δh_n (в этвешах), соответствующих моделям GO_CONS_GCF_2_SPW_R5 и EIGEN-6C4 на высоте 250 км.

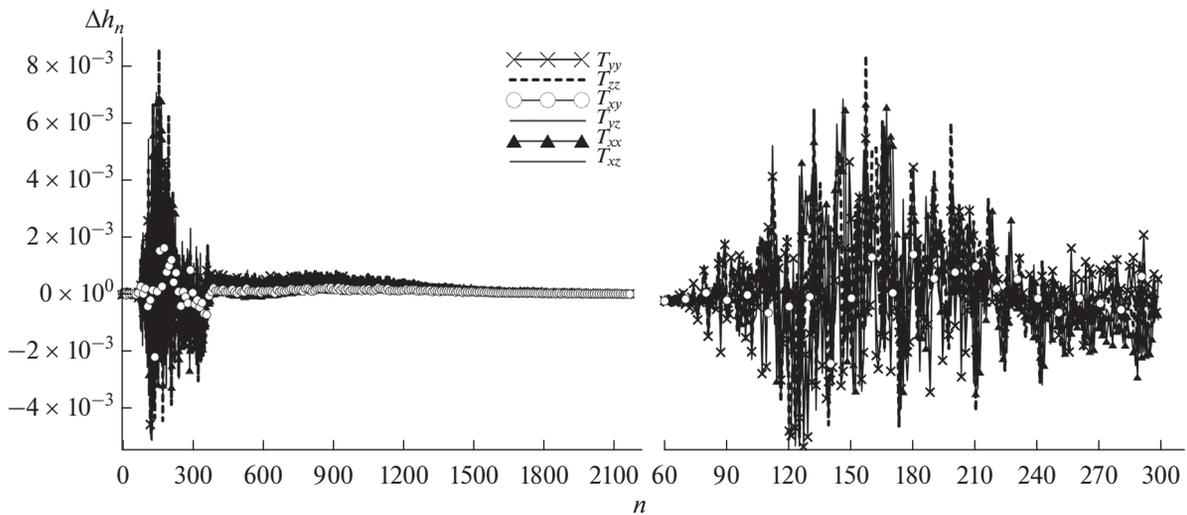


Рис. 4. Разность среднеквадратических дисперсий Δh_n (в этвешах), соответствующих моделям EGM2008 и EIGEN-6C4 на высоте 10 км.

Ортогональные ряды, определяемые уравнениями (12)–(16), могут быть применены для сравнения подробных характеристик производных, соответствующих различным моделям. Наряду с EGM2008 и спутниковой моделью по данным GOCE была рассмотрена одна из новейших смешанных моделей высокого порядка EIGEN-6C4, которая объединяет данные спутниковых миссий CHAMP, GRACE и GOCE, а также использует наземные данные. Мы сравнили (до степени 330) среднеквадратичные дисперсии для производ-

ных, вычисленные по моделям GO_CONS_GCF_2_SPW_R5 и EIGEN-6C4. Как можно видеть на рис. 2 и 3, где представлены разности соответствующих h_n , для высоты 10 км существенное отличие спектров проявляется, начиная со степеней $n \geq 180$, а на высоте 250 км главное отличие моделей проявляется в диапазоне от 0 до 180.

Так же на рис. 4 и 5 представлены взаимные различия в СД для моделей EGM2008 и EIGEN-6C4 на всем диапазоне их спектральных коэффи-

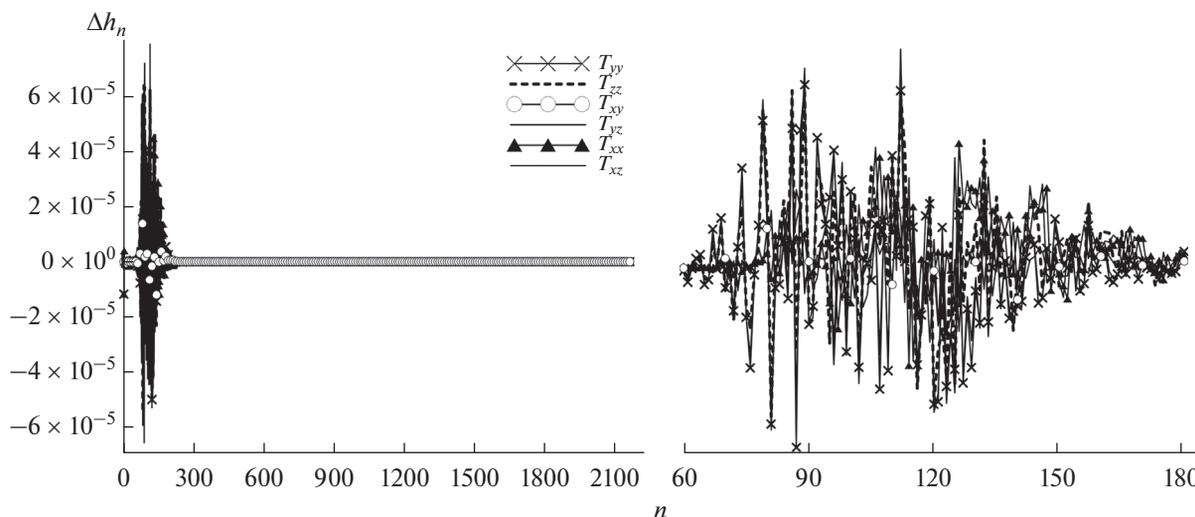


Рис. 5. Разность среднеквадратических дисперсий Δh_n (в этвешах), соответствующих моделям EGM2008 и EIGEN-6C4 на высоте 250 км.

циентов. Хорошо видно, что основные различия на высоте 250 км находятся в диапазоне $[0, 360]$, а при уменьшении высоты проявляются и на более высоких гармониках.

Заметим, что более разумно сравнивать СД, соответствующие гравитационным градиентам (ГГ), а не гравитационной аномалии или отклонения от геоида. Из-за дополнительного дифференцирования геопотенциала, в гармонических коэффициентах ГГ появляются дополнительные множители n и n^2 , повышающие вклад высоких гармоник. Таким образом, СД для ГГ более информативны и выявляют более тонкие характеристики гравитационного поля.

Вычисления ПФЛ, присутствующих в ортогональных рядах (12)–(16), проводились на основе простых рекуррентных процедур, предложенных в работе (Holmes, Featherstone, 2002). Эти алгоритмы, описываемые уравнениями (13) и (34) в вышеприведенной работе, обеспечивают очень высокую точность и быстроту вычислений при больших значениях n и $|m|$.

Поскольку каждое выражение в уравнениях (12)–(16) зависит только от одной ПФЛ, а в уравнениях (5)–(9) от двух или трех ПФЛ, то проще выполнить сферический гармонический синтез и анализ, применив новые выражения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По сравнению с альтернативными ортогональными рядами, упомянутыми во Введении,

новые разложения для производных второго порядка геопотенциала более просты, поскольку функции широты в базисах, определяемых уравнениями (17) и (18) представляют собой обычные присоединенные функции Лежандра.

Сравним три вида выражений для производных в ЛСК, заданных уравнениями (4), (5)–(9) и (12)–(16). Эти выражения для каждой производной равны между собой и имеют одинаковую максимальную степень гармоник. Все они зависят от обычных ПФЛ. Однако уравнения (5)–(9) и (12)–(16) намного проще, чем обычные выражения в (4). Основное преимущество нетрадиционных выражений состоит в том, что они не зависят от производных ПФЛ и не содержат сингулярных множителей. Ряды в уравнениях (5)–(9) не ортогональны, если сравнить их с уравнениями (12)–(16). Преимущество первых рядов заключается в том, что они напрямую зависят от коэффициентов геопотенциала $\bar{C}_{n,m}$. Преимуществом уравнений (12)–(16), по сравнению с уравнениями (5)–(9), является их простота и ортогональность, что позволяет применять квадратурные формулы, наряду с методом наименьших квадратов. Преимуществом такого подхода является возможность избавиться от эффекта алиасинга, вызванного усечением рядов (Rummel и др., 1993. Р. 2.27). В случае уравнений (12)–(16), дополнительная операция должна быть выполнена для построения уникальной модели геопотенциала на основе моделей, соответствующих отдельным производным. Для этого могут быть использованы различные процедуры объединения, в частно-

сти алгоритмы, описанные в (Rummel и др., 1993. P. 2.50–2.53) и (Lemoine и др., 1998. P. 8–3).

Многоступенчатый подход для обработки данных градиентометрии, кратко описанный в PV2006, применим к новым выражениям для производных геопотенциала в ЛСК. Этот подход основан на объединении процедуры решения наблюдательных уравнений производных, распределенных по времени в локальной орбитальной системе отсчета (ЛОК), за исключением полярных разрывов, и последующей процедуры решения наблюдательных уравнений для производных в ЛСК относительно глобальных коэффициентов геопотенциала на основе данных, распределенных по всей средней орбитальной сфере.

Первым шагом в обработке данных градиентометрии будет тот же, что и в PV2006. Уравнения (49) и (50) из PV2006, соответствующие производным в ЛОК, разрешаются относительно коэффициентов геопотенциала $\bar{C}_{n,m}$ методом наименьших квадратов. Угловые переменные, входящие в приведенные выше уравнения, определяются дополнительными уравнениями (51)–(53). Следует отметить, что эти уравнения соответствуют только случаю круговой орбиты спутника. В настоящей статье в Приложении В уравнения для производных в ЛОК обобщаются на случай произвольного эксцентриситета орбиты спутника и вместо дополнительных уравнений из PV2006 представлены более общие уравнения (84)–(85), в которых не накладывается ограничение на эксцентриситет орбиты.

Полученные рекуррентные соотношения позволяют преобразовать спектральные коэффициенты производных в ЛСК в коэффициенты геопотенциала $\bar{C}_{n,m}$ и наоборот. При обработке градиентометрических данных эти уравнения должны быть решены три раза. Первый, когда коэффициенты производных в ЛСК вычисляются в области вне полярных разрывов по модели геопотенциала, полученной по данным градиентометрии с использованием процедуры, применяемой к распределенным по времени рядам наблюдений. Во второй раз, когда региональные коэффициенты производных в полярных разрывах вычисляются по ранее известной геопотенциальной модели. В третий раз рекуррентные соотношения используются для вычисления коэффициентов геопотенциала на основе коэффициентов производных в ЛСК, вычисленных по данным на глобальной сетке по средней орбитальной сфере.

Уравнения (12)–(16) позволяют изучать различные спектральные характеристики производных в ЛСК. В частности, из спектральных коэф-

фициентов можно оценить среднеквадратические отклонения для любых степеней и порядков.

Процедура, разработанная в PV2006 и в настоящей работе, о сочетании производных в ЛОК и ЛСК позволяет решить проблему полярных разрывов путем включения в обработку дополнительных наблюдательных данных, соответствующих полярным областям.

ПРИЛОЖЕНИЕ А: СПЕКТРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ T_{xx} , T_{xy} , T_{xz} , T_{yz}

Производная T_{xx}

$$\left. \begin{aligned} \hat{b}_{2,m} \bar{R}_{2,m} - \bar{c}_{2,m} \bar{R}_{4,m} &= \bar{K}_{2,m}, \\ \hat{b}_{3,m} \bar{R}_{3,m} - \bar{c}_{3,m} \bar{R}_{5,m} &= \bar{K}_{3,m}, \\ -\hat{a}_{4,m} \bar{R}_{2,m} + \hat{b}_{4,m} \bar{R}_{4,m} - \bar{c}_{4,m} \bar{R}_{6,m} &= \bar{K}_{4,m}, \\ -\hat{a}_{5,m} \bar{R}_{3,m} + \hat{b}_{5,m} \bar{R}_{5,m} - \bar{c}_{5,m} \bar{R}_{7,m} &= \bar{K}_{5,m}, \\ &\dots \\ -\hat{a}_{N-2,m} \bar{R}_{N-4,m} + \hat{b}_{N-2,m} \bar{R}_{N-2,m} - \\ - \bar{c}_{N-2,m} \bar{R}_{N,m} &= \bar{K}_{N-2,m}, \\ \hat{a}_{N-1,m} \bar{R}_{N-3,m} + \hat{b}_{N-1,m} \bar{R}_{N-1,m} &= \bar{K}_{N-1,m}, \\ -\hat{a}_{N,m} \bar{R}_{N-2,m} + \hat{b}_{N,m} \bar{R}_{N,m} &= \bar{K}_{N,m}, \\ -\hat{a}_{N+1,m} \bar{R}_{N-1,m} &= \bar{K}_{N+1,m}, \\ -\hat{a}_{N+2,m} \bar{R}_{N,m} &= \bar{K}_{N+2,m}, \\ |m| &= 0, 1. \end{aligned} \right\} (50)$$

$$\left. \begin{aligned} -\bar{b}_{2,m}^* \bar{H}_{2,m} + \bar{c}_{2,m} \bar{H}_{4,m} &= \bar{K}_{2,m}, \\ -\bar{b}_{3,m}^* \bar{H}_{3,m} + \bar{c}_{3,m} \bar{H}_{5,m} &= \bar{K}_{3,m}, \\ \bar{a}_{4,m} \bar{H}_{2,m} - \bar{b}_{4,m}^* \bar{H}_{4,m} + \bar{c}_{4,m} \bar{H}_{6,m} &= \bar{K}_{4,m}, \\ \bar{a}_{5,m} \bar{H}_{3,m} - \bar{b}_{5,m}^* \bar{H}_{5,m} + \bar{c}_{5,m} \bar{H}_{7,m} &= \bar{K}_{5,m}, \\ &\dots \\ \bar{a}_{N-2,m} \bar{H}_{N-4,m} - \bar{b}_{N-2,m}^* \bar{H}_{N-2,m} + \bar{c}_{N-2,m} \bar{H}_{N,m} &= \\ = \bar{K}_{N-2,m}, \\ \bar{a}_{N-1,m} \bar{H}_{N-3,m} - \bar{b}_{N-1,m}^* \bar{H}_{N-1,m} &= \bar{K}_{N-1,m}, \\ \bar{a}_{N,m} \bar{H}_{N-2,m} - \bar{b}_{N,m}^* \bar{H}_{N,m} &= \bar{K}_{N,m}, \\ \bar{a}_{N+1,m} \bar{H}_{N-1,m} &= \bar{K}_{N+1,m}, \\ \bar{a}_{N+2,m} \bar{H}_{N,m} &= \bar{K}_{N+2,m}, \\ |m| &= 0, 1. \end{aligned} \right\} (51)$$

$$\left. \begin{aligned}
 q_{\bar{m},m} \bar{R}_{\bar{m},m} + r_{\bar{m},m} \bar{R}_{\bar{m}+2,m} &= \bar{K}_{\bar{m},m}, \\
 q_{\bar{m}+1,m} \bar{R}_{\bar{m}+1,m} + r_{\bar{m}+3,m} \bar{R}_{\bar{m}+3,m} &= \bar{K}_{\bar{m}+1,m}, \\
 p_{\bar{m}+2,m} \bar{R}_{\bar{m},m} + q_{\bar{m}+2,m} \bar{R}_{\bar{m}+2,m} + \\
 + r_{\bar{m}+2,m} \bar{R}_{\bar{m}+4,m} &= \bar{K}_{\bar{m}+2,m}, \\
 p_{\bar{m}+3,m} \bar{R}_{\bar{m}+1,m} + q_{\bar{m}+3,m} \bar{R}_{\bar{m}+3,m} + \\
 + r_{\bar{m}+3,m} \bar{R}_{\bar{m}+5,m} &= \bar{K}_{\bar{m}+3,m}, \\
 \dots \\
 p_{N-2,m} \bar{R}_{N-4,m} + q_{N-2,m} \bar{R}_{N-2,m} + \\
 + r_{N-2,m} \bar{R}_{N,m} &= \bar{K}_{N-2,m}, \\
 p_{N-1,m} \bar{R}_{N-3,m} + q_{N-1,m} \bar{R}_{N-1,m} &= \bar{K}_{N-1,m}, \\
 p_{N,m} \bar{R}_{N-2,m} + q_{N,m} \bar{R}_{N,m} &= \bar{K}_{N,m}, \\
 p_{N+1,m} \bar{R}_{N-1,m} &= \bar{K}_{N+1,m}, \\
 p_{N+2,m} \bar{R}_{N,m} &= \bar{K}_{N+2,m}, \\
 |m| &= 2, 3, \dots, N, \quad \bar{m} = |m|.
 \end{aligned} \right\} (52)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{b}_{1,m} \bar{M}_{1,m} - \bar{c}_{1,m} \bar{M}_{3,m} &= \bar{L}_{1,m}, \\
 \bar{b}_{2,m} \bar{M}_{2,m} - \bar{c}_{2,m} \bar{M}_{4,m} &= \bar{L}_{2,m}, \\
 -\bar{a}_{3,m} \bar{M}_{1,m} + \bar{b}_{3,m} \bar{M}_{3,m} - \bar{c}_{3,m} \bar{M}_{5,m} &= \bar{L}_{3,m}, \\
 -\bar{a}_{4,m} \bar{M}_{2,m} + \bar{b}_{4,m} \bar{M}_{4,m} - \bar{c}_{4,m} \bar{M}_{6,m} &= \bar{L}_{4,m}, \\
 \dots \\
 -\bar{a}_{N-3,m} \bar{M}_{N-5,m} + \bar{b}_{N-3,m} \bar{M}_{N-3,m} - \\
 - \bar{c}_{N-3,m} \bar{M}_{N-1,m} &= \bar{L}_{N-3,m}, \\
 -\bar{a}_{N-2,m} \bar{M}_{N-4,m} + \bar{b}_{N-2,m} \bar{M}_{N-2,m} &= \bar{L}_{N-2,m}, \\
 -\bar{a}_{N-1,m} \bar{M}_{N-3,m} + \bar{b}_{N-1,m} \bar{M}_{N-1,m} &= \bar{L}_{N-1,m}, \\
 -\bar{a}_{N,m} \bar{M}_{N-2,m} &= \bar{L}_{N,m}, \\
 -\bar{a}_{N+1,m} \bar{M}_{N-1,m} &= \bar{L}_{N+1,m}, \\
 |m| &= 1.
 \end{aligned} \right\} (57)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{a}_{\bar{m},m} \bar{H}_{\bar{m},m} + \bar{b}_{\bar{m},m} \bar{H}_{\bar{m}+2,m} + \bar{c}_{\bar{m},m} \bar{H}_{\bar{m}+4,m} &= \bar{K}_{\bar{m},m}, \\
 \bar{a}_{\bar{m}+1,m} \bar{H}_{\bar{m}+1,m} + \bar{b}_{\bar{m}+1,m} \bar{H}_{\bar{m}+3,m} + \\
 + \bar{c}_{\bar{m}+1,m} \bar{H}_{\bar{m}+5,m} &= \bar{K}_{\bar{m}+1,m}, \\
 \dots \\
 \bar{a}_{N-2,m} \bar{H}_{N-2,m} + \bar{b}_{N-2,m} \bar{H}_{N,m} + \\
 + \bar{c}_{N-2,m} \bar{H}_{N+2,m} &= \bar{K}_{N-2,m}, \\
 \bar{a}_{N-1,m} \bar{H}_{N-1,m} + \bar{b}_{N-1,m} \bar{H}_{N+1,m} &= \bar{K}_{N-1,m}, \\
 \bar{a}_{N,m} \bar{H}_{N,m} + \bar{b}_{N,m} \bar{H}_{N+2,m} &= \bar{K}_{N,m}, \\
 \bar{a}_{N+1,m} \bar{H}_{N+1,m} &= \bar{K}_{N+1,m}, \\
 \bar{a}_{N+2,m} \bar{H}_{N+2,m} &= \bar{K}_{N+2,m}, \\
 |m| &= 2, 3, \dots, N, \quad \bar{m} = |m|.
 \end{aligned} \right\} (53)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{a}_{\bar{m},m} \bar{M}_{\bar{m},m} + \bar{b}_{\bar{m},m} \bar{M}_{\bar{m}+2,m} + \bar{c}_{\bar{m},m} \bar{M}_{\bar{m}+4,m} &= \bar{L}_{\bar{m},m}, \\
 \bar{a}_{\bar{m}+1,m} \bar{M}_{\bar{m}+1,m} + \bar{b}_{\bar{m}+1,m} \bar{M}_{\bar{m}+3,m} + \\
 + \bar{c}_{\bar{m}+1,m} \bar{M}_{\bar{m}+5,m} &= \bar{L}_{\bar{m}+1,m}, \\
 \dots \\
 \bar{a}_{N-3,m} \bar{M}_{N-3,m} + \bar{b}_{N-3,m} \bar{M}_{N-1,m} + \\
 + \bar{c}_{N-3,m} \bar{M}_{N+1,m} &= \bar{L}_{N-3,m}, \\
 \bar{a}_{N-2,m} \bar{M}_{N-2,m} + \bar{b}_{N-2,m} \bar{M}_{N,m} &= \bar{L}_{N-2,m}, \\
 \bar{a}_{N-1,m} \bar{M}_{N-1,m} + \bar{b}_{N-1,m} \bar{M}_{N+1,m} &= \bar{L}_{N-1,m}, \\
 \bar{a}_{N,m} \bar{M}_{N,m} &= \bar{L}_{N,m}, \\
 \bar{a}_{N+1,m} \bar{M}_{N+1,m} &= \bar{L}_{N+1,m}, \\
 |m| &= 2, 3, \dots, N, \quad \bar{m} = |m|.
 \end{aligned} \right\} (58)$$

$$\bar{H}_{N+1,m} = \bar{H}_{N+2,m} = 0, \quad |m| = 0, 1. \quad (54)$$

$$\bar{M}_{N,m} = \bar{M}_{N+1,m} = 0, \quad |m| = 1. \quad (59)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{H}_{0,0} &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\bar{H}_{2,0} + \bar{R}_{2,0}), \\
 \bar{H}_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{7}} (\bar{H}_{3,0} + \bar{R}_{3,0}), \\
 \bar{H}_{1,m} &= \frac{1}{\sqrt{14}} (\bar{H}_{3,m} + \bar{R}_{3,m}), \quad |m| = 1.
 \end{aligned} \right\} (55)$$

Производная T_{xz}

$$\bar{B}_{n,0} = -\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} \bar{R}_{n,0}, \quad n = 2, 3, \dots, N. \quad (60)$$

Производная T_{xy}

$$\left. \begin{aligned}
 -\bar{\eta}_{\bar{m},m} \bar{R}_{\bar{m}+1,-m} &= \bar{L}_{\bar{m},m}, \\
 \bar{\xi}_{\bar{m}+1,m} \bar{R}_{\bar{m},-m} - \bar{\eta}_{\bar{m}+1,m} \bar{R}_{\bar{m}+2,-m} &= \bar{L}_{\bar{m}+1,m}, \\
 \bar{\xi}_{\bar{m}+2,m} \bar{R}_{\bar{m}+1,-m} - \bar{\eta}_{\bar{m}+2,m} \bar{R}_{\bar{m}+3,-m} &= \bar{L}_{\bar{m}+2,m}, \\
 \dots \\
 \bar{\xi}_{N-2,m} \bar{R}_{N-3,-m} - \bar{\eta}_{N-2,m} \bar{R}_{N-1,-m} &= \bar{L}_{N-2,m}, \\
 \bar{\xi}_{N-1,m} \bar{R}_{N-2,-m} - \bar{\eta}_{N-1,m} \bar{R}_{N,-m} &= \bar{L}_{N-1,m}, \\
 \bar{\xi}_{N,m} \bar{R}_{N-1,-m} &= \bar{L}_{N,m}, \\
 \bar{\xi}_{N+1,m} \bar{R}_{N,-m} &= \bar{L}_{N+1,m}, \\
 |m| &= 1, 2, \dots, N, \quad \bar{m} = |m|.
 \end{aligned} \right\} (56)$$

$$\left. \begin{aligned}
 -\bar{\gamma}_{\bar{m},m} \bar{R}_{\bar{m}+1,m} &= \bar{S}_{\bar{m},m}, \\
 \bar{\beta}_{\bar{m}+1,m} \bar{R}_{\bar{m},m} - \bar{\gamma}_{\bar{m}+1,m} \bar{R}_{\bar{m}+2,m} &= \bar{S}_{\bar{m}+1,m}, \\
 \bar{\beta}_{\bar{m}+2,m} \bar{R}_{\bar{m}+1,m} - \bar{\gamma}_{\bar{m}+2,m} \bar{R}_{\bar{m}+3,m} &= \bar{S}_{\bar{m}+2,m}, \\
 \dots \\
 \bar{\beta}_{N-2,m} \bar{R}_{N-3,m} - \bar{\gamma}_{N-2,m} \bar{R}_{N-1,m} &= \bar{S}_{N-2,m}, \\
 \bar{\beta}_{N-1,m} \bar{R}_{N-2,m} - \bar{\gamma}_{N-1,m} \bar{R}_{N,m} &= \bar{S}_{N-1,m}, \\
 \bar{\beta}_{N,m} \bar{R}_{N-1,m} &= \bar{S}_{N,m}, \\
 \bar{\beta}_{N+1,m} \bar{R}_{N,m} &= \bar{S}_{N+1,m}, \\
 |m| &= 1, 2, \dots, N, \quad \bar{m} = |m|.
 \end{aligned} \right\} (61)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\mu}_{\bar{m},m} \bar{B}_{\bar{m},m} - \bar{\nu}_{\bar{m},m} \bar{B}_{\bar{m}+2,m} &= \bar{S}_{\bar{m},m}, \\
 \bar{\mu}_{\bar{m}+1,m} \bar{B}_{\bar{m}+1,m} - \bar{\nu}_{\bar{m}+1,m} \bar{B}_{\bar{m}+3,m} &= \bar{S}_{\bar{m}+1,m}, \\
 \bar{\mu}_{\bar{m}+2,m} \bar{B}_{\bar{m}+2,m} - \bar{\nu}_{\bar{m}+2,m} \bar{B}_{\bar{m}+4,m} &= \bar{S}_{\bar{m}+2,m}, \\
 \dots \\
 \bar{\mu}_{N-1,m} \bar{B}_{N-1,m} - \bar{\nu}_{N-1,m} \bar{B}_{N+1,m} &= \bar{S}_{N-1,m}, \\
 \bar{\mu}_{N,m} \bar{B}_{N,m} &= \bar{S}_{N,m}, \\
 \bar{\mu}_{N+1,m} \bar{B}_{N+1,m} &= \bar{S}_{N+1,m}, \\
 |m| = 1, 2, \dots, N, \quad \bar{m} = |m|.
 \end{aligned} \right\} (62)$$

Производная T_{yz}

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{\mu}_{\bar{m},m} \bar{A}_{\bar{m},m} - \hat{\nu}_{\bar{m},m} \bar{A}_{\bar{m}+2,m} &= \bar{R}_{\bar{m},-m}, \\
 \hat{\mu}_{\bar{m}+1,m} \bar{A}_{\bar{m}+1,m} - \hat{\nu}_{\bar{m}+1,m} \bar{A}_{\bar{m}+3,m} &= \bar{R}_{\bar{m}+1,-m}, \\
 \hat{\mu}_{\bar{m}+2,m} \bar{A}_{\bar{m}+2,m} - \hat{\nu}_{\bar{m}+2,m} \bar{A}_{\bar{m}+4,m} &= \bar{R}_{\bar{m}+2,-m}, \\
 \dots \\
 \hat{\mu}_{N-2,m} \bar{A}_{N-2,m} - \hat{\nu}_{N-2,m} \bar{A}_{N,m} &= \bar{R}_{N-2,-m}, \\
 \hat{\mu}_{N-1,m} \bar{A}_{N-1,m} &= \bar{R}_{N-1,-m}, \\
 \hat{\mu}_{N,m} \bar{A}_{N,m} &= \bar{R}_{N,-m}, \\
 |m| = 1, 2, \dots, N, \quad \bar{m} = \max\{2, |m|\}.
 \end{aligned} \right\} (63)$$

$$\bar{\mu}_{1,1} \bar{A}_{1,m} = \bar{\nu}_{1,1} \bar{A}_{3,m}, \quad |m| = 1. \quad (64)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б: ЧИСЛЕННЫЕ КОНСТАНТЫ

$$\left. \begin{aligned}
 a_{n,m} &= 0, \quad |m| = 0, 1, \\
 a_{n,m} &= \frac{\sqrt{1 + \delta_{|m|,2}}}{4} \sqrt{n^2 - (|m| - 1)^2} \times \\
 &\times \sqrt{n + |m|} \sqrt{n - |m| + 2}, \quad 2 \leq |m| \leq n, \\
 b_{n,m} &= \frac{(n + |m| + 1)(n + |m| + 2)}{2(|m| + 1)}, \quad |m| = 0, 1, \\
 b_{n,m} &= \frac{n^2 + m^2 + 3n + 2}{2}, \quad 2 \leq |m| \leq n, \\
 c_{n,m} &= \frac{\sqrt{1 + \delta_{|m|,0}}}{4} \sqrt{n^2 - (|m| + 1)^2} \times \\
 &\times \sqrt{n - |m|} \sqrt{n + |m| + 2}, \quad |m| = 0, 1, \\
 c_{n,m} &= \frac{1}{4} \sqrt{n^2 - (|m| + 1)^2} \sqrt{n - |m|} \times \\
 &\times \sqrt{n + |m| + 2}, \quad 2 \leq |m| \leq n, \\
 n &= 2, 3, \dots, N.
 \end{aligned} \right\} (65)$$

$$\left. \begin{aligned}
 d_{n,m} &= 0, \quad |m| = 0, 1, \\
 d_{n,m} &= -\frac{m}{4|m|} \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{1 + \delta_{|m|,2}} \sqrt{n^2 - (|m| - 1)^2} \times \\
 &\times \sqrt{n + |m|} \sqrt{n + |m| - 2}, \quad 2 \leq |m| \leq n, \\
 g_{n,0} &= 0, \\
 g_{n,m} &= \frac{m}{4|m|} \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{n+1} \sqrt{n-1} (n+2), \quad |m| = 1, \\
 g_{n,m} &= \frac{m}{2} \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{n+|m|} \sqrt{n-|m|}, \quad 2 \leq |m| \leq n, \\
 h_{n,0} &= 0, \\
 h_{n,m} &= \frac{m}{4|m|} \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{n-3} \sqrt{n-2} \times \\
 &\times \sqrt{n-1} \sqrt{n+2}, \quad |m| = 1, \\
 h_{n,m} &= \frac{m}{4|m|} \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \times \\
 &\times \sqrt{n^2 - (|m| + 1)^2} \sqrt{n-|m|} \sqrt{n-|m| - 2}, \\
 &2 \leq |m| \leq n, \\
 n &= 2, 3, \dots, N.
 \end{aligned} \right\} (66)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \beta_{n,0} &= 0, \\
 \beta_{n,m} &= \frac{n+2}{2} \sqrt{1 + \delta_{|m|,1}} \times \\
 &\times \sqrt{n + |m|} \sqrt{n - |m| + 1}, \quad 1 \leq |m| \leq n, \\
 \gamma_{n,0} &= -(n+2) \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}, \\
 \gamma_{n,m} &= -\frac{n+2}{2} \sqrt{n-|m|} \sqrt{n+|m|+1}, \quad 1 \leq |m| \leq n, \\
 n &= 2, 3, \dots, N.
 \end{aligned} \right\} (67)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \mu_{n,0} &= 0, \\
 \mu_{n,m} &= -\frac{m}{|m|} \left(\frac{n+2}{2}\right) \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \times \\
 &\times \sqrt{1 + \delta_{|m|,1}} \sqrt{n+|m|} \sqrt{n+|m|-1}, \quad 1 \leq |m| \leq n, \\
 \nu_{n,0} &= 0, \\
 \nu_{n,m} &= -\frac{m}{|m|} \left(\frac{n+2}{2}\right) \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{n-|m|} \sqrt{n-|m|-1}, \\
 &1 \leq |m| \leq n, \\
 n &= 2, 3, \dots, N.
 \end{aligned} \right\} (68)$$

$$\delta_{p,q} = \begin{cases} 1, & p = q, \\ 0, & p \neq q. \end{cases} \quad (69)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a}_{n,m} &= -\frac{(n-|m|+1)(n-|m|+2)}{(2n+1)(2n+3)}, \\ \tilde{b}_{n,m} &= 2\frac{n^2+m^2+n-1}{(2n-1)(2n+3)}, \\ \tilde{c}_{n,m} &= -\frac{(n+|m|)(n+|m|-1)}{(2n+1)(2n-1)}. \end{aligned} \right\} (70)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_{n,m} &= \frac{\sqrt{2n-3}\sqrt{n^2-m^2}\sqrt{(n-1)^2-m^2}}{(2n-1)\sqrt{2n+1}(n-1)n}, \\ |m| &= 0, 1, \dots, N, \\ n &= \max\{4, |m|+2\}, \dots, N+2, \\ \bar{h}_{n,m} &= \frac{n+2m^2+1}{(2n+3)(n+1)}, \quad |m| = 0, 1, \dots, N, \\ n &= \max\{2, |m|\}, \dots, N. \end{aligned} \right\} (71)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{n,m} &= \frac{\sqrt{n^2-m^2}\sqrt{(n-1)^2-m^2}}{(2n-1)\sqrt{2n+1}\sqrt{2n-3}}, \\ |m| &= 0, 1, \quad n = 4, 5, \dots, N+2, \\ \bar{b}_{n,m} &= 2\frac{n^2+m^2+n-1}{(2n-1)(2n+3)}, \\ |m| &= 0, 1, \quad n = 2, 3, \dots, N, \\ \bar{c}_{n,m} &= \bar{a}_{n+2,m}, \\ |m| &= 0, 1, \quad n = 2, 3, \dots, N-2. \end{aligned} \right\} (72)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{b}_{2,0}^* &= \frac{12}{35}, \quad \bar{b}_{3,0}^* = \frac{20}{63}, \quad \bar{b}_{n,0}^* = \bar{b}_{n,0}, \\ n &= 4, 5, \dots, N, \\ \bar{b}_{2,m}^* &= \bar{b}_{2,m}, \quad \bar{b}_{3,m}^* = \frac{10}{21}, \quad \bar{b}_{n,m}^* = \bar{b}_{n,m}, \\ |m| &= 1, \quad n = 4, 5, \dots, N. \end{aligned} \right\} (73)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n,|m|} &= \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{|m|,2}}}\frac{\sqrt{2n-3}}{\sqrt{2n+1}}\sqrt{n+|m|-3} \times \\ &\times \sqrt{n+|m|-2}\sqrt{n+|m|-1}\sqrt{n+|m|}, \\ |m| &= 2, 3, \dots, N, \quad n = |m|, |m|+1, \dots, N+2. \end{aligned} \right\} (74)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{n,m} &= \frac{\sigma_{n,m}}{(2n-3)(2n-1)}, \\ |m| &= 2, 3, \dots, N, \quad n = |m|, |m|+1, \dots, N+2, \\ \bar{b}_{n,m} &= -2\frac{\sigma_{n+2,m}}{(2n-1)(2n+3)} \times \\ &\times \frac{\sqrt{2n+5}\sqrt{n-|m|+1}\sqrt{n-|m|+2}}{\sqrt{2n+1}\sqrt{n+|m|+1}\sqrt{n+|m|+2}}, \\ |m| &= 2, 3, \dots, N, \quad n = |m|, |m|+1, \dots, N, \\ \bar{c}_{n,m} &= \frac{\sigma_{n+4,m}}{(2n+3)(2n+5)} \times \\ &\times \frac{\sqrt{2n+9}\sqrt{n-|m|+1}\sqrt{n-|m|+2}}{\sqrt{2n+1}\sqrt{n+|m|+1}\sqrt{n+|m|+2}} \times \\ &\times \frac{\sqrt{n-|m|+3}\sqrt{n-|m|+4}}{\sqrt{n+|m|+3}\sqrt{n+|m|+4}}, \\ |m| &= 2, 3, \dots, N-2, \quad n = |m|, |m|+1, \dots, N-2. \end{aligned} \right\} (75)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_{n,m} &= \bar{a}_{n,m} - \bar{g}_{n,m}, \quad |m| = 0, 1, \quad n = 4, 5, \dots, N+2, \\ \hat{b}_{n,m} &= \bar{b}_{n,m}^* - \bar{h}_{n,m}, \quad |m| = 0, 1, \quad n = 2, 3, \dots, N. \end{aligned} \right\} (76)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{n,m} &= \frac{(n^2-3n+3)\sqrt{n^2-m^2}\sqrt{(n-1)^2-m^2}}{(2n-1)\sqrt{2n+1}\sqrt{2n-3}n(n-1)}, \\ |m| &= 2, 3, \dots, N, \quad n = |m|+2, |m|+3, \dots, N+2, \\ q_{n,m} &= -\frac{(n+1)(2n^2-1)-2m^2(n-2)}{(n+1)(2n-1)(2n+3)}, \\ |m| &= 2, 3, \dots, N, \quad n = |m|, |m|+1, \dots, N, \\ r_{n,m} &= \frac{\sqrt{(n+1)^2-m^2}\sqrt{(n+2)^2-m^2}}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+5}(2n+3)}, \\ |m| &= 2, 3, \dots, N-2, \quad n = |m|, |m|+1, \dots, N-2. \end{aligned} \right\} (77)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi}_{2,m} &= 0, \quad |m| = 1, \\ \bar{\xi}_{n,m} &= \frac{m(n-2)\sqrt{n^2-m^2}}{n(n+1)\sqrt{4n^2-1}}, \\ |m| &= 1, 2, \dots, N, \quad n = \max\{3, |m|+1\}, \dots, N+1, \\ \bar{\eta}_{n,m} &= \frac{m\sqrt{(n+1)^2-m^2}}{(n+2)\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}, \\ |m| &= 1, 2, \dots, N-1, \quad n = |m|, |m|+1, \dots, N-1. \end{aligned} \right\} (78)$$

$$\bar{b}_{1,m} = \frac{4}{5}, \quad \bar{c}_{1,m} = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}, \quad \bar{a}_{3,m} = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}, \quad |m| = 1. \quad (79)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\beta}_{2,m} &= 0, \quad |m| = 1, \\ \bar{\beta}_{n,m} &= \frac{(n-1)\sqrt{n^2 - m^2}}{n\sqrt{4n^2 - 1}}, \\ |m| &= 1, 2, \dots, N, \quad n = \max\{3, |m| + 1\}, \dots, N + 1, \\ \bar{\gamma}_{n,m} &= \frac{\sqrt{(n+1)^2 - m^2}}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}, \\ |m| &= 1, 2, \dots, N - 1, \quad n = |m|, \dots, N - 1. \end{aligned} \right\} (80)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mu}_{n,m} &= \sqrt{\frac{(n+|m|)(n+|m|-1)}{(1+\delta_{|m|,1})(4n^2-1)}}, \\ |m| &= 1, 2, \dots, N, \quad n = |m|, |m| + 1, \dots, N + 1, \\ \bar{\nu}_{n,m} &= \sqrt{\frac{(n-|m|+1)(n-|m|+2)}{(1+\delta_{|m|,1})(2n+1)(2n+3)}}, \\ |m| &= 1, 2, \dots, N - 1, \quad n = |m|, |m| + 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \right\} (81)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mu}_{n,m} &= \bar{\mu}_{n,m} \frac{n+1}{m}, \\ |m| &= 1, 2, \dots, N, \quad n = \max\{2, |m|\}, \dots, N, \\ \hat{\nu}_{n,m} &= \bar{\nu}_{n,m} \frac{n+1}{m}, \\ |m| &= 1, 2, \dots, N - 2, \quad n = \max\{2, |m|\}, \dots, N - 2. \end{aligned} \right\} (82)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В: ВЫРАЖЕНИЯ
ДЛЯ УГЛОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ, ВХОДЯЩИХ
В УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОРБИТАЛЬНЫХ
ПРОИЗВОДНЫХ

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \sin^2 I \sin^2 \omega_0}, \\ \cos \theta &= \sin I \sin \omega_0, \end{aligned} \right\} (83)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\cos I}{\sqrt{1 - \sin^2 I \sin^2 \omega_0}}, \\ \cos \alpha &= \frac{\sin I \cos \omega_0}{\sqrt{1 - \sin^2 I \sin^2 \omega_0}}, \end{aligned} \right\} (84)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\cos I}{\sin \theta}, \\ \cos \alpha &= \pm \frac{\sqrt{\sin^2 I - \cos^2 \theta}}{\sin \theta}. \end{aligned} \right\} (85)$$

Здесь $\omega_0 = \omega + J$, где ω_0 – аргумент широты, ω – аргумент перигея и J – истинная аномалия, θ – полярный угол, I – наклон орбиты ($0 \leq I \leq \pi$), α – азимут орбиты (угол между направлением на полюс и вектором движения спут-

ника, отсчитываемый по часовой стрелке). В уравнении (85) знак “+” соответствует восходящей ветви орбиты, а знак “–” нисходящей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Холиевников К.В.* Представление градиента гравитационного потенциала небесных тел рядом шаровых функций // Вестн. СПбГУ. 2007. Сер. 1. Вып. 3. С. 160–166.
- Albertella A., Migliaccio F., Sansò F.* Application of the concept of biorthogonal series to a simulation of a gradiometric mission // Geodetic Theory Today. IAG Symp. 1995a. V. 114. Berlin, Heidelberg, New York: Springer. P. 350–361.
- Albertella A., Migliaccio F., Sansò F.* Global gravity field recovery by use of STEP observations // Int. Gravity and Geoid Commissions Sympos. 1995b. V. 113. P. 111–115.
- Claessens S.J.* New relations among associated Legendre functions and spherical harmonics // J. Geod. 2005. V. 79. № 6–7. P. 398–406.
- Gatti A., Reguzzoni M., Migliaccio F., Sansò F.* Computation and assessment of the fifth release of the GOCE-only space-wise solution // 1st Joint Commission 2 and IGFS Meeting, 19–23 September 2016, Thessaloniki, Greece. 2016. doi 10.13140/RG.2.2.28625.9456910.13140/RG.2.2.28625.94569
- Holmes S.A., Featherstone W.E.* A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalized associated Legendre functions // J. Geod. 2002. V. 76. № 5. P. 279–299.
- Ilk K.H.* Ein Beitrag zur Dynamik ausgedehnter Körper Gravitationswechselwirkung // Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C. Heft № 288. München. 1983. 181 p.
- Koop R.* Global gravity field modelling using satellite gravity gradiometry // Publ. Geodesy, New series, № 38. Netherlands Geodetic Commission, Delft. 1993. 240 p.
- Lemoine F.G., Kenyon S.C., Factor J.K., Trimmer R.G., Pavlis N.K., Chinn D.S., Cox C.M., Klosko S.M., Luthcke S.B., Torrence M.H., Wang Y.M., Williamson R.G., Pavlis E.C., Rapp R.H., Olson T.R.* The development of the joint NASA GSFC and the national imagery and mapping agency (NIMA) geopotential model EGM96, NASA/TP-1998-206861. Goddard Space Flight Center, Greenbelt. 1998. 584 p.
- Moritz H.* Geodetic Reference System 1980 // Bull. Géod. 1980. V. 54. № 4. P. 395–405.
- Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K.* The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008) // J. Geophys. Res. 2012. V. 117. B04406.
- Petrovskaya M.S., Vershkov A.N., Volfson G.B., Zieliński J.B.* Simulation of the spectra of GOCE observables // Sci. Assembly Int. Assoc. Geodesy (Budapest, 2–9 Sept., 2001). Symp. B2: “Use of Gravity Data from Dedicated Satellite Mission”. 2001. Proc. in CD, № 22BD.

- Petrovskaya M.S., Vershkov A.N.* Potential coefficients recovery from the spectra of the full space-borne gravity gradient tensor // V Hotine-Marussi Symp. Math. Geodesy. IAG Symp. Berlin Heidelberg New York: Springer, 2004. V. 127. P. 234–241.
- Petrovskaya M.S., Vershkov A.N.* Non-singular expressions of the gravity gradients in the local north-oriented and orbital reference frames // J. Geod. 2006. V. 80. № 3. P. 117–127.
- Rummel R., van Gelderen M.* Spectral analysis of the full gravity tensor // Geophys. J. Int. 1992. V. 111. № 1. P. 159–169.
- Rummel R., Sansò F., van Gelderen M., Koop R., Schrama E., Brovelli M., Migliaccio F., Sacerdote F.* Spherical harmonic analysis of satellite gradiometry // Publ. Geodesy. New Series. Netherlands Geodetic Commission. Delft. 1993. № 39. 124 p.
- Shako R., Förste C., Abrykosov O., Bruinsma S., Marty J.-C., Lemoine J.-M., Flechtner F., Neumayer K.-H., Dahle C.* EIGEN-6C: A high-resolution global gravity combination model including GOCE data // Observation of the System Earth from Space – CHAMP, GRACE, GOCE and future missions, (GEOTECHNOLOGIEN Science Report. Advanced Technologies in Earth Sciences). Springer, 2014. № 20. P. 155–161.