

УДК 523

## ОСОБЕННОСТИ СПЕКТРА РЕЛЬЕФА ПОВЕРХНОСТИ ЛУНЫ И ПЛАНЕТ

© 2021 г. Г. С. Голицын\*

*Институт физики атмосферы РАН, Москва, Россия*

*\*e-mail: gsg@ifaran.ru*

Поступила в редакцию 28.05.2020 г.

После доработки 16.07.2020 г.

Принята к публикации 09.09.2020 г.

Обсуждаются спектры рельефа Луны, Марса и Земли очень высокого разрешения (Rexer, Hirt, 2015).

Эти спектры убывают как  $k^{-2}$  согласно правилу Каулы (Kaula, 1966), что недавно было объяснено (Гледзер, Голицын, 2019; Gledzer, Golitsyn, 2019) на основе вероятностных законов А.Н. Колмогорова и его школы (Kolmogorov, 1934; Obukhov, 1959; Монин, Яглом, 1967; Golitsyn, 2018; Гледзер, Голицын, 2010; Яглом, 1955). Однако в (Гледзер, Голицын, 2019; Gledzer, Golitsyn, 2019) нет подробного объяснения, почему для самых малых масштабов у Луны спектр рельефа укручается до  $k^{-4}$ . То же можно заметить и для Марса и Земли в еще более мелких пространственных масштабах (Rexer, Hirt, 2015). Объяснение дано заменой марковости распределений вероятности для ускорений на их внутреннюю экспоненциальную корреляцию. Соображения подобия и размерности с привлечением физических свойств коры позволяют оценить масштабы особенностей наблюдаемых спектров.

**Ключевые слова:** статистическая структура рельефа небесных тел, расширение гипотезы А.Н. Колмогорова о случайных движениях, масштаб укручения спектра

**DOI:** 10.31857/S0320930X21010035

Приблизительная обратная квадратичность спектров рельефа планет десятки лет оставалась необъяснимой загадкой в планетной астрономии. Это свойство было отмечено в начале 1960-х гг. американским геодезистом Вольфгангом Каула, когда он заметил, что сферические гармоники флуктуаций силы тяжести, а затем и рельефа (Kaula, 1966; Turcotte, 1997; Гледзер, Голицын, 2019), убывают как квадрат номера гармоники, начиная с  $n \geq 4$ . Позднее такое свойство было отмечено для Венеры, Марса, Луны, для астероида Веста и для совсем мелкого астероида порядка километра (Гледзер, Голицын, 2019; Gledzer, Golitsyn, 2019). Несколько лет назад методы анализа сферических гармоник были существенно улучшены, и число гармоник достигло 46200 для Земли и Луны и 23100 для Марса. Для Земли спектральный анализ охватывает масштабы порядка 600 м, а для Луны – 120 м (Rexer, Hirt, 2015). Объяснение правила Каулы как следствие вероятностных законов А.Н. Колмогорова и его школы было опубликовано в 2019 г. Е.Б. Гледзером и Г.С. Голицыным (Гледзер, Голицын, 2019) и в более полной статье (Gledzer, Golitsyn, 2019).

Законы Колмогорова (Kolmogorov, 1934) и их первичный анализ в приложении к пространственной структуре турбулентности А.М. Обухо-

вым (Obukhov, 1959) были использованы более 60 лет назад, и их подробный анализ описан в книге А.С. Мони́на и А.М. Ягло́ма “Статистическая гидромеханика” (Монин, Яглом, 1967) вместе с техническим аппаратом для анализа экспериментальных данных. Однако кроме турбулентности эти вероятностные идеи нигде не использовались, и только к 2018 г. стало ясно широкое поле их использования для описания многих статистических законов природы, как то: законы Гутенберга–Рихтера для частоты землетрясений, распределения литосферных плит по размерам, частотного спектрального состава морских ветровых волн и законов их разгона, скоростей и размера ураганов и т.д. (Golitsyn, 2018). В настоящее время автор, пользуясь карантинном, готовит книгу по всем этим вопросам.

Однако вернемся к рельефам. Рис. 1 из (Rexer, Hirt, 2015; Gledzer, Golitsyn, 2019) дает экспериментальные спектры рельефа для Луны, Марса и Земли, причем для последней – полный, только для твердой поверхности и для морского дна. Все они имеют четкий наклон спектров  $k^{-2}$ , начиная с размеров порядка четверти радиуса,  $k \sim 1/y$ . Спектр Луны в интервале масштабов 200–10 км идет выше спектра  $k^{-2}$ . Очевидно, это связано с

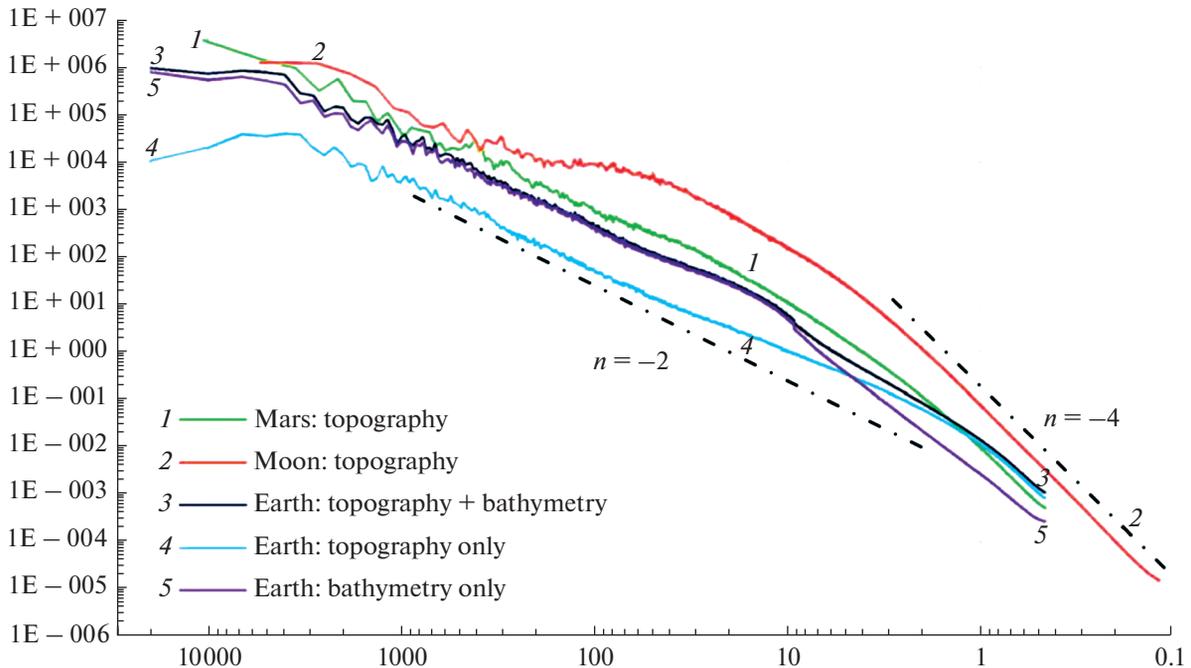


Рис. 1. Пространственные спектры рельефа небесных тел.

бомбардировкой ее поверхности астероидами километрового размера, образующими кратеры с диаметрами на порядок больше размера ударных тел.

Для Земли и Марса их атмосферы препятствуют проникновению к поверхности небольших тел, поэтому спектр рельефа у них не имеет такой четкой особенности. У Луны, начиная с  $y \leq 3$  км спектр рельефа укручается, приближаясь в более мелких масштабах к  $k^{-4}$ . Для двух наших планет начало укручения спектров тоже намечается с масштабов  $y \leq 1$  км. И это связано с физико-математической моделью образования рельефа, в основе которой лежат идеи (Kolmogorov, 1934; Obukhov, 1959; Монин, Яглом, 1967; Golitsyn, 2018).

Работу А.Н. Колмогорова (Kolmogorov, 1934) “Случайные движения” можно найти в издававшихся неоднократно собраниях его сочинений. Она содержит распределения вероятностей  $p(x_i, u_i, t)$  для шестимерного вектора координат  $x_i$  и скоростей  $u_i$  в их зависимости от времени  $t$  на основе обобщенного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial u_i^2}. \quad (1)$$

В (Kolmogorov, 1934; Монин, Яглом, 1967) записано фундаментальное решение этого уравнения. А.М. Обухов показал, что в случае турбулентности коэффициент диффузии  $D = \varepsilon$ , скорости генерации/диссипации кинетической энергии, т.е.

$\varepsilon$  – коэффициент диффузии в пространстве скоростей. В (Монин, Яглом, 1967) показано, что частотный спектр  $\varepsilon$  постоянен, т.е. это белый шум (Яглом, 1949). В (Гледзер, Голицын, 2010) показано, что замена переменных  $u_i = \tilde{u}_i(\varepsilon t)^{1/2}$  и  $x_i = \tilde{x}_i(\varepsilon t^3)^{1/2}$  сводит (1) к безразмерному виду, т.е. в масштабах  $\tilde{u}_i$  и  $\tilde{x}_i$  уравнение (1) становится автомодельным. Это значит, что средние значения

$$\langle u_i^2 \rangle = \varepsilon t, \quad \langle x_i^2 \rangle = \varepsilon t^3, \quad \langle x_i u_i \rangle = \varepsilon t^2 \quad (2)$$

так зависят от времени. Численные расчеты (Гледзер, Голицын, 2010) были проведены в зависимости от числа частиц  $N$ , ускоряемых случайным образом и независимо друг от друга. Расчеты показали, что даже при  $N = 10$  зависимости (2) выполняются вполне удовлетворительно, а при  $N = 100$  рассчитанные значения практически не отличаются от их теоретических значений.

Наши расчеты (Гледзер, Голицын, 2010) и теория (Kolmogorov, 1934) отличаются тем, что Колмогоров принимал ускорения распределенными по Маркову, т.е. равномерно случайными. В (Гледзер, Голицын, 2010) эти распределения считались для различных распределений, и все равно зависимости (2) выполнялись также хорошо. По сути дела, в (Гледзер, Голицын, 2010) считались уравнения Ньютона для движений  $N$  частиц с единичной массой со случайными ускорениями по времени для каждой частицы, некоррелированной с соседними, и находились структурные функции для

взаимных скоростей и положений, и все равно зависимости (2) выполнялись также хорошо.

В настоящее время большинство измерительных приборов дают результаты, удобные для представления в спектральном виде. Спектры связаны со структурными функциями преобразованиями типа Фурье (Обухов, 1959; Мони́н, Яглом, 1967; Golitsyn, 2018; Гледзер, Голицын, 2010; Яглом, 1955; Голицын, Фортус, 2020). При этом положительный показатель степени у степенной зависимости  $t^n$  связан с отрицательным показателем спектра  $\omega^{-m}$  соотношением  $m - 1 = n$ .

Рельеф  $h(y)$  измеряется часто альтиметрами, установленными на спутниках или других аппаратах, летающих с известной скоростью  $u$ . Поэтому временной сигнал  $uh(t) = h(y)$  таким преобразованием переводится в пространственный случайный сигнал. При этом первый масштаб Колмогорова в (2) может быть записан как

$$\frac{\partial p}{\partial y} = D \frac{\partial^2 p}{\partial h^2}, \quad \langle h^2(y) \rangle = Dy, \quad (3)$$

где коэффициент диффузии  $D$  должен определяться из результатов измерений. Однако следует считать, что измеренное тем или иным способом пространственное распределение рельефа устанавливается за многие миллионы лет, и к нему сразу можно применять уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова с заменой времени на  $y$  и координаты  $x$  на высоту  $h$ , и тогда преобразование типа Фурье функции (3), как структурной, дает пространственный спектр рельефа

$$S_h(k) = \frac{D}{\pi} k^{-2}, \quad k = \frac{1}{y}. \quad (4)$$

Такие спектры приведены в (Turcotte, 1997; Голицын, 2012). Для масштабов от 0.3 до 30 км для трех типов рельефа, равнинного, холмистого и горного. По 20 разрезам для каждого типа спектр весьма близок к (4) со средним показателем  $n = 2.03 \pm 0.04$  (Голицын, 2003; 2012). Крупные сферические гармоники с номерами  $n \leq 4$  отклоняются вниз от зависимости  $n^{-2}$  для их амплитуд и, очевидно, связаны с глобальной тектоникой (Kaula, 1966; Turcotte, 1997).

Еще в (Голицын, 2003) было отмечено, что форма спектра  $k^{-2}$  (4) означает, что спектр уклонов  $\alpha$  рельефа, т.е. величины  $\alpha = dh(y)/dy$ , постоянен с частотой:

$$S_\alpha(k) = k^2 S_h(k) = D/2\pi = \text{const}, \quad (5)$$

т.е. это белый шум. Это соответствует гипотезе А.Н. Колмогорова о марковости распределений вероятностей для ускорений (Kolmogorov, 1934; Гледзер, Голицын, 2010). Квадрат скорости — есть

энергия, работа, производимая полем силы тяжести над частицей при ее подъеме на высоту  $h(z)$ . Производная рельефа по координате есть уклон, вдоль которого действует сила тяжести, и если спектр углов есть белый шум, то и ускорения в такой системе будут марковскими. По углам течет вода, сыплется порода, на такую поверхность действует ветер и т.п.

Однако и визуальная картина земного рельефа для малых масштабов показывает какую-то корреляцию между углами. Это четко видно на рис. 1 для Луны и намечается для Земли и Марса в укрупнении спектров от  $k^{-2}$  до  $k^{-4}$ . Для лунной поверхности на рис. 1 этот переход происходит в районе  $y_0 \sim 4$  км, а для марсианского и земного рельефов при полутора км и нескольких стах метров. Для описания этих изменений в спектрах примем, что между углами в этом интервале имеет место простейшая корреляция  $\alpha(y_1)\alpha(y_2) = \exp(-(y_1 - y_2)/y_0)$ , спектр которой

$$S_\alpha(k) = \frac{D}{\pi} [1 + (k/k_0)^2]^{-1}, \quad k_0 = 1/y_0. \quad (6)$$

Тогда согласно (5) спектр рельефа поверхности будет

$$S_h(k) = k^{-2} S_\alpha(k) = \frac{D}{\pi} \frac{k^{-2}}{[1 + (k/k_0)^2]}, \quad (7)$$

т.е. при  $(k/k_0)^2 \ll 1$  спектр рельефа будет  $S_h(k) \sim k^{-2}$ , а при  $k \gg k_0$  спектр  $\sim k^{-4}$ .

Остается понять физический смысл масштаба  $y_0 = k_0^{-1}$ , что непросто, так как физические условия образования рельефов и их эволюции на Луне, где нет атмосферы и жидкой воды, отличны от Земли и Марса. На Луне действует только сила тяжести и ударная бомбардировка поверхности, т.е. надо знать и механические свойства поверхности. Отсутствие атмосферы, очевидно, объясняет, что из трех спектров рис. 1 лунный спектр максимален по амплитудам, т.е. выше других, а земной — минимален.

Переход от спектра  $k^{-2}$  к  $k^{-4}$  занимает какой-то интервал масштабов, и этот интервал строго определить по экспериментальным данным нелегко. Координату такого перехода определим по экспериментальным данным как его середину. Эти значения  $y_0$ , как размеры и ускорение силы тяжести представлены в таблице.

То, что укрупнение спектра начинается раньше всего у Луны, а позже — у Земли, говорит о том, что величина  $y_0$  обратно пропорциональна гравитационному ускорению. Попытаемся найти величину  $y_0$  из соображений подобия и размерности при ударном формировании рельефа как на

Необходимые параметры небесных тел

Объект	$r$ , км	$g$ , м/с <sup>2</sup>	$y_0$ , км	$10^{-3} y_0 g$	$\Pi$
Луна	1738	1.63	4	6.1	3.55
Марс	3390	3.40	1.5	5.7	0.79
Земля	6371	9.80	0.7	6.8	0.16

Луне: происходит разрушение породы и ее разброс по сторонам. Здесь должны быть учтены плотность породы  $\rho$  и его модуль Юнга  $\mu$ . Последняя величина тесно связана с внутренней энергией тела. Величина

$$\frac{\mu}{\rho} = c^2$$

определяет квадрат скорости упругих волн. Величина  $c$  — это скорость фононов, а ее квадрат можно связать с внутренней энергией породы на единицу массы. Для простоты пренебрежем различиями  $c^2$  для наших объектов. Разлет породы обратно пропорционален  $g$ , поэтому примерное постоянство произведения  $gy_0$  представляется непротиворечивым нашим представлениям об ударных свойствах рельефа безатмосферных тел в малых масштабах.

Соображения подобия дают (Баренблатт, 2009)

$$y_0 = ac^2/g, \quad (8)$$

где численный коэффициент  $a = 10^{-3}$ , оцениваемый по данным таблицы при  $c^2 \approx 10^7 \text{ м}^2/\text{с}^2$ , иллюстрируют 4-й и 5-й ее столбцы.

Глобальный параметр подобия объединяет в себе все основные свойства твердых объектов

$$\Pi = \frac{c^2 r}{MG}, \quad g = \frac{MG}{r^2}, \quad (9)$$

где  $G^{-1} = 1.5 \times 10^{10} \text{ кг с}^2/\text{м}^3$  — обратная величина гравитационной постоянной. Этот параметр подобия приведен в последнем столбце и сопоставляет наши три тела в их начальный период жизни, подчеркивая влияние силы тяжести на величину и характер рельефа.

Для автора данный текст представляет попытку увидеть и в статистике рельефа небесных тел проявления законов теории вероятности Колмо-

горова и его школы и служит кратким дополнением к работам (Гледзер, Голицын, 2019; Gledzer, Golitsyn, 2019).

Автор благодарен рецензенту, замечания которого позволили существенно улучшить представление материала статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Баренблатт Г.И.* Автомодельные явления — анализ размерностей и скейлинг. Долгопрудный: Интеллект, 2009. 216 с.
- Гледзер Е.Б., Голицын Г.С.* Скейлинг и конечные ансамбли частиц в движении с притоком энергии // ДАН. 2010. Т. 433. № 4. С. 466.
- Гледзер Е.Б., Голицын Г.С.* Структуры рельефа и гравитационного поля планет: правило Каулы как следствие вероятностных законов А.Н. Колмогорова и его школы // ДАН. 2019. Т. 455. № 4. С. 391.
- Голицын Г.С.* Статистическое описание рельефа поверхности планеты и его эволюции // Изв. РАН. Физика Земли. 2003. № 7. С. 3.
- Голицын Г.С.* Статистика и динамика природных процессов и явлений. М.: Красанд, 2012. 400 с.
- Голицын Г.С., Фортус М.И.* Композитные спектры и случайные процессы со стационарными приращениями // Изв. РАН. ФАО. 2020. Т. 56. № 3 (в печати).
- Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Т. 2. М.: Наука, 1967. 720 с. (engl. transl.: Statistical Hydromechanics. Cambridge, Massachusetts. MIT Press. 1975. 874 p.)
- Яглом А.М.* Корреляционная теория процессов со случайными стационарными  $n$ -и приращениями // Матем. сб. 1955. Т. 37. № 1. С. 141.
- Gledzer E.B., Golitsyn G.S.* Kaula's rule as a consequence of probability laws by A.N. Kolmogorov and his school // Russ. J. Earth Sci. 2019. ES 6006, doi: 2205/2019ES000651.
- Golitsyn G.S.* Random walk laws by A.N. Kolmogorov, 1934 // Meteorol. Hydrol. 2018. №3. P. 5.
- Kaula W.M.* Theory of Satellite Geodesy. Waltham. Ma. Bleinsdell. 1966. 143 p.
- Kolmogorov A.N.* Zufallige Bewegungen // Math. Ann. 1934. V. 35. № 2. P. 116.
- Obukhov A.M.* Description of turbulence in terms of Lagrangian variables // Adv. in Geophys. 1959. V. 6. P. 113.
- Rexer M., Hirt C.* Ultra-high-degree surface spherical harmonic analysis using the Gauss — Legendre and the Driscoll/Healy quadrature theorem and application to planetary topography models of Earth, Mars and Moon // Surv. Geophys. 2015. V. 36. № 6. P. 803.
- Turcotte D.L.* Fractals and Chaos in Geology and Geophysics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. 398 p.