УДК 523-52

ДЖИНСОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДОПЛАНЕТНОГО ГАЗОВОГО ОБЛАКА С ИЗЛУЧЕНИЕМ В НЕЭКСТЕНСИВНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ КИНЕТИКЕ ТСАЛЛИСА

А. В. Колесниченко*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

**e-mail: kolesn@keldysh.ru*

Поступила в редакцию 17.10.2019 г.
После доработки 22.10.2019 г.
Принята к публикации 31.10.2019 г.

В рамках статистики Тсаллиса исследуется влияние неэкстенсивности среды на критерий гравитационной неустойчивости Джинса для самогравитирующего допланетного облака, вещество которого состоит из смеси совершенного q-газа и чернотельного излучения. Обобщенные критерии неустойчивости Джинса найдены из соответствующих дисперсионных соотношений, полученных как для покоящегося однородного облака с излучением, так и для вращающегося допланетного облака. Получен также интегральный обобщенный критерий устойчивости Чандрасекхара для гравитирующего сферического облака.Представленныерезультаты анализируются для различных значений параметров деформации q, размерности D пространства скоростей икоэффициента β, характеризующего долю излучения в полном давлении системы. Показано, что излучение стабилизирует вещество неэкстенсивныхдопланетных облаков, а для вращающихся облаковкритерий неустойчивости Джинса модифицируется силой Кориолиса только в поперечном режиме распространения волн возмущения.

Ключевые слова: критерии Джинса и Чандрасекхара, допланетное облако, чернотельное излучение, неэкстенсивная кинетика Тсаллиса

DOI: 10.31857/S0320930X20020048

ВВЕДЕНИЕ

Как теперь стало понятно, статистическая механика Больцмана–Гиббса и стандартная термодинамика не являются вполне универсальными теориями, поскольку они имеют ограниченные области применимости. Это связано, в частности, с тем, что в основе статистики Больцмана–Гиббса лежит постулат о полном перемешивании потока “фазовых точек” в фазовом пространстве (гипотеза молекулярного хаоса). Это означает, что любой выделенный объем приобретает по истечении времени $t \to \infty$ настолько хорошо развитую хаотическую структуру, что его точки могут располагаться в произвольной части фазового пространства. Таким образом, фазовое пространство в классической статистике не содержит запрещенных состояний и обладает обычными свойствами непрерывности, гладкости, евклидовости. При этом стохастический процесс имеет марковский характер, а гипотеза перемешивания, дополненная предположением о бесконечном числе степеней свободы, приводит, в конечном счете, к каноническому (экспоненциальному) распределению вероятности состояний Больцмана–Гиббса, из которого следует свойство аддитивности экстенсивных термодинамических переменных, таких как внутренняя энергия, энтропия и т.п., а в случае кинетической теории – к максвелловскому распределению скоростей.

Вместе с тем, в физике и в других естественных науках, использующих методы статистической механики, известны многочисленные примеры аномальных систем с дальним силовым взаимодействием, фрактальным характером фазового пространства и значительными корреляциями между отдельными их частями. Сложная пространственно-временная структура подобных систем приводит к нарушению принципа аддитивности для таких важнейших термодинамических величин, как энтропия или внутренняя энергия.

Описание эволюции подобных систем, обладающих произвольным фазовым пространством, возможно, в частности, в рамках так называемой неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса[1] (см. Tsallis, 1988; 1999; 2009; Curado, Tsallis,

[1] Обзорам исследований в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса посвящены многочисленные журнальные статьи, сборники и монографии. Кроме этого, имеется постоянно обновляющаяся полная библиография (Nonextensivestatisticalmechanicsandthermodynamics: Bibliography/ http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm), которая на сегодняшний день состоит из более 5600 ссылок.

1991; Tsallis и др., 1998; Колесниченко, 2019), которая интенсивно развивается в последнее время в основном зарубежными авторами. Важным преимуществом неэкстенсивной статистики по сравнению с классической статистикой Больцмана–Гиббса является асимптотический степенной закон распределения вероятностей.

В настоящее время теории разнообразных неэкстенсивных систем развиваются в ускоренном темпе, при котором появляются новые идеи, позволяющие глубже понять их природу, возможности и ограничения. Каждая теория имеет широкий спектр важных приложений, связанных с физикой статистических систем, вероятностные свойства которых описываются негиббсовыми (негауссовыми), а степенными распределениями. В частности, неэкстенсивная статистическая механика успешно применяется к космическим системам с дальним силовым взаимодействием, которое и является причиной иханомальности (стататистической и термодинамической неэкстенсивности).

В работе (Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013) в рамках формализма деформированной статистики Тсаллиса была сконструирована на основе модифицированного кинетического уравнения (с интегралом столкновений в форме Бхатнагара–Гросса–Крука) обобщенная гидродинамика (так называемая q-гидродинамика Навье–Стокса), пригодная для моделирования подобных систем. Именно на основе этой гидродинамики в данной работе мы рассмотрим проблему гравитационной неустойчивости Джинса для протяженного газопылевого облака, заполнявшего все пространство современной солнечной системы, с учетом чернотельной радиации и влияния магнитного поля на критическую длину волны возмущения, ведущей к неустойчивости.

Гравитационная неустойчивость является фундаментальным процессом фрагментации гравитирующего космического вещества. Она вызывает формирование устойчивых астрофизических объектов, таких как звезды, туманности, допланетные пылевые сгущения, аккреционные диски и т.д. (см., Jeans, 1902; 2009; Chandrasekhar, 1981; Сафронов, 1969; Горькавый, Фридман, 1994; Фридман, Хоперсков, 2011). Хорошо известно, что самогравитирующая космическая среда становится гравитационно-неустойчивой, если возникшие в ней сколь угодно малые возмущения плотности неограниченно растут со временем вследствие тяготения, и равновесие нарушается, если соответствующие длины волн превышают определенное значение. Проблеме гравитационной неустойчивости в последнее время посвящено большое число публикаций, среди которых можно выделить следующие работы (Chandrasekhar, Fermi, 1953; Bonnor, 1957; Hunter, 1972; Goldreich, Lynden-Bell, 1965; Low, Lynden-Bell, 1976; Shakura, Sunyaev, 1976; Camenzind и др., 1986; Cadez, 1990; Pandey, Avinash, 1994; Owen и др., 1997; Tsiklauri, 1998; Mace и др., 1998; Lima и др., 2002; Radwan, 2004; Triggeri др., 2004; Sakagami, Taruya, 2004; Shukla, Stenflo, 2006; Tsintsadze и др., 2008; Masood и др., 2008; Cadez, 2010; Dhiman, Dadwal, 2012; Fridman, Polyachenko, 1984; 2012; Kaothekar, Chhajlani, 2013; Joshi, Pensia, 2017; Pensia и др., 2018; Kumar и др., 2018; Колесниченко, 2015; 2016; 2018; 2019; Kolesnichenko, Marov, 2014; 2016). Во всех этих работах рассмотрены различные аспекты джинсовской неустойчивости самогравитирующих космических сред как в рамках классических уравнений Навье–Стокса и МГД-уравнений, так и на основе бесстолкновительного уравнения Больцмана при наличии гравитационных полей, уравнения Пуассона.

Известно, что в случае нормальных звезд большую роль играет давление излучения как фактор их гидростатического равновесия. С учетом этого, в представленной работе выполнено в рамках неэкстенсивной кинетики Тсаллиса рассмотрение влияния радиации на гравитационную неустойчивость солнечного допланетного облака (точнее его экваториальной части, в которой практически все излучение является длинноволновым, поскольку оно уже успело пройти через многократное поглощение и переизлучение частицами среды). Именно там возможно существование локального термодинамического равновесия, при котором температура частиц практически совпадает с температурой черного тела. В работе найдена функциональная зависимость критического значения длины возмущающей волны от энтропийного индекса деформации q и размерности D пространства скоростей. Эти свободные параметры должны определяться в каждом конкретном случае эмпирическим путем из статистических или экспериментальных данных. В работе также исследуется влияние вращения на гравитационную неустойчивость неэкстенсивного допланетного облака. Полученные здесь результаты помогут, по мнению автора, лучше понять некоторые астрофизические проблемы, связанные, в частности, с моделированием процессов образования звезд и экзопланет из звездных туманностей.

УРАВНЕНИЯ q-ГИДРОДИНАМИКИ В НЕЭКСТЕНСИВНОЙ КИНЕТИКЕ

Рассмотрим далее газообразную динамическую неэкстенсивную систему с нормированным распределением частиц $f(r,c,t)$ в геометрическом пространстве r и в пространстве скоростей c с размерностью D. Предлагаемое Тсаллисом обобщение статистической механики (в случае статистики Курадо–Тсаллиса) лучше всего описывается следующими двумя аксиомами (Curado, Tsallis, 1991; Колесниченко, 2018):

Аксиома 1. Функционал энтропии, связанный с нормированным распределением функции вероятностей, $f(z,t)$ равен

$$S_q[f] = \frac{k}{q-1}\int dz\left\{f(z) - [f(z)]^q\right\}, \qquad (1)$$

где q – параметр деформации – число, связанное с фрактальной размерностью, а для неэкстенсивных систем, являющееся мерой их неаддитивности (Tsallis, 2009); $z = (r,c)$ – элемент объема фазового пространства; $dz \equiv drd^Dc$, где D – размерность пространства скоростей; k – постоянная Больцмана.

Аксиома 2. Экспериментально измеряемое значение любой макроскопической величины $\langle A\rangle_q$ (термодинамической характеристики q-системы) задается соотношением

$$\langle A\rangle_q \equiv \int \int dzA(r,t)[f(z)]^q, \qquad (2)$$

где $A(r,t)$ – соответствующая микроскопическая величина.

Важно подчеркнуть, что энтропия $S_q(A\cup B)$ двух независимых систем не является аддитивной термодинамической переменной при $q \neq 1$, поскольку

$$S_q(A\cup B) = S_q(A) + S_q(B) + \\ + k^{-1}(1-q)S_q(A)S_q(B).$$

Несмотря на это обстоятельство, в литературе было показано, что существует значительное количество обычных статистических и термодинамических свойств, которые q-инвариантны, т.е. справедливы для любого q. К ним, в частности, относятся свойство выпуклости энтропии Тсаллиса, структура равновесных канонических ансамблей, неаддитивная термодинамика, структура преобразования Лежандра и многое другое (см. Bibliography/ http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm).

Основные определения и уравнения

Энтропия Тсаллиса влечет за собой не только обобщение статистической физики и термодинамики, но и обобщение физической кинетики и гидродинамики (см. Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013; Oliveira, Galvao, 2018). Простейшей макроскопической величиной является q-плотность числа частиц, которая определяется соотношением

$$n_q(r,t) \equiv \int [f(z)]^q d^Dc. \qquad (3)$$

Тогда массовая q-плотность равна $\rho_q(r,t) \equiv \equiv mn_q(r,t)$. Поскольку частица, движущаяся со скоростью c, обладает импульсом mc, то выражение

$$u_q(r,t) \equiv \frac{1}{\rho_q(r,t)}\int mc[f(z)]^q d^Dc \qquad (4)$$

определяет гидродинамическую скорость элемента объема. Величина

$$\varepsilon_q(r,t) = \frac{1}{\rho_q(r,t)}\int \frac{m}{2}\left|c-u_q\right|^2 [f(z)]^q d^Dc \qquad (5)$$

является удельной внутренней энергией (на единицу массы) неэкстенсивной системы. Потоки

$$\mathbf{P}_q(r,t) = m\int (c-u_q)(c-u_q)[f(z)]^q d^Dc, \qquad (6)$$

$$\mathbf{J}_q(r,t) \equiv \frac{m}{2}\int \left|c-u_q\right|^2 (c-u_q)[f(z)]^q d^Dc \qquad (7)$$

представляют собой соответственно тензор давлений и поток тепла. Гидростатическое q-давление определяется как

$$p_q(r,t) = \tfrac{1}{3}\mathbf{P}:\mathbf{J} = \tfrac{1}{3}m\int \left|c-u_q\right|^2 [f(z)]^q d^Dc, \qquad (8)$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор второго ранга. В частности, если сдвиговые напряжения равны нулю, а нормальные напряжения равны между собой, то $\mathbf{P}_q = p_q\mathbf{I}$.

В работах (Boghosian, 1999; Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013) в рамках неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса было проведено методом моментов конструирование гидродинамических и квазигидродинамических уравнений на основе модифицированного кинетического уравнения Больцмана[2] (с учетом самогравитации) с интегралом столкновений в форме Бхатнагара–Гросса–Крука:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\mathrm{grad} + \mathbf{F}_q\mathrm{grad}_c\right)[f(r,c,t)]^q = \\ = -\frac{[f(r,c,t)]^q - \left[f^{(0)}(r,c,t)\right]^q}{\tau}. \qquad (9)$$

Здесь $\mathrm{grad}_c \equiv i_x\partial/\partial c_x + i_y\partial/\partial c_y + i_z\partial/\partial c_z$; $\mathbf{F}_q(r,t) = = f/m - \mathrm{grad}\Psi_q(r,t)$ – не зависящая от скорости внешняя сила (сила тяжести), отнесенная к единице массы; f – сила негравитационного происхождения (например, электромагнитная сила Лоренца); $\Psi_q(r,t) \equiv -G\int \frac{m}{|r-r'|}[f(z',t)]^q dz'$ – гравитационный потенциал, удовлетворяющий уравнению

[2] В цитируемой работе кинетическая теория была основана на операторе столкновений Бхатнагера–Гросса–Крука (BGK), который был обобщен для произвольного значения параметра q.

Пуассона $\Delta\Psi_q(r) = 4\pi G\int mf^q d^D c$; G — гравитационная постоянная; τ — положительный параметр, который интерпретируется как характерное время релаксации произвольной функции распределения $f(r,c)$ к обобщенному локально-максвелловскому распределению $f^{(0)}(r,c)$ (величина τ совпадает по порядку величины со средним временем свободного пробега частиц в системе). Равновесное распределение $f^{(0)}(r,c)$, в случае когда $q > 1$, определяетсяследующей формулой (см., например, Колесниченко, 2019)

$$f^{(0)}(r,c) = \left\{c_{q,D}\frac{\rho_q}{m}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{D/2}\right\}^{1/q} \times \\ \times\left\{1-(1-q)\frac{m(c-u_q)^2}{2kT}\right\}^{1/(1-q)}, \tag{10}$$

где $c_{q,D} = \dfrac{(1-q)^{D/2}\Gamma\left(\dfrac{q}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{q}{1-q}-\dfrac{D}{2}\right)}$; $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$ — гамма-функция.

При использовании метода моментов были получены следующиеуравненияq-гидродинамики, которые являются обобщением для неэкстенсивных систем обычных гидродинамических уравнений Навье–Стокса:

$$\frac{\partial\rho_q}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_q\mathbf{u}_q) = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial(\rho_q u_q)}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\mathbf{P}_q + \rho_q u_q u_q\right) = n_q f - \rho_q \operatorname{grad}\psi_q, \tag{12}$$

$$\frac{\partial(\rho_q\varepsilon_q)}{\partial t} + \operatorname{div}\left\{\mathbf{J}_q + \rho_q\varepsilon_q u_q\right\} + \mathbf{P}_q : \operatorname{Grad}u_q = 0. \tag{13}$$

Уравнения (11)–(13) не являются в общем случае замкнутыми, поскольку отсутствует необходимая связь (определяющие соотношения) между потоковыми величинами $\mathbf{P}_q(r,t)$ и $\mathbf{J}_q(r,t)$ и скалярными характеристиками течения $\rho_q(r,t)$, $u_q(r,t)$ и $T(r,t)$. Эта связь может быть найдена с помощью решения модельного кинетического уравнения (9) методом Чепмена–Энскога при использовании общего асимптотического разложения функции распределения по числу Кнудсена. При применении этого метода в работе (Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013) были найденыопределяющие соотношения, замыкающие систему (11)–(13). В частности, для случая приближения нулевого порядка, когда распределение $f(r,t) \equiv f^{(0)}(r,t)$ (т.е. является обобщенным локально-максвелловским распределением (10)), было показано, что тензор напряжения $\mathbf{P}_q(r,t)$ сводится к шаровому тензору $\mathbf{P}_q^{(0)} \equiv p_q\mathbf{I}$, а поток тепла $\mathbf{J}_q = 0$. При этом внутренняя энергия $\varepsilon_q(r,t)$ и гидростатическое давление $p_q(r,t)$ определяются соотношениями

$$\varepsilon_q(r,t) = \frac{DkT}{2m}\left[1+(1-q)\,D/2)\right]^{-1}, \tag{14}$$

$$p_q(r,t) = \frac{\rho_q kT}{m\left[1+(1-q)\,D/2\right]} = \frac{2}{D}\rho_q\varepsilon_q. \tag{15}$$

Поскольку понятие температуры в q-статистике достаточно произвольно (оно зависит от определения температуры с точки зрения множителей Лагранжа), то далее мы будем интерпретировать величину $T_{\rm eff}(r,t) \equiv T/\left[1+(q-1)\,D/2\right]$ как обобщенную температуру сложной неаддитивной системы. Естественно, что эта температура в корне отличается от абсолютной термодинамической температуры T, характеризующей интенсивность хаотизации частиц системы. Заметим, что если записать через эффективную температуру $T_{\rm eff}$ выражение для внутренней энергии (14), то для величины ε_q получим соотношение $\varepsilon_q(r,t) = DkT_{\rm eff}/2m$, которое при $q \to 1$ и $D = 3$ совпадает с определением внутренней энергии в статистике Больцмана–Гиббса, соответствующим равному распределению энергии совершенного газа по степеням свободы. Если сохранить привычные представления о температуре $T_{\rm eff}$, то тогда неравенство $\varepsilon_q > 0$ накладывает жесткое ограничение на величину параметра деформацииэнтропии q: в этом случае энтропийный индекс должен удовлетворять неравенству $1 < q < 1 + 2/D$.

В приближении первого порядкаимеют местоследующие определяющие уравнения для потока тепла $\mathbf{J}_q(r,t)$ и тензора вязких напряжений $\mathbf{T}_q(r,t) \equiv \mathbf{P}_q - p_q\mathbf{I}$:

$$\mathbf{J}_q(r,t) = -\lambda_q \operatorname{grad}T, \tag{16}$$

$$T(r,t) = \mu_q\left(\operatorname{Grad}u + (\operatorname{Grad}u)^T - \frac{2}{3}I\operatorname{div}u\right), \tag{17}$$

где $\lambda_q(r,t) = \tau\dfrac{kp_q}{m}\dfrac{1+D/2}{1+(1-q)(1+D/2)}$, $\mu_q(r,t) = \tau p_q = \tau\dfrac{\rho_q kT}{m[1+(1-q)\,D/2]}$ — соответственно коэффициенты теплопроводности и сдвиговой вязкости.

УРАВНЕНИЯ q-ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ДОПЛАНЕТНОГО ОБЛАКА С РАВНОВЕСНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

В эволюции многих астрофизических объектов большую роль играет давление излучения, как фактор их гидростатического равновесия. Впервые анализ неустойчивости в аккреционных дисках относительно осесимметричных возмущений с учетом давления излучения был проведен в работе Шакуры и Сюняева (Shakura, Sunyaev, 1976). В последующих работах рассматривались общие политропные модели (Camenzind и др., 1986), учитывались не осесимметричные возмущения (McKee, 1990), звуковые и эпициклические колебания (Хоперсков, Храпов, 1995; Фридман, Хоперсков, 2011) и т.д.

Далее мы будем использовать систему уравнений q-гидродинамики (11)–(15) для моделирования неустойчивости околосолнечного допланетного облака (толстого диска),вещество которого состоит из смеси совершенного q-газа и чернотельного изотропного излучения при температуре T, распространяющегося по всем направлениям. Будем предполагать, что допланетное облако оптически толстое и распределение поля излучения близко к равновесному. Подчеркнем также, что облако в значительной мере обладает осевой симметрией, что является следствием его вращения вокруг центральной звезды. Далее будем также предполагать, что облако – самогравитирующее, для которого вертикальная структура (структура вдоль оси вращения) определяется балансом сил давления и гравитацией самого диска.

В случае пренебрежения гидродинамическими диссипативными процессами и нагревом космического вещества, обусловленным диссипацией и процессами ионизации и возбуждения, исходная система q-уравнений, состоящая из аналога уравнений Эйлера и уравнения Пуассона, имеет вид[3] (см., например, Колесниченко, 2019):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u) = 0, \tag{18}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}P - \mathrm{grad}\psi, \tag{19}$$

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho, \tag{20}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{P}{\rho}\mathrm{div}u + \frac{dQ}{dt}, \tag{21}$$

где соотношением $d\mathbf{A}/dt \equiv \partial\mathbf{A}/dt + (u\cdot\mathrm{Grad})\mathbf{A}$ определяется полная производная структурной величины $\mathbf{A}(r,t)$ по времени. Здесь

$$P(r,t) = p_q + p_{\mathrm{rad}} \equiv p_q + aT^4/3, \tag{22}$$

$$\varepsilon(r,t) = \varepsilon_q + \varepsilon_{\mathrm{rad}} \equiv \varepsilon_q + aT^4/\rho \tag{23}$$

– соответственно полное давление и полная внутренняя энергия (на единицу массы) смеси совершенного q-газа и чернотельного излучения; $\rho dQ/dt = -\mathrm{div}\mathbf{J}_Q$; $\mathbf{J}_Q$ – суммарный вектор теплового потока, учитывающий в принципе все термодинамически обратимые процессы, которые могут уносить тепло из элемента среды при его движении; $\varepsilon_{\mathrm{rad}}(r,t) = aT^4/\rho$ – энергия излучения черного тела, находящаяся в единице массы; $\varepsilon_q(r,t) = c_{vq}T(r,t) = \dfrac{D}{2+(1-q)D}\dfrac{kT(r,t)}{m}$ – внутренняя энергия (на единицу массы газовой составляющей допланетного диска); $p_{\mathrm{rad}}(r,t) \equiv aT^4/3$ – лучевое давление; $p_q(r,t) = \dfrac{2}{2+(1-q)D}\dfrac{k}{m}T\rho = \dfrac{2}{D}\rho\varepsilon_q$ – газовое давление в неэкстенсивной дисковой системе (аналог уравнения состояния в кинетической теории совершенных газов); $T(r,t)$ – абсолютная температура; a – постоянная излучения Стефана–Больцмана; $\psi(r,t) = -G\int_V \dfrac{\rho(r',t)}{|r-r'|}dr'$ – гравитационный потенциал, являющийся решением уравнения Пуассона (8) (интеграл здесь берется по всему объему V, занимаемому допланетным облаком); $c_{vq} = \dfrac{D}{2+(1-q)D}\dfrac{k}{m}$ – удельная изохромная теплоемкость газовой составляющей смеси. Определим также показатель адиабаты газового вещества диска как отношение $\gamma_q \equiv \gamma_{\mathrm{gas}} = c_{pq}/c_{vq}$. Тогда $\gamma_q \equiv \gamma_{\mathrm{gas}} = 2 - q + 2/D$, $\gamma_1 = (2+D)/D$.

Уравнение для полной внутренней энергии (21) удобно переписать, используя уравнение неразрывности (18), в обычной форме первого начала термодинамики

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} + P\frac{dv}{dt}, \tag{21.1}$$

или в виде соотношения Гиббса

$$TdS/dt \equiv dQ/dt = d\varepsilon/dt + Pdv/dt, \tag{24}$$

выражающего скорость изменения энтропии $S(r,t)$ (на единицу массы) дискового вещества и излучения при движении элемента среды вдоль его траектории. Здесь $v(r,t) = 1/\rho$ – удельный объем.

Изоэнтропические изменения в среде, содержащей q-газ и радиацию

Далее мы будем рассматривать такие движения космического материального вещества (находящегося в состоянии совершенного q-газа) и чернотельного излучения, для которых энтропия каждой частицы среды остается в первом приближении постоянной на протяжении всего пути частицы, т.е. $dS/dt \equiv \partial S/\partial t + u\cdot\mathrm{grad}S = 0$. Подобные обратимые и адиабатические движения яв-

[3] Далее индекс “q” у ряда гидродинамических и термодинамических переменных мы будем опускать.

ляются изоэнтропическими. Для них энергетическое уравнение (21) сводится к виду

$$\rho d\varepsilon/dt + P\mathrm{div}u = 0, \tag{25}$$

выражающему тот факт, что скорость изменения полной внутренней энергии движущегося элемента среды равна работе по сжатию этого элемента, совершаемой окружающей средой.

Вместе с тем для астрофизических целей часто удобно использовать другие формы уравнения (25) (которые впервые были выведены Эддингтоном (Eddington, 1988) и Чандрасекхаром (Чандрасекхар, 1950)). Эти формы справедливы, когда давление $P(r,t)$ и внутреннюю энергию $\varepsilon(r,t)$ можно вычислить из соответствующих уравнений состояния как функций от удельного объема $v(r,t)$ и температуры $T(r,t)$ (или энтропии $S(r,t)$) в зависимости от исследуемого процесса. Для "медленного" процесса, характеризуемого временем, много большим времени теплопередачи, любые возмущения профиля температуры будут успевать релаксировать. Следовательно, этот процесс можно рассматривать как изотермический, при котором $P = P(v,T_0) = P(v)$. "Быстрый" процесс (по сравнению с процессом теплопереноса) можно считать адиабатическим в силу нехватки времени для обмена теплом двух соседних областей: $S = S_0 = \mathrm{const}$ и $P = P(v,S_0) = P(v)$.

Из энергетического уравнения (25) для квазистатического процесса следует

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial v}\right)_T dv + Pdv = \\ = \frac{v}{T}\left(12p_{\mathrm{rad}} + \frac{c_{vq}}{c_{pq}-c_{vq}}p_q\right)dT + (4p_{\mathrm{rad}} + p_q)dv.\end{gathered} \tag{26}$$

Следовательно, для изоэнтропических изменений имеем

$$\left(12p_{\mathrm{rad}} + \frac{1}{\gamma_q - 1}p_q\right)d\ln T + (4p_{\mathrm{rad}} + p_q)d\ln v = 0. \tag{27}$$

Введем теперь адиабатические показатели смеси вещества и излучения Γ_1, Γ_2 и Γ_3 соотношениями

$$\frac{d}{dt}\ln P = \Gamma_1\frac{d}{dt}\ln\rho, \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}\ln T = (\Gamma_3 - 1)\frac{d}{dt}\ln\rho = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2}\frac{d}{dt}\ln P, \tag{29}$$

которые могут быть использованы вместо энергетического уравнения (25). С учетом уравнения состояния "совершенного q-газа" (15) можно записать

$$dP = d(p_{\mathrm{rad}} + p_q) = (4p_{\mathrm{rad}} + p_q)d\ln T - p_q d\ln v. \tag{30}$$

Следовательно, уравнение (28) есть не что иное, как

$$\begin{gathered}(4p_{\mathrm{rad}} + p_q)d\ln T + \\ + [\Gamma_1(p_{\mathrm{rad}} + p_q) - p_q]d\ln v = 0.\end{gathered} \tag{31}$$

Из (27) и (31) следует, что

$$\frac{12p_{\mathrm{rad}} + (\gamma_q - 1)^{-1}p_q}{4p_{\mathrm{rad}} + p_q} = \frac{4p_{\mathrm{rad}} + p_q}{\Gamma_1(p_{\mathrm{rad}} + p_q) - p_q}. \tag{32}$$

Введем теперь в рассмотрение величину $\beta = p_q/P$ – коэффициент, характеризующий долю газа в полном давлении смеси[4]. При использовании этого параметра соотношение (32) можно переписать в виде:

$$\begin{gathered}\Gamma_1 = \beta + \frac{(4-3\beta)^2(\gamma_q - 1)}{\beta + 12(\gamma_q - 1)(1-\beta)}, \\ \left(\gamma_q - 1 = 1 - q + 2/D\right).\end{gathered} \tag{33}$$

Можно легко показать, что имеют место следующие соотношения

$$\Gamma_2 = \frac{(4-3\beta)\Gamma_1}{\beta + 3(1-\beta)\Gamma_1} = 1 + \frac{(4-3\beta)(\gamma_q - 1)}{3(\gamma_q - 1)(1-\beta)(4+\beta)}, \tag{33.1}$$

$$\begin{gathered}\Gamma_3 = 1 + \frac{\Gamma_1 - \beta}{4 - 3\beta} = 1 + \frac{\Gamma_1(\Gamma_2 - 1)}{\Gamma_2} = \\ = 1 + \frac{(4-3\beta)(\gamma_q - 1)}{\beta + 12(\gamma_q - 1)(1-\beta)}.\end{gathered} \tag{33.2}$$

Если $p_{\mathrm{rad}} \ll p_q$, то все обобщенные показатели адиабаты Γ для "q-газа + излучение" совпадают с показателем адиабаты чистого q-газа $\left(\gamma_q = 2/D + 2 - q\right)$, а когда присутствует одно лишь излучение абсолютно черного тела ($p_q \ll p_{\mathrm{rad}}$), то они равны $4/3$. Таким образом, для смеси "совершенного q-газа" и излучения обобщенные показатели адиабаты принимают промежуточные значения от $4/3$ до γ_q.

ДЖИНСКОВСКАЯ ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В НЕЭКСТЕНСИВНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим теперь простейшую задачу возникновения неустойчивости в бесконечной покоящейся сферически однородной среде. Напомним, что при рассмотрении гравитационной неустойчивости Дж. Джинс рассматривал однородное состояние самогравитирующей газовой среды в состоянии покоя, что не совсем корректно, так как

[4] На особую важность величины $(1 - \beta)$ для теории звездной структуры впервые указал Эддингтон. В известном отрывке из его книги "Внутреннее строение звезд" Эддингтон связывал эту величину с "явлением звезды" ("happening of the stars").

такое состояние не является состоянием равновесия. Тем не менее, его вывод критерия неустойчивости можно рассматривать как первое приближение, которое в наиболее простых случаях дает правильный порядок нижней критической длины волны возмущения, ведущего к неустойчивости (см., например, Сафронов, 1969; Фридман, Хоперсков, 2011).

Линеаризованные основные дифференциальные уравнения (18)–(21) для случая чисто радиального сферически симметричного движения с учетом допущений, что невозмущенное состояние является равновесным ($u = u_0 + u', u_0 = 0$) и что уравнение Пуассона (20) можно применить лишь к возмущениям плотности (условие $\psi_0 \cong 0$ называют иногда “мошенничеством” Джинса (см. Jeans, 1902; 2009)), имеют вид:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u}{\partial r} = 0, \tag{34}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P'}{\partial r} - \frac{\rho'}{\rho_0^2}\frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{\partial \psi'}{\partial r}, \tag{35}$$

$$d(P'/P_0)/dt = \Gamma_{1,0} d(\rho'/\rho_0)/dt, \tag{36}$$

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial r^2} = 4\pi G \rho'. \tag{37}$$

Здесь и далее индекс “0” относится к невозмущенным величинам.

Уравнение (36) тривиально интегрируется. Выбирая постоянную интегрирования так, чтобы $P' = 0$ при $\rho' = 0$, получим

$$P'/P_0 = \Gamma_{1,0}\rho'/\rho_0. \tag{38}$$

Допустим теперь, что характерная длина, связанная с пространственными изменениями величин P_0 и ρ_0, велика по сравнению с другими характерными длинами задачи (это так называемое приближение коротковолновой акустики), т.е. можно пренебречь производными $\partial P_0/\partial r$ и $\partial \rho_0/\partial r$. При этих дополнительных упрощающих предположениях уравнение неразрывности, импульса и энергии легко объединить в одно уравнение для адиабатической звуковой волны[5] (см., например, Ландау, Лифшиц, 1976)

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + v_{S,q}^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial r^2} - 4\pi G \rho_0 \rho' = 0. \tag{39}$$

Здесь возмущенная производная давления $\partial P'/\partial r$ выражается, согласно (38), через возмущенную производную плотности $\partial \rho'/\partial r$ в виде $\partial P'/\partial r = (\Gamma_{1,0} P_0/\rho_0)\partial \rho'/\partial r = v_{S,q}^2 \partial \rho'/\partial r$, где

$$\begin{aligned} v_{S,q} &\equiv \sqrt{\Gamma_{1,0}\frac{P_0}{\rho_0}} = \left\{\frac{p_{q0}}{\rho_0}\left[1 + (\Gamma_{3,0} - 1)\frac{4 - 3\beta_0}{\beta_0}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\{\frac{1}{(\gamma_q - 1)D/2}\frac{kT_0}{m}\left[1 + \frac{(4 - 3\beta_0)^2(\gamma_q - 1)}{\beta_0^2 + 12\beta_0(\gamma_q - 1)(1 - \beta_0)}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{40}$$

— адиабатическая (или лапласова) скорость звука в неэкстенсивной радиационной гидродинамике. При написании (40) учтено, что

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{\rho_0} &= \frac{p_{q,0} + p_{\mathrm{rad},0}}{\rho_0} = \frac{1}{\beta_0}\frac{p_{q,0}}{\rho_0} = \\ &= \frac{1}{\beta_0}\frac{1}{(\gamma_q - 1)D/2}\frac{kT_0}{m} = \frac{1}{\beta_0}\frac{1}{1 + (1 - q)D/2}\frac{kT_0}{m}. \end{aligned} \tag{41}$$

Заметим, что в частном случае, когда $q = 1$ и $D = 3$, имеем $\gamma_1 = 5/3$ (классический совершенный одноатомный газ). Отсюда следует, что

$$v_{S,1} \equiv \left\{\frac{k}{m}T_0\left[1 + \frac{2(4 - 3\beta_0)^2}{3\beta_0(8 - 7\beta_0)}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{40.1}$$

Когда излучение также отсутствует, то $(v_{S,1})_{\beta_0=1} \equiv v_{\mathrm{gas},1} = \sqrt{\gamma_1 kT_0/m}$ — адиабатическая скорость звука в совершенном газе.

Если $q \neq 1$ (совершенный q-газ) и излучение отсутствует ($\beta_0 = 1$), то

$$\begin{aligned} (v_{S,q})_{\beta_0=1} &= \left[\frac{kT_0}{m}\frac{2\gamma_q}{(\gamma_q - 1)D}\right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left[\frac{kT_0}{m}\frac{2 - q + 2/D}{(1-q)D/2 + 1}\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{40.2}$$

Уравнение (39) является линейным и однородным уравнением в частных производных, следовательно, к нему применим метод нормальных колебаний (метод мод). Решая уравнения (39) для возмущенной плотности в виде $\rho' \sim \exp(-i\omega t + ikr)$, описывающем волны с угловой частотой ω, волновым вектором k в направлении r[6] и длиной

[5] При изучении возмущенных состояний самогравитирующего космического вещества часто приходится иметь дело с разновидностью звуковых волн.

[6] Следует заметить, что линеаризованное уравнение импульса требует, чтобы скорость *u* была параллельна волновому вектору $\pm\mathbf{k}$ (см. Ландау, Лифшиц, 1976). Следовательно, скорости частиц жидкости, связанные с адиабатическими звуковыми волнами, параллельны направлению распространения волн.

волны $\lambda_r = 2\pi/k$, получим следующее дисперсионное уравнение для бегущей звуковой волны

$$\omega^2 - k^2 \frac{p_{q,0}}{\rho_0}\left\{1 + \frac{\Gamma_{1,0} - \beta_0}{4 - 3\beta_0}\left(1 + 4\frac{1-\beta_0}{\beta_0}\right)\right\} + \\ + 4\pi G\rho_0 = 0, \quad (42)$$

которое с учетом соотношений (40) и (41) принимает “стандартный” вид

$$\omega^2 = k^2 v_{S,q}^2 - 4\pi G\rho_0. \quad (42.1)$$

Здесь адиабатическая скорость звука $v_{S,0}$ определяется формулой (40).

Для устойчивых волн с частотами ω имеем $\omega^2 > 0$, тогда как неустойчивость соответствует условию $\omega^2 < 0$. Эти два класса разделяет случай нейтральной устойчивости $\omega^2 = 0$, что соответствует модам с критической длиной волны возмущения

$$\lambda_{\text{cr}} = 2\pi/k_{\text{cr}}, \quad k_{\text{cr}}^2 = \omega_{\text{cr}}^2/v_{Sq}^2, \quad \omega_{\text{cr}}^2 = 4\pi G\rho_0. \quad (43)$$

Из уравнения (42.1) следует, что граничное значение $k = k_{\text{cr}}$ разделяет устойчивые ($k > k_{\text{cr}}$) и неустойчивые ($k < k_{\text{cr}}$) пульсации плотности. При малых k (длинные волны) пульсациибудут расти со временем и появляется нестабильность Джинса, а коротковолновые пульсации плотности (большие k, малые длины волн) колеблются, т.е. распространяются в виде звуковых волн.

Таким образом, критическая длина волны возмущения

$$\lambda_{\text{cr}} = \frac{2\pi v_{Sq}}{\omega_{\text{cr}}} = \sqrt{\frac{\pi v_{Sq}^2}{G\rho_0}} \equiv \\ \equiv \left\{\frac{2\pi k T_0}{mG\rho_0 D}\left[\frac{1}{\gamma_q - 1} + \frac{(4-3\beta_0)^2}{\beta_0^2 + 12\beta_0(\gamma_q - 1)(1-\beta_0)}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (44)$$

является размером мельчайших “капель” рассматриваемой “фрактальной” газовой среды с излучением, которые могут удерживаться вместе собственным гравитационным притяжением. Следовательно, модифицированный в рамках неэкстенсивной кинетической теории критерий неустойчивости Джинса для смеси q-газа и чернотельного излучения будет выглядеть следующим образом: длина неустойчивой волны возмущения λ_r должна удовлетворять неравенству

$$\lambda_r \geq \lambda_{\text{cr}} = v_{Sq}\sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} \equiv \left\{\frac{\pi k T_0}{mG\rho_0}\frac{2}{(\gamma_q - 1)D} \times \\ \times \left[1 + \frac{(4-3\beta_0)^2(\gamma_q - 1)}{\beta_0^2 + 12\beta_0(\gamma_q - 1)(1-\beta_0)}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (45)$$

В традиционной литературе длину

$$\lambda_{\text{J}} = \sqrt{\frac{\pi v_{\text{gas}}^2}{G\rho_0}} = \left(\gamma_1 \frac{\pi k T_0}{mG\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (46)$$

соответствующую размеру области сжатия самогравитирующего совершенного газа, называют длиной Джинса. С учетом (45) критерий неустойчивости Джинса в неэкстенсивной кинетике может быть переписан в виде:

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_{\text{J}}} \geq \frac{v_{Sq}}{v_{\text{gas}}} = \left\{\frac{1}{\gamma_1}\frac{2}{(\gamma_q - 1)D} \times \\ \times \left[1 + \frac{(4-3\beta_0)^2(\gamma_q - 1)}{\beta_0^2 + 12\beta_0(\gamma_q - 1)(1-\beta_0)}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} = \\ = \left\{\frac{1}{\gamma_1}\frac{2/D}{(1 - q + 2/D)} \times \\ \times \left[1 + \frac{(4-3\beta_0)^2(1 - q + 2/D)}{\beta_0^2 + 12\beta_0(1 - q + 2/D)(1-\beta_0)}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \equiv \Xi_q. \quad (45.1)$$

Отсюда следует:

1. Если $q = 1$ (при этом $\gamma_1 = 1 + 2/D$), то фактор

$$\Xi_1 \equiv \left[\frac{1}{\gamma_1}\left(1 + \frac{(4-3\beta_0)^2\, 2/D}{\beta_0^2 + 24\beta_0(1-\beta_0)/D}\right)\right]^{\frac{1}{2}} > 1. \quad (47)$$

Следовательно, критическая длина волны возмущения λ_r в рассматриваемом случае больше джинсовской длины волны λ_{J}, т.е. благодаря давлению излучения облачная среда стабилизируется, причем равенство соответствует предельной устойчивости.

2. Если $q \neq 1$, но излучение отсутствует, $\beta_0 = 1$, то фактор

$$\Xi_q = \left[\frac{1}{\gamma_1}\left(2/D + \frac{2/D}{1 - q + 2/D}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \\ 0 < q < 1 + 2/D. \quad (48)$$

В этом случае критерий гравитационной неустойчивости зависит от численных значений индекса энтропийной деформации q и размерности пространства скоростей D. При этом возможна ситуация, при которой гравитационно устойчивое (на основе классической статистики Больцмана–Гиббса) облако газа, будет неустойчивым согласно неэкстенсивной статистики Тсаллиса (см. Kolesnichenko, Marov, 2014, 2016).

Связанная с λ_{cr} критическая масса (масса, содержащаяся внутри сферы диаметром λ_{cr}) определяется соотношением

$$M_{\text{cr}} = (\pi/6)\rho_0\lambda_{\text{cr}}^3 = M_{\text{J}}\Xi^3, \quad (49)$$

где $M_{\rm J} \equiv (\pi/6)\rho_0\lambda_{\rm J}^3 = (\pi/6)\rho_0\left(\gamma_1\pi k T_0/mG\rho_0\right)^{3/2}$ – критическая масса Джинса. Возмущения с массой M_r, превышающей критическую массу Джинса ($M_{\rm J}(\Xi > 1)$) могут расти, формируя гравитационно-ограниченные структуры, в то время как возмущения с массой M_r меньше $M_{\rm J}$ не растут и ведут себя как акустические волны. При этом для самогравитирующих неэкстенсивных сред с излучением критические значения длины волны и массы явно зависят от энтропийного индекса q, размерности пространства скоростей D и коэффициента β, которые, являясь свободными параметрами, должны определяться в каждом конкретном случае эмпирическим путем из экспериментальных данных. Это позволяет при исследовании неустойчивости самогравитирующих космических объектов в рамках неэкстенсивной статистики более обоснованно моделировать реально складывающуюся ситуацию.

Заметим, что дальнейшее развитие предложенного здесь подхода может быть связано с учетом влияния на джинсовскую неустойчивость вращения среды, магнитного поля, вязкости и других диссипативных эффектов.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЩЕСТВА И ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕЭКСТЕНСИВНОЙ КИНЕТИКЕ ТСАЛЛИСА

В этом разделе мы будем исходить из гипотезы Ф. Хойла (Hoyle, 1960) о совместном образовании звезды (Солнца) и допланетного облака из вещества единой вращающейся звездной туманности. Существует интегральная теорема для находящейся в гравитационном равновесии туманности сферической конфигурации из вещества (совершенного газа) и чернотельного излучения, гласящая, что давление P_{ce} в центре притяжения гравитирующего облака массы M, в котором плотность $\rho(r)$ в точке, находящейся на расстоянии r от центра, не превышает средней плотности $\bar{\rho}(r)$ внутренней части с радиусом r, должно удовлетворять неравенству (см. Чандрасекхар, 1950; *Теорема 6* на стр. 111)

$$\frac{1}{2}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\bar{\rho}^{4/3}M^{2/3} \le P_{ce} \le \frac{1}{2}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\rho_{ce}^{4/3}M^{2/3}. \quad (50)$$

Здесь $\bar{\rho}$, ρ_{ce} – соответственно средняя плотность облака и его плотность в центре. Это означает, что давление, действующее в центре облака массы M, должно быть промежуточным между давлениями в центрах двух конфигураций с однородной плотностью – одна с плотностью, равной средней плотности $\bar{\rho}$ облака, а другая с плотностью, равной плотности ρ_{ce} в его центре. В случае, когда имеются некоторые области, в которых преобладают противоположные градиенты плотности, неравенство (50) нарушается, а это означает неустойчивость. Таким образом, можно считать, что неравенство (50) эквивалентно интегральному условию устойчивости "материнской" звездной туманности.

Получим теперь обобщение этого условия устойчивости на случай неэкстенсивной сферической газовой массы с излучением. Используя определения параметра β и уравнения состояния для давления излучения, а также формулу (15) для давления q-газа, получим

$$P = \frac{1}{\beta}\frac{1}{1+(1-q)D/2}\frac{k}{m}T\rho = \frac{1}{1-\beta}\times\frac{1}{3}aT^4. \quad (51)$$

Отсюда следует, что

$$T = \left[\frac{3(1-\beta)}{a\beta}p_q\right]^{1/4} = \left[\frac{3}{a}\frac{1}{1+(1-q)D/2}\frac{(1-\beta)}{\beta}\right]^{1/3}\rho^{1/3}. \quad (52)$$

Теперь

$$P = \left[\left(\frac{k}{m}\right)^4\frac{3(1-\beta)}{a\beta^4}\right]^{1/3}\left[\frac{1}{1+(1-q)D/2}\right]^{4/3}\rho^{4/3}. \quad (53)$$

Следовательно, в центре газовой сферы

$$P_{ce} = \left[\left(\frac{k}{m}\right)^4\frac{3(1-\beta_{ce})}{a\beta_{ce}^4}\right]^{1/3}\times \left[\frac{1}{1+(1-q)D/2}\right]^{4/3}\rho_{ce}^{4/3}. \quad (54)$$

С другой стороны, согласно неравенству (50), имеем

$$P_{ce} \le \frac{1}{2}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}M^{2/3}\rho_{ce}^{4/3}. \quad (55)$$

Сравнивая (55) и (50), получим:

$$\left[\left(\frac{k}{m}\right)^4\frac{3(1-\beta_{ce})}{a\beta_{ce}^4}\right]^{1/3}\left[\frac{2}{2+(1-q)D}\right]^{4/3} \le \left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3}GM^{2/3}, \quad (56)$$

или

$$M \ge \left[\frac{2}{2+(1-q)D}\right]^2\left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{k}{m}\right)^2\times \left[\frac{3}{a}\frac{(1-\beta_{ce})}{\beta_{ce}^4}\right]^{1/2}G^{-3/2}. \quad (57)$$

В предыдущих неравенствах β_{ce} есть величина β в центре газовой сферы.

Подставляя в (57) численное значение постоянной Стефана–Больцмана $a = 8\pi^5 k^4 / 15 h^3 c^3$ (где h – постоянная Планка, c – скорость света в вакууме), будем иметь:

$$\mu^2 M \left[\frac{2 + (1-q)D}{2}\right]^2 \times \\ \times \left(\frac{\beta_{ce}^4}{1-\beta_{ce}}\right)^{1/2} \geq 0.1873 \left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2} m_{\mathrm{H}}^{-2} \cong 5.48 M_{\odot}. \tag{58}$$

Здесь использованы соотношения $m = \mu m_{\mathrm{H}}$, где μ – средний молекулярный вес, m_{H} – масса атома водорода; $M_{\odot}$ – масса Солнца; $(hc/G)^{3/2} m_{\mathrm{H}}^{-2} \approx 29.2 M_{\odot}$. Тогда правая часть неравенства

$$M \geq 5.48 M_{\odot} \mu^{-2} \left(\frac{1-\beta_{ce}}{\beta_{ce}^4}\right)^{1/2} \left[\frac{2}{2 + (1-q)D}\right]^2, \quad (0 < q < 1 + 2/D) \tag{59}$$

дает в рамках неэкстенсивной кинетики Тсаллиса нижний предел устойчивости гравитирующего облака (сферической газовой конфигурации) с массой M.

Заметим, что если ввести параметр Чандрасекхара β_*, который однозначно определяется массой M газовой конфигурации и средним молекулярным весом μ при помощи уравнения четвертого порядка[7] (см. Чандрасекхар, 1950; 1985)

$$\mu^2 M \equiv \left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{k}{m_{\mathrm{H}}}\right)^4 \frac{3}{a} \frac{(1-\beta_*)}{\beta_*^4}\right]^{\frac{1}{2}} G^{-3/2} = \\ = 5.48 \left(\frac{(1-\beta_*)}{\beta_*^4}\right)^{\frac{1}{2}} M_{\odot}, \tag{60}$$

то неравенство (59) можно переписать в виде

$$\frac{(1-\beta_*)}{\beta_*^4} \geq \frac{1-\beta_{ce}}{\beta_{ce}^4} \left[\frac{2}{2 + (1-q)D}\right]^4, \quad (0 < q < 1 + D/2),$$

или, поскольку функция $(1-\beta)\beta^{-4}$ монотонно увеличивается с увеличением $(1-\beta)$, так:

$$(1-\beta_{ce})\left[1 + (1-q)D/2\right]^{-4} \leq (1-\beta_*). \tag{61}$$

Таким образом, для устойчивости неэкстенсивного сферического газового облака с излучением численные значения параметров β_{ce}, D и q должны удовлетворять неравенству (61).

[7] Из формулы (60) следует, в частности, что для звезды с массой, равной солнечной, и со средним молекулярным весом, равным единице, давление излучения в центре звезды не может превышать трех процентов от общего давления, т.е. $1 - \beta_* \cong 0.03$ (Чандрасекхар, 1985).

ДЖИНСОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДОПЛАНЕТНОГО ОБЛАКА С ИЗЛУЧЕНИЕМ В КИНЕТИКЕ ТСАЛЛИСА

Поскольку вращение является весьма распространенным явлением во Вселенной, возникает вопрос: как вращение действует на джинсовскую гравитационную неустойчивость? В связи с этим рассмотрим в упрощенной постановке проблему влияния силы Кориолиса на гравитационную неустойчивость неэкстенсивной газовой среды допланетного излучающего облака.

Для простоты будем предполагать, что самогравитирующее облако равномерно вращается вокруг оси i_z с одинаковой угловой скоростью $\Omega = (0, 0, \Omega)$, а в направлении оси i_x имеется поток q-газа, скорость которого $u_0 = (U, 0, 0)$[8]. В этом случае в исходную систему уравнений q-гидродинамики (18)–(21) необходимо внести следующие изменения: в правой части уравнения движения (19) появляется дополнительный член $2u \times \Omega$, связанный с силой Кориолиса, а энергетическое уравнение (21) удобно использовать в виде (29)

$$d \ln T / dt = (\Gamma_3 - 1) d \ln \rho / dt.$$

Тогда линеаризованные уравнения (18)–(21), полученные с учетом допущений, что в невозмущенном состоянии облака имеется равномерный поток газа $u_0 \equiv i_x U$ (где $U = \mathrm{const}$) и что уравнение Пуассона (20) можно применить лишь к возмущениям плотности, имеют вид:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + U \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \rho_0 \mathrm{div} u' = 0, \tag{62}$$

[8] Известно, что проблему устойчивости самогравитирующего двумерного газового облака в принципе нельзя описывать в рамках двумерного приближения, поскольку оно заведомо является сильно неустойчивым (см., например, Фридман, Хоперсков, 2011). Однако при наличии сильного внешнего гравитационного поля с цилиндрической геометрией и с образующей вдоль оси вращения облака возможно обеспечить его устойчивость в случае, когда угловая скорость вращения достаточно велика. При этом структура допланетного облака вдоль оси вращения будет определяться исключительно его самогравитацией. Понятно, что этот случай искусственный, поскольку в реальных астрофизических системах такие цилиндрические поля если и встречаются, то без вложенных дисков. Вместе с тем, анализ такого вложенного в цилиндр самогравитирующего газового толстого диска представляет определенный теоретический интерес, поскольку только в этом случае можно отделить эффекты, к которым приводит самогравитация в чистом виде. Именно такие модели изучались в большинстве классических работ по астрофизическим дискам (см., например, Goldreich, Lynden-Bell, 1965; Hunter, 1972; Toomre, 1964).

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + (u_0 \cdot \mathrm{grad})u' - 2u' \times \Omega + \frac{\beta_0 P_0}{\rho_0} \times \\ \times \left\{ \frac{4 - 3\beta_0}{\beta_0} \mathrm{grad}\left(\frac{T'}{T_0}\right) + \mathrm{grad}\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right) \right\} + \mathrm{grad}\psi' = 0, \quad (63)$$

$$\Delta\psi' = 4\pi G\rho', \quad (64)$$

$$\frac{dT'}{dt} = (\Gamma_{3,0} - 1)\frac{T_0}{\rho_0}\frac{d\rho'}{dt}, \quad (65)$$

где

$$2u' \times \Omega = \{2v'\Omega, -2u'\Omega, 0\}. \quad (66)$$

Здесь величины ρ_0, T_0, P_0, u_0 и β_0 описывают некоторое стационарное решение системы (18)–(21), а величины ρ', T', $u'(= i_x u' + i_y v' + i_z w')$ и ψ' – суть малые возмущения гидродинамических параметров, слабо нарушающих невозмущенное состояние. Система уравнений (62)–(65) описывает развитие малых адиабатических возмущений во фрактальной газовой среде с излучением на фоне основного решения в пространстве и во времени. Она является системой линейных и однородных уравнений в частных производных, следовательно, к ней применим метод нормальных колебаний (метод мод). Представим все возмущенные гидродинамические параметры ξ в виде

$$\xi \sim \exp\left[-i\omega t + i(k_x x + k_y y + k_z z)\right], \quad (67)$$

описывающем совокупность волн возмущения с угловой частотой ω и действительным волновым числом $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$, компоненты которого направленывдоль направлений i_x, i_y и i_z. Подставляя их в систему (62)–(67) и используя соотношение

$$\rho_0 T' = (\Gamma_{3,0} - 1)T_0\rho' \quad (68)$$

(следствие уравнения (65)) в результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно малых возмущений гидродинамических параметров:

$$(-\omega + k_x U)\rho' + \rho_0 \mathbf{k} \cdot u' = 0, \quad (69)$$

$$iu'(-\omega + k_x U) - 2u' \times \Omega + \\ + i\mathbf{k}\left\{ \frac{\rho'}{\rho_0}\frac{\beta_0 P_0}{\rho_0}\left[\frac{4 - 3\beta_0}{\beta_0}(\Gamma_{3,0} - 1) + 1\right] + \psi' \right\} = 0, \quad (70)$$

$$k^2\psi' + 4\pi G\rho' = 0. \quad (71)$$

Из системы уравнений (69)–(71) вытекает следующее алгебраическое соотношение

$$i(-\omega + k_x U)u' - 2u' \times \Omega + i\frac{k^2 v_{S,q}^2}{\omega - k_x U}\mathbf{k}\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}'}{k^2} - \\ - i\frac{4\pi G\rho_0}{\omega - k_x U}\mathbf{k}\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}'}{k^2} = 0, \quad (72)$$

или

$$(\omega - k_x U)^2 u' - i \times 2(u' \times \Omega)(\omega - k_x U) - \\ - \mathbf{k}^2 v_{S,q}^2 u' + 4\pi G\rho_0 u' = 0. \quad (73)$$

Здесь $v_{S,q} = \left\{ \frac{p_{q0}}{\rho_0}\left[\frac{4 - 3\beta_0}{\beta_0}(\Gamma_{3,0} - 1) + 1\right] \right\}^{\frac{1}{2}}$ – адиабатическая скорость звука в неэкстенсивной газовой среде с излучением. Заметим, что при написании (73) использовано векторное тождество $\mathbf{u}' \equiv \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}')/k^2 + k^{-2}\mathbf{k} \times (\mathbf{u}' \times \mathbf{k})$ (Кочин, 1961), которое для продольных звуковых волн в жидкости (см. сноску № 6) принимает вид: $\mathbf{u}' = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}')/k^2$.

Проанализируем соотношение (73).

1. Если предположить, что равновесное самогравитирующее газовое облако не вращается ($U = 0$ и $\Omega = 0$), то (73) совпадает с дисперсионным соотношением (42.1), из которого следует рассмотренный выше критерий неустойчивости Джинса (46) для покоящегося однородного облака с излучением в случае неэкстенсивной кинетики.

2. Если $U = \mathrm{const}$ и $\Omega = 0$, то из (73) следует дисперсионное соотношение вида:

$$(-\omega + k_x U)^2 = \mathbf{k}^2 v_{S,q}^2 - 4\pi G\rho_0. \quad (74)$$

Из этого соотношения следует, что равномерный поток вещества оказывает дестабилизирующее влияние на устойчивость газового облака, способствуя увеличению критического значения джинсовского волнового числа $\mathbf{k}_\mathrm{J}$ (Radwan, 2004).

3. Если скорость потока $U = 0$, а $\Omega \neq 0$, то:

$$u'(\omega^2 - \mathbf{k}^2 v_{S,q}^2 + 4\pi G\rho_0) = i \times 2(u' \times \Omega)\omega. \quad (75)$$

При умножении этого соотношения скалярно на пульсирующую скорость u' получим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 - \mathbf{k}^2 v_{S,q}^2 + 4\pi G\rho_0 = 0, \quad (76)$$

из которого следует, что кориолисова сила вращения не преодолевает стабилизирующего эффекта излучения для самогравитирующего облака, т.е. справедлив рассмотренный выше критерий неустойчивости Джинса (46) и для вращающегося облака с излучением.

4. Рассмотрим теперь случай, когда волна возмущения распространяется в плоскости xy перпендикулярно направлению оси вращения обла-

ка $\Omega = i_z\Omega$, т.е. когда $u' \cdot \Omega = 0$. Тогда из (75) следует алгебраическое соотношение:

$$\begin{gathered}|u'|^2(\omega^2 - \mathbf{k}^2 v_{S,q}^2 + 4\pi G\rho_0)^2 = \\ = -4\omega^2(u' \times \Omega)\cdot(u' \times \Omega) = 4\omega^2 |u'|^2 \Omega^2,\end{gathered} \tag{77}$$

записанное здесь с использованием формулы векторной алгебры $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 - \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$ (см. Кочин, 1961) и условия $u' \cdot \Omega = 0$.

Из (77) вытекает следующее дисперсионное соотношение

$$\begin{gathered}\omega^4 + 2\omega^2(-k^2 v_{S,q}^2 + 4\pi G\rho_0 - 2\Omega^2) + \\ + (k^2 v_{S,q}^2 - 4\pi G\rho_0)^2 = 0.\end{gathered} \tag{78}$$

Пусть ω_1^2 и ω_2^2 – корни уравнения (78); тогда

$$\begin{gathered}\omega_1^2 + \omega_2^2 = -2(-\mathbf{k}^2 v_{S,q}^2 + 4\pi G\rho_0 - 2\Omega^2), \\ \omega_1^2\omega_2^2 = (\mathbf{k}^2 v_{S,q}^2 - 4\pi G\rho_0)^2.\end{gathered} \tag{79}$$

Отсюда следует, что условие неустойчивости облака $\omega_{1,2}^2 < 0$ для совокупности волн возмущения имеет вид

$$v_{S,q}^2\mathbf{k}^2 < 4\pi G\rho_0 - 2\Omega^2. \tag{80}$$

В этом случае критическая длина волны возмущения $\lambda_{\rm cr} = 2\pi/k_{\rm cr}$ и критическое волновое число $k_{\rm cr} = |\mathbf{k}|_{\rm cr}$, разделяющее устойчивые ($k_r > k_{\rm cr}$) и неустойчивые ($k_r < k_{\rm cr}$) возмущенные волны, определяются соотношениями

$$\begin{gathered}|\mathbf{k}|_{\rm cr} = \frac{1}{v_{S,q}}\left(4\pi G\rho_0 - 2\Omega^2\right)^{1/2} = \\ = 2\left(\frac{\pi G\rho_0}{v_{S,q}^2}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_0}\right)^{1/2},\end{gathered} \tag{81}$$

$$\lambda_{\rm cr} = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|_{\rm cr}} = \sqrt{\frac{\pi v_{S,q}^2}{G\rho_0}}\left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_0}\right)^{-1/2}. \tag{82}$$

Таким образом, для критерия джинсовской неустойчивости вращающегося газового облака с учетом излучения для волн возмущения распространяющихся в направлении перпендикулярном направлению оси вращения облака, получим следующее представление:

$$\begin{gathered}\lambda_r > \lambda_{\rm cr} = v_{S,q}\sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}\left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_0}\right)^{-1/2} = \\ = v_{S,q}\sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}\left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_0}\right)^{-1/2},\end{gathered} \tag{83}$$

которое, с учетом формулы (46) для длины Джинса, может быть записано в виде

$$\begin{gathered}\frac{\lambda_r}{\lambda_J} > \frac{v_{S,q}}{v_{\rm gas}}\left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_0}\right)^{-1/2} = \left\{\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{(\gamma_q - 1)\,D/2}\times\right. \\ \left.\times\left[1 + \frac{(4 - 3\beta_0)^2(\gamma_q - 1)}{\beta_0^2 + 12\beta_0(\gamma_q - 1)(1 - \beta_0)}\right]\right\}^{1/2}\times \\ \times\left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_0}\right)^{-1/2}.\end{gathered} \tag{84}$$

Важно иметь в виду, что критерий (84) имеет смысл только в случае, если выполняется условие $\Omega^2/2\pi G\rho_0 < 1$ (условие устойчивости вращающегося облака по Toomre (1964)).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Известно, что при неустойчивости неравновесных систем (в частности, различных астрофизических объектов)возникает динамический хаос, что делает возможным образование более сложных упорядоченных (в общем случае фрактальных) структур. Возникновение фрактальных образований подтверждается для многих астрофизических систем, в частности, у звезд, межзвездных молекулярных облаков, аккреционных допланетных дисков и т.д. При учете воздействия сильного гравитационного поля в моделях фрактальных космических структур возникают принципиальные трудности, поскольку для них традиционные газодинамические методы часто неприменимы. Преодоление этих трудностей требует нового подхода к решению эволюционных задач в космической газодинамике. Один из возможных подходов к изучению эволюции подобных аномальных систем может быть основан на методах неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса, как раз и предназначенной для описания эволюции фрактальных систем с сильным гравитационным взаимодействием (см., например, Kolesnichenko, Marov, 2013; 2014; 2019).

Имея в виду большое космогоническое значение проблемы гравитационной неустойчивости, впред ставленной работе в рамках кинетики Тсаллиса выполнено исследование влияния неэкстенсивности среды на критерий гравитационной неустойчивости Джинса для самогравитирующего допланетного облака, вещество которого состоит из смеси совершенного q-газа и чернотельного излучения. Выведены дисперсионные уравнения, на основе которых проведен анализ осесимметричных колебаний допланетных самогравитирующих облаков. Получены модифицированные критерии гравитационной неустойчивости Джинсадля простых модельных систем, таких какбесконечные покоящиеся сферически однородные среды ивращающиеся газовые облака с учетом давления излучения. Кроме этого, получено модифицированное в рамках неэкстенсивной кинетики *интегральное* условие устойчивости Чандрасекхара для сферической массы смеси, состоящей из q-газа и излучения. Для указанных самогравитирующих объектов найдены критические значения длин волн и масс, которые явно зависят следующих свободных параметров: от энтропийного индекса деформации q, размерности D пространства скоростей и коэффициента β, характеризующего долю вещества в полном давлении смеси. Это позволяет более обоснованно моделировать реальные астрофизическиеобъекты и находить соответствующие критерии их гравитационной неустойчивости.

Рассмотренный здесь в рамках неэкстенсивной кинетики подход к описанию эволюции относительно простых (модельных) астрофизическихобразований может быть распространен на более реалистичные физические ситуации, связанные, в частности, с учетом динамики возмущений в неоднородных и неизотропных дисковых фрактальных средах, с исследованием гравитационных возмущений диссипативных дисков, с исследованием собственных частот колебаний вертикально неоднородныхмагнитных дисков и т.п. (Фридман, Хоперсков, 2011).

Поскольку физический смысл и численные значенияиндексаэнтропийной деформации q играют существенную роль в понимании эволюции многих аномальных астрофизических объектов, то проблема их определения представляется чрезвычайно важной. К сожалению, эта проблема все еще остается открытой. Вместе с тем, в настоящее время имеются серьезные успехи в современной гелиосейсмологии, которая надежно исследует внутреннюю структуру и динамику Солнца (см. Gough, 2011). В солнечной атмосфере установлены и изучены миллионы резонансных мод колебаний. Их частоты измерены с достаточно большой точностью, что позволяет исследовать внутреннюю структуру Солнца на больших глубинах (Gough, Hindman, 2010). Эти результаты позволяют решить не только некоторые известные проблемы космологии, но и поднимают ряд теоретических вопросов, ответы на которые необходимы для понимания того, как на самом деле эволюционирует обычная звезда. В частности,гелиосейсмологияпозволяет, вообще говоря,найти экспериментальные доказательства присутствия неэкстенсивных эффектов в недрах звезды по определяемым скоростям звука. Следовательно, есть надежда, что в самое ближайшее время можно будет получить астрономические данные по численным значениям параметра q, отличным от единицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Горькавый Н.Н., Фридман А.М. Физика планетных колец. М.: Наука, 1994. 348 с.

Колесниченко А.В. Модификация в рамках статистики Тсаллиса критериев гравитационной неустойчивости астрофизических дисков с фрактальной структурой фазового пространства // Mathematica Montisnigri. 2015. Т. 32. С. 93–118.

Колесниченко А.В. Модификация в рамках неаддитивной статистики Тсаллиса критериев гравитационной неустойчивости астрофизических дисков // Матем. модел. 2016. Т. 28. № 3. С. 96–118.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо–Тсаллиса // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 25. 40 с.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД. (Синергетика: от прошлого к будущему. № 87). 2019. 360 с.

Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 426 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Ч. I. М.: Наука, 1976. 588 с.

Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука, 1969. 244 с.

Фридман А.М., Хоперсков А.В. Физика галактических дисков. М.: Физматлит. 2011. 640 с.

Хоперсков А.В., Храпов С.С. Неустойчивость звуковых волн в тонком газовом диске // Письма в Астрон. журн. 1995. Т. 21. С. 388–393.

Чандрасекхар С. Введение в учение о строении звезд. М.: Изд-во ИЛ. 1950. 476 с.

Чандрасекхар С. О звездах, их эволюции и устойчивости // УФН. 1985. Т. 145. № 3. С. 489–506.

Boghosian B.M. Navier-Storts Equations for Generalized Thermostatistics // Bras. J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P. 91–107.

Bonnor W.B. Jeans' Formula for Gravitational Instability // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1957. V. 117. № 1. P. 104–117.
https://doi.org/10.1093/mnras/117.1.104

Cadez V.M. ApplicabilityproblemofJeanscriteriontoastationaryself-gravitatingcloud // Astron.and Astrophys. 1990. V. 235. P. 242–244.

Cadez V.M. Instabilities in stratified magnetized Stellar atmospheres // Publ. Astron. Obs. Belgrade. 2010. V. 90. P. 121–124.

Camenzind M., Demole F., Straumann N. The stability of radiation–pressure–dominated accretion discs // Astron. and Astrophys. 1986. V. 158. P. 212–216.

Chandrasekhar S., Fermi E. Problems of gravitational stability in the Presence of a magnetic field // Astrophys. J. 1953. V. 118. P. 116–141.

Curado E.M.F., Tsallis C. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics // J. Phys. 1991. A 24. P. L69–72.

Dhiman J.S., Dadwal R. On the Jeans Criterion of a Stratified Heat Conducting Gaseous Medium in the Presence of Non-uniform Rotation and Magnetic Field // J. Astrophys. and Astron. 2012. V. 33. № 4. P. 363–373.

Eddington A.S. The Internal Constitution of the Stars. Cambridge. England: Cambridge Univ. Press, 1988. 407 p.

Fridman A.M., Polyachenko V.L. Physics of gravitating system- N.Y.: Springer-Verlag, 1984. V. 1. 468 p. V. 2. 358 p.

Fridman A.M., Polyachenko V.L. Physics of Gravitating Systems I: Equilibrium and Stability. Springer Sci. & Business Media, 2012. 468 s.

Goldreich P., Lynden-Bell D.I. Gravatational stability of uniformly rotating disks // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1965. V. 130. P. 97–124.

Gough D.O., Hindman B. Helioseismic Detection of Deep Meridional Flow // J. Astrophys. 2010. V. 714. № 1. P. 960–970.

Gough D.O. Heliophysics Gleaned from Seismology // Progress in solar/stellar Physics with Helio- and Asteroseismology, Proc. 65th Fujihara Seminar, Astron. Soc. Pacific Conf. Ser., 2011. V. 462. P. 429-454 (arXiv:1210.1114v1 [astro-ph.SR]. 2012).

Hunter C. Self-gravitating gaseous disks // Ann. Rev. Fluid Mech. 1972. V. 4. P. 219–242.

Jeans J.H. The stability of a spherical nebula // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. 1902. V. 199 P. 1–53.

Jeans J.H. Astronomy and Cosmogony. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 476 p.

Joshi H., Pensia R.K. Effect of rotation on Jeans instability of magnetized radiative quantum plasma // Physics of Plasmas. 2017. V. 24. P. 032113-1–032113-8.

Kaothekar S., Chhajlani R.K. Jeans Instability of Self Gravitating Partially Ionized Hall Plasma With Radiative Heat Loss Functions And Porosity // AIP Conf. Proc. 2013.V. 1536. № 1. P. 1288–1289.

Kolesnichenko A.V., Chetverushkin B.N. Kinetic derivation of a quasi-hydrodinamic system of equations on the base of nonextensive statistics // RJNAMM (Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling). 2013. V. 28. № 6. P. 547–576.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modeling of aggregation of fractal dust clusters in a laminar protoplanetary disk // Sol. Syst. Res. 2013. V. 47. № 2. P.80-98.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the jeans instability criterion for fractal-structure astrophysical objects in the framework of nonextensive statistics // Sol. Syst. Res. 2014. V. 48. № 5. P. 354–365.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the Jeans and Toomre instability criteria for astrophysical fractal objects within nonextensive statistics // Sol. Syst. Res. 2016. V. 50. № 4. P. 251–261.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Renyi Thermodynamics as a Mandatory Basis to Model the Evolution of a Protoplanetary Gas–Dust Disk with a Fractal Structure // Sol. Syst. Res. 2019. V. 53. № 6. P. 443–461.

Kumar V., Sutar D.L., Pensia R.K., Sharma S. Effect of fine dust particles and finite electron inertia of rotating magnetized plasma // 2nd Int. Conf. Condensed Matter and Applied Physics (ICC 2017). AIP Conf. Proc. 2018. V. 1953. № 1. P. 060036-1–060036-4.

Lima J.A.S., Silva R., Santos J. Jeans' gravitational instability and nonextensive kinetic theory // Astron. and Astrophys. 2002. V. 396. P. 309–313.

Low C., Lynden-Bell D. The minimum Jeans mass or when fragmentation must stop // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1976. V. 176. № 2. P. 367–390.

Mace R.L., Verheest, Frank, Hellberg M.A. Jeans stability of dusty space plasmas // Phys. Lett. A. 1998. V. 237. P. 146–151.

Masood W., Salimullah M., Shah H.A. A quantum hydrodynamic model for multicomponent quantum magnetoplasma with Jeans term // Phys. Lett. A.2008. V. 372. № 45. P. 6757–6760.

McKee M.R. Theradial-azimuthalstabilityofaccretiondisksaroundblackholes // Astron. and Astrophys. 1990. V. 235. P. 521–525.

Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: Bibliography / http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm.

*Oliveira D.S., Galvao R.M.*O. Transport equations in magnetized plasmas for non-Maxwellian distribution functions // Physics of Plasmas. 2018. V. 25. P. 102308-1–102308-13.

Owen J. M., Villumsen J., Baryons V. Dark Matter, and the Jeans Mass in Simulations of Cosmological Structure Formation // J. Astrophys. 1997. V. 481. № 1. P. 1–21.

Pandey B.P., Avinash K. Jeans instability of a dusty plasma // Phys. Rev. E (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics). 1994 .V. 49. № 6. P. 5599–5606.

Pensia R.K., Sutar D.L., Sharma S. Analysis of Jeans Instability of Optically Thick Quantum Plasma under the Effect of Modified Ohms law // 2nd Int. Conf. Condensed Matter and Applied Physics (ICC 2017). AIP Conf. Proc. 2018. V. 1953. № 1. P. 060044-1–060044-4.

Radwan A.E. Variable streams self-gravitating instability of radiating rotating gas cloud // Appl. Math. and Comput. 2004. V. 148. P. 331–339.

Sakagami M., Taruya A. Self-gravitating stellar systems and non-extensive thermostatistics // Cont. Mech. and Thermodyn. 2004. V. 16. № 3. P. 279–292.

Shakura N.I., Sunyaev R.A. A theory of the instability of disk accretion onto black holes and the variability of binary X-ray sources, galactic nuclei and quasars // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1976. V. 175. P. 613–632.

Shukla P.K., Stenflo L. Jeans instability in a self-gravitating dusty plasma // Proc. Roy. Soc. A: Math., Phys. and Engineering Sci. 2006. V. 462. P. 403–407.

Trigger S.A., Ershkovich A.I., van Heijst G.J.F., Schram P.P.J.M. Kinetic theory of Jeans instability // Phys. Rev. E. 2004. V. 69. P. 066403–066405.

Toomre A. On the gravitational stability of a disk of stars // J. Astrophys. 1964. V. 139. P. 1217–1238.

Tsiklauri D. Jeans Instability of Interstellar Gas Clouds in the Background of Weakly Interacting Massive Particles // J. Astrophys. 1998. V. 507. № 1. P. 226–228.

Tsintsadze N.L., Chaudhary R., Shah H.A., Murtaza G. Jeans instability in a magneto-radiative dusty plasma // J. Plasma Phys. 2008.V. 74. № 6. P. 847–853.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V. 52. № 1/2. P. 479–487.

Tsallis C. Nonextensive Statistic: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections // Brazilian J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P. 1–35.

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer, 2009. 382 p.

Tsallis C., Mendes R.S., Plastino A.R. The role of constraints within generalized nonextensive statistics // Physica A. 1998. V. 261. P. 534–554.