АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК, 2022, том 56, № 1, с. 47–58

УДК 523-52

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ В РАМКАХ НЕГАУССОВСКОЙ КАППА-СТАТИСТИКИ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ РАВНОВЕСИЯ ЧАНДРАСЕКХАРА ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ОБЛАКА ПРОТОЗВЕЗДЫ

© 2022 г. А. В. Колесниченко*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

**e-mail: kolesn@keldysh.ru*

Поступила в редакцию 13.05.2021 г.
После доработки 17.07.2021 г.
Принята к публикации 06.08.2021 г.

В рамках неэкстенсивной каппа-статистики Каниадакиса получено обобщение интегральных теорем равновесия Чандрасекхара для вещества и черного излучения в протозвездном гравитирующем сферически симметричном облаке. С этой целью используются элементы деформированной термодинамики для идеального газа, деформированное каноническое распределение Гиббса, а также эффективная гравитационная постоянная, вычисленная в формализме Верлинде. При этом параметр деформации κ измеряет так называемую степень неэкстенсивности облачной системы. Кроме этого, обсуждаются в контексте статистики Каниадакиса модифицированные термодинамические свойства излучения черного тела, в частности, κ-аналог закона Стефана для энергии излучения и обобщенные выражения для энтропии, теплоемкости и давления излучения. Представленный в работе способ объединения указанных аномальных физических процессов обеспечивает альтернативу известных интегральных теорем Чандрасекхара, полученных для сферически-симметричных газовых конфигураций, находящихся в состоянии гидростатического равновесия, и восстанавливает все стандартные выражения в пределе $\kappa \to 0$. Развитый в работе подход может быть использован при конструировании новых моделей эволюции неэкстенсивных протозвездных объектов и звезд.

Ключевые слова: интегральные теоремы равновесия Чандрасекхара, протозвездная туманность, чернотельное излучение, неэкстенсивная статистика Каниадакиса

DOI: 10.31857/S0320930X22010030

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на большие достижения в области естественных наук, классическая статистическая механика, основанная на энтропии Больцмана–Гиббса (БГ), все же не является пригодной для описания многих сложных (аномальных) физических систем, особенно систем, характеризующихся большой дальностью пространственно-временных корреляций, немарковостью процессов, фрактальностью геометрии фазового пространства, дальнодействующими гравитационными силами, наличием степенных статистических распределений. В качестве примера можно привести невозможность объяснения в рамках статистики БГ спектра космических лучей – одной из важнейших систем релятивистских частиц. В связи с этим, за последние несколько десятилетий было предпринято множество попыток обобщить статистическую механику БГ. Начало систематического изучения в этом направлении связано с работой К. Тсаллиса (Tsallis, 1988), в которой был введен функционал энтропии, зависящий от некоторого действительного числа q (так называемого параметра деформации) и обладающий неаддитивностью для совокупности независимых аномальных систем. Неэкстенсивная q-статистика Тсаллиса, являющаяся в настоящее время наиболее изученной в литературе, показала хорошее соответствие с наблюдениями и экспериментальными измерениями специфических свойств сложных систем, поведение которых часто невозможно описать в рамках классической статистики Больцмана–Гиббса (см., например, Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013; Kolesnichenko, 2020; Колесниченко, 2018; 2019а; 2019б; 2020а; 2020б; 2020в; 2020г; Колесниченко, Маров, 2020).

Вместе с тем, определение энтропийной меры Тсаллиса не является единственным примером деформированной энтропии. Фундаментом исследований в области неэкстенсивных статистик, проводимых в настоящее время, являются различные нелогарифмические энтропийные меры, рассмотренные, например, в работах (Renyi, 1961; Sharma, Mittal, 1977; Taneja, 1989; Abe, 1997; Landsberg, Vedral, 1998; Kaniadakis, 2009; Зарипов, 2002; 2010). Основанные на неэкстенсивных энтропиях многочисленные статистические теории постоянно развиваются в ускоренном ритме, при котором появляются новые идеи, позволяющие глубже понять их природу, возможности и ограничения (см. Библиографию, представленную на сайте: Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics (Bibliography/http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.Htm), которая постоянно обновляется).

Среди разнообразных неэкстенсивных статистик особый интерес представляет каппа-статистика, основанная на энтропийном функционале $S_\kappa(f) = -\frac{k_B}{2\kappa}\int\left(f^{1+\kappa} - f^{1-\kappa}\right)d\Omega$, который впервые был введен в работах (Kaniadakis, 2001a; 2001b; Kaniadakis, Scarfone, 2002; Kaniadakis и др., 2002). Каппа-статистика Каниадакиса, естественно возникающая в рамках специальной теории относительности Эйнштейна, оказалась применимой для описания значительного числа экспериментально наблюдаемых аномальных явлений в физике и в других естественных науках. В качестве примера можно упомянуть работы, связанные с аномальными явлениями в специальной теории относительности (Kaniadakis, 2005), в квантовой механике (Kaniadakis, 2002), в звездной астрофизике (Carvalho и др., 2008; 2009; Soares, Silva, 2011), в деформированной термодинамике неэкстенсивных систем (Scarfone, Wada, 2006; 2014; Колесниченко, 2020г), в термодинамике Бозе-газа и излучения черного тела (Lourek, Tribeche, 2017; Ourabah, Tribeche, 2014; Колесниченко, 2019а, 2020а) в газокинетических моделях аномальных систем (Kaniadakis, 2001a; 2001b; Rossani, Scarfone, 2004; Silva и др., 2008; Bento и др., 2013) и т.п. При изучении этих и подобного рода сложных систем возникают многочисленные новые математические проблемы, требующие своего решения. К их числу относится, в частности, проблема совместного образования звезды (протосолнца) и протопланетного диска из вещества единой вращающейся туманности-небулы.

В представленной статье, выполненной в рамках этой проблемы, мы рассмотрим интегральные теоремы Чандрасекхара о равновесии для сферически симметричной звезды с учетом чернотельного излучения и, опираясь на них, сформулируем в контексте неэкстенсивной статистики Каниадакиса их обобщенные аналоги для конечной протозвездной туманности.

Существует классическая интегральная теорема (см. Чандрасекхар, 1950 (теорема 6, стр. 111)) для находящейся в гравитационном равновесии сферической конфигурации из вещества (газа) и чернотельного излучения, гласящая, что полное давление P_{ce} газа и излучения в центре притяжения гравитирующего облака массы M, в котором средняя плотность $\langle\rho(r)\rangle$ в точке, находящейся на расстоянии r от центра, не увеличивается от центра к поверхности, должно удовлетворять неравенству

$$\frac{1}{2}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\langle\rho\rangle^{4/3}M^{2/3} \le P_{ce} \le \frac{1}{2}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\rho_{ce}^{4/3}M^{2/3}. \quad (1)$$

Здесь $\langle\rho\rangle$, ρ_{ce} — соответственно средняя плотность облака и плотность в его центре. Смысл теоремы состоит в том, что давление, действующее в центре облака с массой M, должно быть промежуточным между давлениями в центрах двух конфигураций с однородной плотностью — одна с плотностью, равной средней плотности $\langle\rho\rangle$ конфигурации, а другая с плотностью, равной плотности ρ_{ce} в ее центре.

Исходя из правой части этого неравенства, Чандрасекхар доказал другую теорему (см. Чандрасекхар, 1950 (теорема 7, стр. 113)), согласно которой отношение давления излучения к полному давлению в центре газовой конфигурации, $(1-\beta_{ce})$, в которой $\langle\rho(r)\rangle$ не увеличивается от центра к периферии, удовлетворяет неравенству

$$(1-\beta_{ce}) \le (1-\beta_*), \quad (2)$$

в котором параметр β_* определяется из уравнения четвертой степени $\left(\mu^2 M/5.48M_\odot\right)^2\beta_*^4 = 1-\beta_*$. Здесь $\beta = p_{gas}/P$ — коэффициент, характеризующий долю вещества в полном давлении смеси (вещество плюс излучение); μ — средний молекулярный вес; $M_\odot = 1.989(2)\times 10^{33}$ г — масса Солнца. Эта теорема, полученная в рамках статистики Больцмана—Гиббса, дает верхний предел на величину $(1-\beta_{ce})$ для облака (сферической газовой конфигурации с массой M), находящегося в состоянии равновесия. В частности, для протосолнечного облака имеет место неравенство $(1-\beta_{ce}) < 0.03$, откуда следует, что для звезды солнечной массы со средней молекулярной массой, равной единице, давление излучения в центре не может превышать 3% от общего давления (Чандрасекхар, 1985).

В представленной работе получено обобщение этих двух теорем на случай неэкстенсивного сферического протозвездного облака с учетом модифицированных в рамках статистики Каниадакиса термодинамики вещества, чернотельного излучения и гравитационной постоянной, а также дана количественная оценка для параметра деформации каппа, гарантирующая отсутствие равновесия самогравитирующей протозвездной туманности. Показано, что этот параметр расширяет комбинацию естественных констант, входящих в неравенство (1), корректируя при этом численные значения соответствующих величин, необходимых для оценки протозвездных масс, и модифицирует тем самым классическую модель совместного образования протозвезды и протопланетного диска из вещества единой вращающейся небулы.

Статья организована следующим образом. В разделе “Равновесное распределение скоростей...” мы напоминаем основные элементы каппа-статистики и приводим деформированное каноническое распределение Гиббса для скоростей свободных газовых частиц (Kaniadakis, 2001a, 2001b; Silva и др., 2008). В разделе “Термодинамика излучения...” обсуждается энтропия световых квантов Бозе в статистике Каниадакиса и представлены термодинамические соотношения для чернотельного излучения (Ourabah, Tribeche, 2014; Lourek, Tribeche, 2017; Колесниченко, 2020а). В разделе “Эффективная гравитационная...” приводится значение для модифицированной гравитационной постоянной, полученной в рамках формализмов Верлинде и Каниадакиса (Abreu и др., 2016; Kolesnichenko, Marov, 2021). В разделе “Равновесное состояние...” приведены уравнения, описывающие неэкстенсивное протозвездное облако с излучением в состоянии механического равновесия, рассматриваемые для простоты в пренебрежении магнитными полями и эффектом вращения. Наконец, последний раздел “Интегральные теоремы...” посвящен выводу в рамках статистики Каниадакиса интегральных теорем равновесия для протозвездного сферически симметричного облака и излучения.

РАВНОВЕСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ СВОБОДНЫХ ЧАСТИЦ В РАМКАХ ФОРМАЛИЗМА КАНИАДАКИСА

В деформированной статистической механике Каниадакиса для непрерывных аномальных систем при вероятностной нормировке $\int_{\mathrm{R}} f(\mathbf{u})d\Omega = 1$ для плотности вероятности распределения частиц $f(\mathbf{r},\mathbf{u})$ в фазовом пространстве κ-энтропия системы задается следующим функционалом (Kaniadakis, 2001a, 2001b; Колесниченко, 2020г)

$$S_\kappa(f) = -k_{\mathrm{B}}\int_{\mathrm{R}} \frac{f(\mathbf{r},\mathbf{u})^{1+\kappa} - f(\mathbf{r},\mathbf{u})^{1-\kappa}}{2\kappa}\,d\Omega, \tag{3}$$

где $d\Omega = d\mathbf{r}d\mathbf{u}$; $k_{\mathrm{B}} = 1.380662(44)\times 10^{-16}$ эрг K^{-1} — постоянная Больцмана; энтропийный индекс “κ” представляет собой вещественное число, принадлежащее области $|\kappa| = 1$. В пределе слабой связи (когда $\kappa \to 0$) каппа-энтропия системы переходит в каноническую форму $S_{\mathrm{BG}}(f) = -k_{\mathrm{B}}\int_{\mathrm{R}} f(\mathbf{r},\mathbf{u})\ln[f(\mathbf{r},\mathbf{u})]\,d\Omega$ классической статистики Больцмана–Гиббса.

Основанная на энтропии Каниадакиса неэкстенсивная статистика сохраняет математическую и гносеологическую структуру обычной статистической механики Больцмана–Гиббса и пригодна для описания большого класса сложных явлений в различных прикладных областях. Каппа-статистика изначально обобщает классическую статистику введением так называемых κ-экспоненты и κ-логарифма, которые определяются формулами

$$\exp_\kappa(x) = \left[\kappa x + \sqrt{1+\kappa^2x^2}\right]^{1/\kappa}, \qquad \ln_\kappa(x) = \frac{x^\kappa - x^{-\kappa}}{2\kappa}, \tag{4}$$

при выполнении следующей операции

$$\ln_\kappa\left[\exp_\kappa(x)\right] = \exp_\kappa\left[\ln_\kappa(x)\right] = x, \tag{5}$$

и дают в пределе $\kappa \to 0$ обычный логарифм и обычную экспоненту. Многочисленные свойства этих деформированных функций представлены в работах (Scarfone, Wada, 2006; Kaniadakis, 2013; Колесниченко, 2020а; 2020г).

Рассмотрим теперь не меняющуюся с течением времени стационарную функцию распределения вероятностей для сложных κ-систем. Для них в работах (Kaniadakis, 2001a, 2001b; Silva, 2006; Bento и др., 2013) было получено в случае однородной среды следующее равновесное распределение свободных частиц в одномерном пространстве скоростей

$$f_{eq}(u) = \frac{1}{\tilde{Z}}\exp_\kappa\left(-mu^2\big/2k_{\mathrm{B}}T\right). \tag{6}$$

Здесь

$$\tilde{Z} = \int_{\mathrm{R}} \exp_\kappa\left(-mu^2\big/2k_{\mathrm{B}}T\right)du, \tag{7}$$

— постоянная κ-нормировки, $|\kappa| < 2/3$; m — масса одной частицы космического вещества протозвездного облака; T — абсолютная температура, измеряемая в градусах.

В предположении, что $a = m/2k_{\mathrm{B}}T$, $x = au^2$, для постоянной нормировки $\tilde{Z}$ получим выражение $\tilde{Z} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\int_0^\infty x^{-1/2}\exp_\kappa(-x)dx$. При использовании интегральной формулы (см., например, Bento и др., 2013)

$$\int_0^\infty x^{r-1}\exp_\kappa(-x)dx = \left(\frac{|2\kappa|^{-r}}{1+r|\kappa|}\right)\Gamma(r)\times\frac{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} - r/2\right]}{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} + r/2\right]}, \tag{8}$$

в для величины $\tilde{Z}$ будем иметь

$$\tilde{Z} = \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}}\left(\frac{|2\kappa|^{-1/2}}{1+|\kappa|/2}\right)\frac{\Gamma\left(|2\kappa|^{-1}-1/4\right)}{\Gamma\left(|2\kappa|^{-1}+1/4\right)}, \qquad (9)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Применяя формулу (8), легко получить среднее значение квадрата скорости частицы для каждой степени свободы

$$\langle u^2\rangle_\kappa = \int_0^\infty u^2 f_{eq}(u)du \Bigg/ \int_0^\infty f_{eq}(u)du = \\ = \frac{1}{|2\kappa| m}\left(\frac{2+|\kappa|}{2+3|\kappa|}\right)\times \\ \times\frac{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+1/4\right]}{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-1/4\right]}k_B T, \\ |\kappa| < (2/3). \qquad (10)$$

Тогда, с учетом κ-теоремы о равнораспределении энергии, выражение для среднего значения кинетической энергии E_κ всех частиц аномального вещества протозвездного облака, состоящего из N газовых частиц, будет иметь вид:

$$E_\kappa = N\frac{m\langle u^2\rangle_\kappa}{2} = \frac{1}{2}Nk_B B_\kappa T = \frac{1}{2}Nk_B T_\kappa, \qquad (11)$$

где

$$B_\kappa = \frac{1}{|2\kappa|}\left(\frac{2+|\kappa|}{2+3|\kappa|}\right)\times \\ \times\frac{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+1/4\right]}{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-1/4\right]}. \qquad (12)$$

(Заметим, что из свойств гамма-функции следует, что $\lim_{\kappa\to 0} B_\kappa = 1$).

Поскольку определение температуры в κ-статистике достаточно произвольно (см., например, (Колесниченко, 2020а)), то далее мы будем интерпретировать величину $T_\kappa = B_\kappa T$ как обобщенную температуру неаддитивной κ-системы. Естественно, что обобщенная температура в корне отличается от абсолютной термодинамической температуры T, характеризующей беспорядочное движение частиц системы.

Используя определение (12), запишем необходимые для дальнейшего внутреннюю (на единицу массы) κ-энергию ε_κ и κ-давление p_κ вещества протозвездного облака

$$\varepsilon_\kappa = \frac{3E_\kappa}{mN} = \frac{3k_B}{2m}T_\kappa, \quad p_\kappa = \frac{2}{3}\rho\varepsilon_\kappa = \frac{k_B}{m}T_\kappa\rho = k_B T_\kappa n. \qquad (13)$$

Здесь $n = N/V$, $\rho = mN/V$ — соответственно числовая плотность и массовая плотность вещества протозвездного облака. Заметим, что формула (13) для внутренней энергии в случае $\kappa \to 0$ принимает вид $\varepsilon = (3/2)k_B T/m$, что соответствует выражению для энергии идеального газа в статистике Больцмана—Гиббса.

Деформированная термодинамика на основе каппа-статистики. Далее будут использованы результаты работ (Scarfone, Wada, 2006; Колесниченко, 2020а; 2020г), в которых выполнено конструирование на основе параметрической κ-энтропии статистической термодинамики неэкстенсивных систем. Проведенное в них исследование базировалось на свойствах негиббсового канонического κ-распределения, полученного из принципа Джейнса (Jaynes, 1963) максимума κ-энтропии при заданности усредненной внутренней энергии системы, и вероятностной нормировке для функции κ-распределения. Было показано, что все важнейшие термодинамические характеристики системы, такие как энтропия, полная и свободная энергия, могут быть выражены с использованием только равновесной функции κ-распределения. Полученные при этом дифференциальные уравнения равновесной термодинамики для средних величин имеют следующую почти классическую форму:

$$F_\kappa = -k_B T \ln_\kappa Z_\kappa, \quad E_\kappa = -T^2\left(\partial(T^{-1}F_\kappa)/\partial T\right)_V, \qquad (14)$$

$$TS_\kappa = E_\kappa - F_\kappa, \quad S_\kappa = -\left(\partial F_\kappa/\partial T\right)_V, \qquad (15)$$

$$C_{V,\kappa} = \left(\partial E_\kappa/\partial T\right)_V = \frac{3}{2}NB_\kappa k_B, \qquad (16)$$

$$p_\kappa = -\left(dF_\kappa/dV\right)_T. \qquad (17)$$

Здесь Z_κ, F_κ, $C_{V,\kappa}$— соответственно обобщенные статистический интеграл, свободная энергия и теплоемкость (при постоянном объеме) системы.

ТЕРМОДИНАМИКА ИЗЛУЧЕНИЯ ЧЕРНОГО ТЕЛА В КАППА-СТАТИСТИКЕ

Электромагнитное излучение, находящееся в тепловом равновесии (чернотельное излучение), можно рассматривать как фотонный газ. В силу целочисленности момента импульса фотонов этот газ подчиняется статистике Бозе—Эйнштейна. Поскольку фотоны не взаимодействуют друг с другом (принцип суперпозиции для электромагнитного поля), то состоящий из фотонов газ можно считать идеальным. Однако при этом необходимо наличие хотя бы небольшого количества материальной среды (например, газа) для самой возможности установления теплового равновесия в излучении. В этом случае механизм, обеспечивающий установление равновесия, заключается в поглощении и испускании фотонов веществом. Это обстоятельство приводит к специфической особенности фотонного газа – число частиц N в нем не сохраняется и само должно определиться из условий теплового равновесия, что приводит к равенству нулю химического потенциала μ фотонного газа (см. Ландау, Лифшиц, 1976).

Из-за важности учета излучения для моделирования различных астрофизических объектов, излучение абсолютно черного тела исследовалось в первую очередь в рамках неэкстенсивной q-статистики Тсаллиса (см., например, Tsallis и др., 1995; Колесниченко, 2020в). В данном разделе мы получим термодинамические свойства чернотельного излучения в рамках κ-статистики Каниадакиса.

Распределение фотонов по различным уровням энергии $\varepsilon = h\nu$ (где ν – частота фотонов; $h = 6.626176(36)\times 10^{-27}$ эрг с – постоянная Планка) в статистике Каниадакиса имеет следующий вид (Aliano и др., 2003)

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp_\kappa(\varepsilon/k_B T) - 1}. \tag{18}$$

В предельном случае $\kappa \to 0$ обобщенное распределение (18) сводится к классическому распределению Бозе–Эйнштейна.

Умножая распределение (18) на плотность квантовых состояний фотонов с частотами собственных колебаний в интервале между ν и $\nu + d\nu$ (Ландау, Лифшиц, 1976)

$$d\Omega = V(8\pi\nu^2 c^{-3})d\nu \tag{19}$$

(где V – объем системы; $c = 2.99792458\times 10^{10}$ см с$^{-1}$ – скорость света в вакууме), получим следующую формулу для полного числа фотонов в этом участке спектра:

$$dN_\kappa^{rad}(\nu) = V\frac{8\pi}{c^3}\frac{\nu^2}{\exp_\kappa\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}d\nu, \tag{20}$$

а при умножении выражения (19) еще и на $h\nu$ получим соотношение для полной энергии излучения в данном интервале частот:

$$dE_\kappa^{rad}(\nu) = V\frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{\exp_\kappa\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}d\nu. \tag{21}$$

Это соотношение представляет собой обобщенный в рамках каппа-статистики Каниадакиса закон излучения Планка. При $\kappa \to 0$ оно сводится к классическому закону чернотельного излучения.

Обобщенная термодинамика чернотельного излучения. Если теперь ввести переменную интегрирования $x = h\nu/k_B T$ и проинтегрировать (21) по всем частотам, то в результате получим полную энергию излучения в данном объеме среды

$$\begin{aligned} E_\kappa^{rad} &= \int_0^\infty dE_\kappa^{rad}(\nu) = V\frac{8\pi}{c^3}\int_0^\infty \frac{h\nu^3}{\exp_\kappa(h\nu/k_B T) - 1}d\nu = \\ &= V\frac{8h\pi}{c^3}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4\int_0^\infty \frac{x^3}{\exp_\kappa(x) - 1}dx. \end{aligned} \tag{22}$$

В выражение (22) входит интеграл $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp_\kappa(x) - 1}$, который при $\kappa \to 0$ равен $\pi^4/15 \simeq 6.49394$ (Ландау, Лифшиц, 1976). Введем обозначение для интеграла вида[1]

$$J_\kappa(n) = \frac{15}{\pi^4}\int_0^\infty \frac{x^n dx}{\exp_\kappa(x) - 1}. \tag{23}$$

Тогда для полной энергии излучения черного тела в формализме Каниадакиса будем иметь следующий обобщенный закон Больцмана

$$E_\kappa^{rad}(T) = V\frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3h^3}J_\kappa(3)T^4 = Va_\kappa T^4. \tag{24}$$

Здесь

$$a = \frac{8}{15}\frac{\pi^5 k_B^4}{c^3h^3} = 7.56566(71)\times 10^{-15}\text{ эрг см}^{-3}\text{ K}^{-4}, \quad a_\kappa := aJ_\kappa(3) \tag{25}$$

– соответственно классическая и модифицированная постоянная плотности излучения Планка.

При использовании соотношений (14) и (24) легко получить обобщенное выражение для свободной энергии излучения черного тела:

$$\begin{aligned} F_\kappa^{rad}(T) &= -T\int E_\kappa^{rad}\frac{dT}{T^2} = -\frac{4V}{3c}\frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2h^3}J_\kappa(3)T^4 = \\ &= -\frac{V}{3}aJ_\kappa(3)T^4 = -\frac{V}{3}a_\kappa T^4 = -\frac{1}{3}E_\kappa^{rad}. \end{aligned} \tag{26}$$

Согласно формуле (15), энтропия черного излучения в статистике Каниадакиса равна

$$\begin{aligned} S_\kappa^{rad} &= -\left(\frac{\partial F_\kappa^{rad}}{\partial T}\right)_V = \frac{16V}{3c}\frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2h^3}J_\kappa(3)T^3 = \\ &= \frac{4V}{3}a_\kappa T^3. \end{aligned} \tag{27}$$

Тогда из (24)–(26) следует соотношение

$$T\,S_\kappa^{rad}(T) = E_\kappa^{rad}(T) - F_\kappa^{rad}(T), \tag{28}$$

[1] Формула для вычисления этого интеграла получена в работе (Колесниченко, 2020в); в частности,

$$J_\kappa^{(3)} = \frac{15}{\pi^4(1-\kappa)^3}\sum_{j=0}^{3}\left[C_3^j B(1-\kappa, (1-\kappa)(3-j)+1)\right],$$

где $B(x, y)$ – бета-функция.

которое доказывает инвариантность величины полной энергии чернотельного излучения $E_{\kappa}^{rad}(T)$ и в каппа-статистике.

Давление и теплоемкость (при постоянном объеме) для черного излучения в статистике Каниадакиса могут быть определены, согласно формулам (16) и (17), соотношениями:

$$C_{V,\kappa}^{rad} = \left(\frac{\partial E_{\kappa}^{rad}}{\partial T}\right)_V = 4Va_{\kappa}T^3,$$
$$p_{\kappa}^{rad} = -\left(\frac{dF_{\kappa}^{rad}}{dV}\right)_T = \frac{1}{3}a_{\kappa}T^4 = \frac{1}{3V}E_{\kappa}^{rad}. \qquad (29)$$

Таким образом, несмотря на зависимость термодинамических величин от параметра деформации κ, уравнение для полной энергии излучения (28) и уравнение состояния лучевого давления

$$p_{\kappa}^{rad} = \frac{1}{3}a_{\kappa}T^4 = \frac{1}{3V}E_{\kappa}^{rad} \qquad (30)$$

остаются неизменными и в формализме Каниадакиса.

В заключение этого раздела следует отметить, что все приведенные здесь величины восстанавливают свои стандартные выражения в пределе $\kappa \to 0$. Пересмотр термодинамических свойств излучения черного тела в каппа-формализме показывает, что оно излучает больше энергии с увеличением значения параметра деформации $|\kappa|$ по сравнению со стандартным законом излучения Планка. Кроме этого, было установлено, что эффекты деформированной статистики Каниадакиса более заметны при высоких температурах (см. Lourek, Tribeche, 2017).

ЭФФЕКТИВНАЯ ГРАВИТАЦИОННАЯ ПОСТОЯННАЯ В РАМКАХ ФОРМАЛИЗМОВ ВЕРЛИНДЕ И КАНИАДАКИСА

В соответствии с теорией ускоренного расширения Вселенной (Verlinde, 2011) центральным понятием, необходимым для возникновения гравитации является информация, которая подчиняется голографическому принципу (см., например, Susskind, 1995), и хорошо известный закон равнораспределения энергии. Здесь под голографией понимается информация о Вселенной, закодированная на экране (устройстве хранения информации), который трактуется как некая двумерная поверхность Вселенной. Согласно голографическому принципу рост информации, связанный с увеличением поверхности Вселенной, занимаемой материальными телами, приводит к увеличению энтропии, хранящейся на голографических экранах; отсюда возникновение градиента энтропии (энтропийная сила), направленного против увеличения радиуса указанной площади поверхности. А это и есть гравитация (см. Kolesnichenko, Marov, 2021).

В работах (Abreu др., 2013; 2016) с учетом формализма Верлинде дан вывод модифицированной гравитационной постоянной в рамках статистики Тсаллиса. Повторим кратко здесь этот вывод в рамках формализма Каниадакиса. С этой целью рассмотрим поверхность сферы радиуса R (играющую роль голографического экрана), которая находится в состоянии теплового равновесия и в центре которой находится масса M. Будем предполагать, что число битов, которые являются наименьшей единицей измерения информации на экране, пропорционально площади голографического экрана $A = 4\pi R^2$; тогда полное число битов N может быть записано в виде

$$N = A\big/L_{Pl}^2 = 8\pi^2R^2c^3\big/hG. \qquad (31)$$

Здесь $L_{Pl} = \sqrt{Gh/2\pi c^3} = 1.616225\times10^{-35}$ м, $G = 6.6720(41)\times10^{-8}$ дин см^2 г$^{-2}$ – соответственно планковская длина и гравитационная постоянная. В формализме Верлинде предполагается, что полная энергия битов на голографическом экране задается законом равнораспределения энергии $E = Nk_{\rm B}T/2$, который выводится в классической статистике Больцмана–Гиббса. Как было показано выше, этот закон в статистике Каниадакиса модифицируется следующим образом

$$E_{\kappa} = \frac{N}{2|2\kappa|}\left(\frac{2+|\kappa|}{2+3|\kappa|}\right)\times$$
$$\times\frac{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+1/4\right]}{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-1/4\right]}k_{\rm B}T = \qquad (32)$$
$$= \frac{N}{2}k_{\rm B}T_{\kappa}.$$

Отсюда, с учетом того, что энергия тестовой частицы внутри голографического экрана делится поровну на все биты, можно записать следующее соотношение

$$Mc^2 = E_{\kappa} = \frac{N}{2}B_{\kappa}k_{\rm B}T, \qquad (33)$$

где M – масса, которая в голографическом принципе возникает в области пространства, ограниченного экраном. Тестовая частица с массой m воспринимает всю энергию, распределенную по занятым битам, что следует из соотношения (33), которое представляет собой полную энергию, сосредоточенную на голографическом экране.

Важно отметить, что наблюдатель в системе покоя этой тестовой частицы, которая представляет собой ускоренную систему координат, зарегистрирует (за счет эффекта Унру[2] (Unruh, 1970)) наличие следующей температуры чернотельного излучения космологического горизонта:

$$k_B T = a_{ac} h \big/ 4\pi^2 c. \tag{34}$$

Эта температура зависит только от ускорения и выбора естественных единиц. Здесь a_{ac} – местное равномерное ускорение, связанное с тестовой частицей кадра. Поэтому в энтропийной теории Верлинде температуру Унру можно принять за температуру голографического экрана[3], которая зависит только от ускорения и выбора естественных единиц.

Здесь важно отметить, что при использовании принципа эквивалентности ускорение a_{ac}, фигурирующее в формуле (34), является также модифицированным абсолютным ускорением свободного падения, связанным с массивным телом в формализме Верлинде–Каниадакиса. Действительно, подставляя формулу (31) в соотношение (33) и используя выражение (34) получим, что

$$k_B T = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{a_{ac} h}{c}\right) = \frac{2Mc^2 hG}{8\pi^2 R^2 c \mathrm{B}_\kappa},$$

откуда следует модифицированная формула для ускорения

$$a_{ac} = \frac{M}{R^2}\frac{G}{\mathrm{B}_\kappa} = \frac{M}{R^2} G_\kappa. \tag{35}$$

Здесь

$$G_\kappa = \frac{G}{\mathrm{B}_\kappa} = |2\kappa|\left(\frac{2+3|\kappa|}{2+|\kappa|}\right)\times \\ \times\frac{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-1/4\right]}{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+1/4\right]}G \tag{36}$$

– эффективная гравитационная постоянная, полученная в рамках формализмов Верлинде и Каниадакиса. Заметим, что при $\kappa = 2/3$ (критическое значение параметра деформации) величину G_κ нельзя вычислить из соотношения (36), поскольку в его знаменателе находится расходящаяся для этого значения гамма-функция. Таким образом, число $\kappa = 2/3$ является верхним пределом, когда мы имеем дело с голографическим экраном (сравни с результатами работы (Tsallis, Cirto, 2013)).

РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОТОЗВЕЗДНОГО ОБЛАКА С ЧЕРНОТЕЛЬНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Будем далее предполагать, что протозвездное облако является квазиравновесным, сферически симметричным и оптически толстым, причем распределение поля излучения также близко к равновесному. Пусть r означает радиус-вектор, измеренный от центра конфигурации, принятого за начало координат. Для сферически симметричного распределения космического вещества все физические параметры будут функциями только одного параметра r. Пусть $M(r)$ – масса, заключенная внутри сферы радиуса r. Тогда

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr, \quad dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr. \tag{37}$$

Будем обозначать через $\langle\rho(r)\rangle$ среднюю плотность внутри сферы радиуса r, а через $\langle\rho\rangle$ – среднюю плотность всей конфигурации протозвездного облака

$$\langle\rho(r)\rangle = \frac{M(r)}{4/3\,\pi r^3}, \quad \langle\rho\rangle = \frac{M}{4/3\,\pi R^3}. \tag{38}$$

Здесь M – масса всей конфигурации, а R – радиус конфигурации, который равен радиус-вектору точки, в которой все термодинамические параметры космического вещества обращаются в нуль.

Условие механического равновесия неэкстенсивного протозвездного сферически симметричного облака имеет вид

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dP_\kappa}{dr} = G_\kappa \frac{M(r)}{r^2}. \tag{39}$$

Здесь введены следующие обозначения: $P_\kappa(r) = p_\kappa + p_\kappa^{rad} \equiv p_\kappa + a_\kappa T^4/3$ – полное давление космического вещества, состоящего из идеального κ-газа и чернотельного κ-излучения; $p_\kappa(r) = 2/3\,\rho\varepsilon_\kappa = k_B \mathrm{B}_\kappa T n$ – газовое давление в неэкстенсивной протозвездной конфигурации (определяемое формулой (13)); $p_\kappa^{rad} \equiv a_\kappa T^4/3$ – лучевое давление (определяемое формулой (29)); $G_\kappa = G/\mathrm{B}_\kappa$ – эффективная гравитационная постоянная (см. формулу (36)).

Введем уже здесь необходимую для дальнейших целей величину

$$\beta_\kappa = \frac{p_\kappa}{P_\kappa} = \frac{p_\kappa}{p_\kappa + p_\kappa^{rad}} = \left[1 + \left(\frac{a_\kappa}{3\mathcal{B}_\kappa}\right)\frac{1}{k_B n}T^3\right]^{-1}, \tag{40}$$

[2] Эффект Унру (Unruh effect) – предсказываемый квантовой теорией поля эффект появления теплового излучения в ускоряющейся системе отсчета при отсутствии этого излучения в инерциальной системе отсчета.

[3] Температура Унру имеет тот же вид, что и температура Хокинга $T_H = gh/4\pi^2 c k_B$, где g обозначает поверхностную гравитацию черной дыры, которая была получена С. Хокингом (Hawking, 1975). Поэтому в свете принципа эквивалентности ее иногда называют температурой Хокинга–Унру.

характеризующую долю вещества в полном давлении системы.

Из (38) и (39) следует фундаментальное уравнение гравитационного равновесия:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP_\text{к}}{dr}\right) = -4\pi G_\text{к}\rho,$$

которое может быть переписано в виде

$$\frac{dP_\text{к}}{dr} = -\frac{G_\text{к}M(r)}{4\pi r^4}\frac{dM(r)}{dr}. \tag{41}$$

Так как

$$\frac{d}{dr}\left[P_\text{к} + \frac{G_\text{к}M^2(r)}{8\pi r^4}\right] = $$
$$= \frac{dP_\text{к}}{dr} + \left(\frac{G_\text{к}M(r)}{4\pi r^4}\right)\frac{dM(r)}{dr} - \frac{G_\text{к}M^2(r)}{2\pi r^5},$$

то, с учетом уравнения (41), получим неравенство:

$$\frac{d}{dr}\left[P_\text{к}(r) + \frac{G_\text{к}M^2(r)}{8\pi r^4}\right] = -\frac{G_\text{к}M^2(r)}{2\pi r^5} < 0, \tag{42}$$

которое означает уменьшение функции $\left[P_\text{к}(r) + G_\text{к}M^2(r)\big/8\pi r^4\right]$ от центра к периферии для любой равновесной конфигурации неэкстенсивного протозвездного облака. Если $P_{\text{к},ce}$ означает центральное давление, то для него справедливо следующее интегральное неравенство

$$P_{\text{к},ce} > P_\text{к}(r) + \frac{G_\text{к}M^2(r)}{8\pi r^4} > \frac{GM^2}{8\pi \text{B}_\text{к}R^4} \tag{43}$$

(см. Чандрасекхар, 1950 (теорема 1, стр. 106)).

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ОБЛАКА В СТАТИСТИКЕ КАНИАДАКИСА

Приступим теперь к основной цели данной работы – выводу в рамках каппа-статистики Каниадакиса обобщенных интегральных теорем равновесия Чандрасекхара для “материнской” звездной туманности (небулы). Мы будем исходить из современных представлений о совместном образовании звезды и протопланетного диска из вещества единой вращающейся звездной туманности.

Модифицированное в рамках каппа-статистики неравенство, которому удовлетворяют давление $P_{\text{к},ce}$ и плотность ρ_{ce} в центре притяжения гравитирующего облака массы M, средняя плотность $\langle\rho\rangle$ вещества звезды и эффективная гравитационная постоянная $G_\text{к}$, принимает вид:

$$\frac{1}{2\text{B}_\text{к}}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\langle\rho\rangle^{4/3}M^{2/3} \le P_{\text{к},ce} \le$$
$$\le \frac{1}{2\text{B}_\text{к}}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\rho_{ce}^{4/3}M^{2/3}. \tag{44}$$

Классическая форма этого неравенства было получено Чандрасекхаром (1950) в предположении, что средняя плотность $\rho(r)$ внутри сферы радиуса r, выделенной из общей массы протозвездного облака, не увеличивается от центра к поверхности. Согласно этому неравенству, давление, действующее в центре облачной конфигурации массы M, является промежуточным между давлениями в центрах двух конфигураций с однородной плотностью – одной конфигурации с плотностью, равной средней плотности $\langle\rho\rangle$, а другой конфигурации с плотностью, равной плотности вещества ρ_{ce} в ее центре. Случай существования областей, в которых неравенство (50) нарушается, означает отсутствие равновесия протозвездного облака (Чандрасекхар, 1985).

Для вывода неравенства (44) используем соотношение (41), из которого, с учетом соотношения $r^4 = \left[M(r)\Big/\frac{4}{3}\pi\langle\rho(r)\rangle\right]^{4/3}$ (см. уравнение (38)), будем иметь

$$P_{\text{к},ce} - P_\text{к} = \frac{G_\text{к}}{4\pi}\int_0^r \frac{M(r)}{r^4}dM(r) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{4/3}G_\text{к}\int_0^r \langle\rho(r)\rangle^{4/3}M^{-1/3}(r)dM(r). \tag{45}$$

Так как по предположению плотность $\langle\rho(r)\rangle$ не увеличивается с увеличением r, то из (45) следует, что

$$P_{\text{к},ce} - P_\text{к} \ge \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{4/3}G_\text{к}\langle\rho(r)\rangle^{4/3}\int_0^r M^{-1/3}(r)dM(r). \tag{46}$$

Вычисляя интеграл в правой части (46), получим

$$P_{\text{к},ce} - P_\text{к} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}G_\text{к}\langle\rho(r)\rangle^{4/3}M^{2/3}(r). \tag{47}$$

Обращаясь снова к выражению (45), в согласии с принятой гипотезой имеем:

$$P_{\text{к},ce} - P_\text{к} \le \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{4/3}G_\text{к}\rho_{ce}^{4/3}\int_0^r M^{-1/3}(r)dM(r),$$

или

$$P_{\text{к},ce} - P_\text{к} \le \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}G_\text{к}\rho_{ce}^{4/3}M^{2/3}(r). \tag{48}$$

Объединяя (47) и (48), получим

$$\frac{1}{2\mathrm{B}_\kappa} G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \langle\rho(r)\rangle^{4/3} M^{2/3}(r) \le P_{\kappa,ce} - \\ - P_\kappa \le \frac{1}{2\mathrm{B}_\kappa} G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \rho_{ce}^{4/3} M^{2/3}(r). \quad (49)$$

Наконец, полагая в неравенстве (49) $r = R$, получим обобщенное в рамках статистики Каниадакиса неравенство Чандрасекхара (44).

Если теперь в левую часть неравенства (44) вместо средней плотности $\langle\rho\rangle$ рассматриваемой конфигурации подставить его выражение $M\Big/\frac{4}{3}\pi R^3$, то получим неравенство

$$\frac{3}{8\pi}\frac{GM^2}{\mathrm{B}_\kappa R^4} \le P_{\kappa,ce} \le \frac{1}{2\mathrm{B}_\kappa} G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \rho_{ce}^{4/3} M^{2/3}, \quad (50)$$

которое усиливает неравенство (43), полученное для $P_{\kappa,ce}$ в предыдущем разделе.

Модифицированная теорема Чандрасекхара № 7. Исходя из правой части неравенства (44), получим теперь модифицированное в рамках статистики Каниадакиса соотношение (2), т.е. модифицированную седьмую теорему (см. Чандрасекхар, 1950 (теорема 7, стр. 113)).

Используя для этого определение (40) для параметра β_κ, уравнение состояния (30) для лучевого давления, а также определение (15) для давления p_κ каппа-газа, в результате получим $P_\kappa = p_\kappa/\beta_\kappa = p_\kappa^{rad}\big/(1-\beta_\kappa)$, или

$$P_\kappa = \frac{1}{\beta_\kappa}\frac{k_\mathrm{B}}{m}\rho \mathrm{B}_\kappa T = \frac{1}{1-\beta_\kappa}\frac{1}{3}a_\kappa T^4, \quad (51)$$

где

$$\mathrm{B}_\kappa = \frac{1}{|2\kappa|}\left(\frac{2+|\kappa|}{2+3|\kappa|}\right) \times \\ \times \frac{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} - 3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} + 1/4\right]}{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} + 3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} - 1/4\right]},$$

$$a_\kappa = 8\frac{\pi k_\mathrm{B}^4}{c^3 h^3}\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp_\kappa(x) - 1}.$$

Отсюда следует, что

$$\beta_\kappa = \left[1 + \frac{a_\kappa}{\mathrm{B}_\kappa}\frac{1}{3k_\mathrm{B}}\frac{T^3}{n}\right]^{-1}, \\ T = \left[\frac{3k_\mathrm{B}}{m}\frac{(1-\beta_\kappa)}{\beta_\kappa}\frac{\mathrm{B}_\kappa}{a_\kappa}\right]^{1/3}\rho^{1/3}. \quad (52)$$

Теперь

$$P_\kappa = \frac{1}{\beta_\kappa}\frac{k_\mathrm{B}}{m}\rho \mathrm{B}_\kappa T = \left[\left(\frac{k_\mathrm{B}}{m}\mathrm{B}_\kappa\right)^4 \frac{3}{a_\kappa}\frac{(1-\beta_\kappa)}{\beta_\kappa^4}\right]^{1/3}\rho^{4/3}. \quad (53)$$

Следовательно, в центре облачной конфигурации

$$P_{\kappa,ce} = \left[\left(\frac{k_\mathrm{B}}{m}\mathrm{B}_\kappa\right)^4 \frac{3}{a_\kappa}\frac{(1-\beta_{\kappa,ce})}{\beta_{\kappa,ce}^4}\right]^{1/3}\rho_{ce}^{4/3}. \quad (54)$$

С другой стороны, согласно неравенству (50) имеем

$$P_{\kappa,ce} \le \frac{1}{2}G_\kappa\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} M^{2/3}\rho_{ce}^{4/3}. \quad (55)$$

Сравнивая (54) и (55) и учитывая (36), получим:

$$\left[\left(\frac{k_\mathrm{B}}{m}\right)^4 \mathrm{B}_\kappa^7 \frac{3}{a_\kappa}\frac{(1-\beta_{\kappa,ce})}{\beta_{\kappa,ce}^4}\right]^{1/3} \le G\left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3} M^{2/3}, \quad (56)$$

или

$$\left[\frac{\mathrm{B}_\kappa^7}{J_\kappa(3)}\frac{(1-\beta_{\kappa,ce})}{\beta_{\kappa,ce}^4}\right]^{-1/2} M \ge \frac{\mu^{-2}}{G^{3/2}}\left(\frac{18}{a\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{k_\mathrm{B}}{m_\mathrm{H}}\right)^2 = \\ = \left(\frac{ch}{G}\right)^{3/2}\mu^{-2}m_\mathrm{H}^{-2}\frac{\sqrt{135}}{2\pi^3} = 5.48M_\odot\mu^{-2}. \quad (57)$$

Здесь $a_\kappa = aJ_\kappa(3) = J_\kappa(3)8\pi^5 k_\mathrm{B}^4\big/15h^3c^3$ — модифицированная постоянная плотности излучения Планка; $m = \mu\, m_\mathrm{H}$, где μ — средний молекулярный вес; m_H — масса атома водорода; $M_\odot$ — масса Солнца; $(hc/G)^{3/2} m_\mathrm{H}^{-2} \approx 29.2M_\odot$.

Выражение (57) может быть переписано в виде неравенства

$$M \ge 5.48M_\odot\mu^{-2}\left[\frac{B_\kappa^7}{J_\kappa(3)}\frac{(1-\beta_{\kappa,ce})}{\beta_{\kappa,ce}^4}\right]^{1/2}. \quad (58)$$

Если это неравенство нарушается, то должны существовать некоторые области, в которых преобладают противоположные градиенты плотности; а это подразумевает нестабильность всей сферической конфигурации вещества (газа) и чернотельного излучения, находящейся в условиях квазиравновесия (ср. Чандрасекхар, 1985). Другими словами, выполнение неравенства (58) с учетом уравнения (53) эквивалентно условию стабильности такого сферического облака, в котором средняя плотность $\langle\rho(r)\rangle$ внутренней части радиуса r не увеличивается от центра к поверхности.

Если ввести теперь параметр β_κ^*, который однозначно определяется массой M облачной конфигурации и молекулярным весом μ_{ce} в ее центре при помощи уравнения четвертого порядка

$$G^{-3/2}\left(\frac{18}{\pi}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{k_\mathrm{B}}{\mu_{ce}m_\mathrm{H}}\right)^4 \frac{\mathrm{B}_\kappa^7}{a_\kappa}\frac{(1-\beta_\kappa^*)}{\beta_\kappa^{*4}}\right]^{1/2} = M, \quad (59)$$

то неравенство (58) может быть переписано следующим образом

$$\frac{(1-\beta_\kappa^*)}{\beta_\kappa^{*4}} \geq \frac{(1-\beta_{\kappa,ce})}{\beta_{\kappa,ce}^4}, \tag{60}$$

или, поскольку функция $\beta^{-4}(1-\beta)$ монотонно увеличивается с увеличением $(1-\beta)$, то в виде

$$1-\beta_\kappa^* \geq 1-\beta_{\kappa,\,ce}. \tag{61}$$

Последнее неравенство показывает, что для неэкстенсивного равновесного сферического облака значение величины $(1-\beta_\kappa)$ в его центре "*ce*" не может превосходить некоторого количества, зависящего только от массы облака M.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные этапы эволюции околозвездных аккреционных газопылевых дисков в настоящее время все более проясняются и уточняются. Однако проблема построения непротиворечивой картины образования самих звезд и околозвездных облаков до сих пор полностью не решена. Большинство обнаруженных на сегодня экзопланетных дисков вокруг солнечноподобных звезд сильно отличаются от протопланетного диска Солнца. По этой причине современная теория происхождения Солнечной системы является одной лишь из многих, и для моделирования эволюции любой другой конечной протозвездной туманности подходящая теория может оказаться более сложной. Об этом, в частности, свидетельствует коллекция обнаруженных во Вселенной экзопланет, которые весьма разнообразны. В связи со сказанным возникла, по мнению автора, необходимость в разработке нестандартного подхода, объясняющего (до известной степени) многообразие открытых экзопланетных аккреционных дисков вокруг звезд и экзопланет. В настоящей работе в рамках такого подхода на основе статистической механики Каниадакиса получено обобщение интегральных теорем равновесия Чандрасекхара для материи и черного излучения в протозвездном неэкстенсивном сферически симметричном облаке.

Следует заметить, что исследования в области статистической механики неэкстенсивных систем приобретают в настоящее время значительный общетеоретический интерес в связи с проявлениями неэкстенсивных аномальных свойств в ряде физических явлений и важностью практических приложений. Диапазон применения различных неэкстенсивных статистик в настоящее время постоянно расширяется, охватывая различные направления в науке, такие как космология и космогония, квантовая механика и статистика, специальная и общая теории относительности, стохастическая динамика и фракталы, геофизика, биомедицина и многие другие. Среди всех параметрических неэкстенсивных энтропий особый интерес представляет энтропия Каниадакиса, введенная впервые в работах (Kaniadakis, 2001a; 2001b; 2005; Kaniadakis, Scarfone, 2002; Kaniadakis и др., 2002). Основанная на каппа-энтропии неэкстенсивная статистика пригодна для описания очень большого класса аномальных явлений в целом ряде прикладных областей.

В первых разделах представленной работы изложены кратко, без математических деталей и выводов, те новые результаты статистической теории Каниадакиса, которые использованы для вывода обобщенных интегральных теорем равновесия Чандрасекхара. При этом ссылки на литературные источники минимальны и служат в основном для указания работ, в которых затрагиваются элементы рассматриваемой проблемы. В последнем разделе получено обобщение шестой и седьмой интегральных теорем равновесия Чандрасекхара для вещества и черного излучения в неэкстенсивной протозвездной туманности, находящейся в состоянии гидростатического равновесия.

Развитый в работе подход является новым и довольно эффективным для конструирования целого ряда новых моделей эволюции неэкстенсивных космологических и космогонических объектов (звезд, протозвездных туманностей, экзопланетных аккреционных дисков и др.), отличительной чертой которых является наличие динамических структур вещества с нецелой топологической размерностью, дальнодействующего силового взаимодействия, а также неэкстенсивного чернотельного излучения и модифицированной гравитационной постоянной.

Работа поддержана грантом № 075-15-2020-780 Министерства высшего образования и науки РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах. Казань: Фэн. 2002. 251 с.

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Колесниченко А.В. Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма–Миттала как основа семейства обобщенных термодинамик неэкстенсивных систем // Mathematica Montisnigri. 2018. V. 42. P. 74–101.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. (Синергетика: от прошлого к будущему. № 87). М.: ЛЕНАНД. 2019а. 360 с.

Колесниченко А.В. Вывод в рамках неэкстенсивной кинетики критерия неустойчивости Джинса для допланетного облака с учетом радиации и магнитного поля // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019б. № 95. 32 с.

Колесниченко А.В. Термодинамика Бозе-газа и черного излучения в неэкстенсивной статистике Тсаллиса // Астрон. вестн. 2020а. Т. 54. № 5. С. 446–457. (*Kolesnichenko A.V.* Thermodynamics of the Bose gas and blackbode radiation in non-extensive Tsallis statistics // Sol. Syst. Res. 2020a. V. 54. № 5. P. 420–431.)

Колесниченко А.В. Двухпараметрическая энтропия Шарма–Танеджа–Миттал как основа семейства равновесных термодинамик неэкстенсивных систем // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020б. № 36. 35 с.

Колесниченко А.В. Джинсовская неустойчивость допланетного газового облака с излучением в неэкстенсивной статистической кинетике Тсаллиса // Астрон. вестн. 2020в. Т. 54. № 2. С. 151–164. (*Kolesnichenko A.V.* Jeans instability of a protoplanetary gas cloud with radiation in nonextensive Tsallis kinetics // Sol. Syst. Res. 2020c. V. 54. № 2. P. 137–149.)

Колесниченко А.В. К построению статистической термодинамики неэкстенсивных систем на основе каппа-энтропии Каниадакиса // Mathematica Montisnigri. 2020г. V. 48. P. 118–144.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Термодинамика Реньи как обязательный опорный базис при моделировании эволюции протопланетного газопылевого диска с фрактальной структурой // Астрон. вестн. 2020. Т. 53. № 6. С. 1–20. (*Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya.* Rényi thermodynamics as a mandatory basis to model the evolution of a protoplanetary gas-dust disk with a fractal structure // Sol. Syst. Res. 2020. V. 53. № 6. P. 443–461.)

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая механика. Ч. I. М.: Наука, 1976. 588 с.

Чандрасекхар С. О звездах, их эволюции и устойчивости // УФН. 1985. Т. 145. № 3. С. 489–506.

Чандрасекхар С. Введение в учение о строении звезд. М.: Изд-во ИЛ, 1950. 476 с.

Abe S. A note on the q-deformation-theoretic aspect of the generalized entropies in nonextensive physics // Phys. Lett. A. 1997. V. 224. P. 326–330.

Abreu E.M.C., Neto J.A., Mendes A.C.R. Oliveira W. New bounds for Tsallis parameter in a noncommutative phase-space entropic gravity and nonextensive Friedmann equations // Physica A. 2013. V. 392. P. 5154–5163.

Abreu E.M.C., Neto J.A., Barboza E.M., .Jr, Nunes R.C. Holographic considerations on non-gaussian statistics and gravothermal catastrophe // Physica A. 2016. V. 441. P. 141–150.

Aliano A., Kaniadakis G., Miraldi E. Bose–Einstein condensation in the framework of nonextensive statistics // Physica B. 2003. V. 325. P. 35–40.

Bento E.P., Silva J.R.P., Silva R. Non-Gaussian statistics, Maxwellian derivation and stellar polytropes // Physica A. 2013. V 392. P. 666–672.

Carvalho J.C., Silva R., do Nascimento J.D., Jr, De Medeiros J.R. Power law statistics and stellar rotational velocities in the Pleiades // Europhys. Lett. 2008. V. 84. № 5. P. 59001 (pp. 5).

Carvalho J.C., do Nascimento J.D., Jr, Silva R., De Medeiros J.R. Non-Gaussian statistics and stellar rotational velocities of main-sequence field stars// Astrophys. J. Lett. 2009. V. 696. L. 48–51.

Hawking S.W. Particle Creation by Black Holes // Commun. Math. Phys. 1975. V. 43. P. 199–220.

Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics // Statistical Physics. Brandeis Lectures. 1963. V. 3. P. 181.

Kaniadakis G. Non-linear kinetics underlying generalized statistics // Physica A. 2001a. V. 296. P. 405–425.

Kaniadakis G. H-theorem and generalized entropies within the framework of nonlinear kinetics // Phys. Lett. A. 2001b. V. 288. P. 283–291.

Kaniadakis G. Statistical origin of quantum mechanics // Physica A. 2002. V. 307 P. 172–184.

Kaniadakis G. Statistical mechanics in the context of special relativity II // Phys. Rev. E. 2005. V. 72. P. 036108 (p. 7).

Kaniadakis G. Maximum entropy principle and power-law tailed distributions // Eur. Phys. J. B. 2009. V. 70. № 1. P. 3–13.

Kaniadakis G. Theoretical foundations and mathematical formalism of the power-low tailed statistical distributions // Entropy. 2013. V. 15. P. 3983–4010.

Kaniadakis G., Scarfone A.M. A new one-parameter deformation of the exponential function // Physica A. 2002. V. 305. P. 69–75.

Kaniadakis G., Quarati P., Scarfone A.M. Kinetical foundations of nonconventional statistics // Physica A. 2002. V. 305. P. 76–83.

Kolesnichenko A.V. Modeling the linear response from a quantum nonextensive system to a dynamic external disturbance // Math. Models and Computer Simulatns. 2020. V. 12. № 5. P. 647–659.

Kolesnichenko A.V., Chetverushkin B.N. Kinetic derivation of a quasi-hydrodynamic system of equations on the base of non-extensive statistics // RJNAMM (Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modelling). 2013. V. 28. № 6. P. 547–576.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Scenario of accelerated universe expansion under exposure to entropic forces related to with the entropies of Barrow and Tsallis–Cirto // Mathematica Montisnigri. 2021. V. 50. P. 80–103.

Landsberg P.T., Vedral V. Distributions and channel capacities in generalized statistical mechanics // Phys. Lett. A. 1998. V. 247. P. 211–216.

Lourek I., Tribeche M. Thermodynamic properties of the blackbody radiation: A Kaniadakis approach // Phys. Lett. A. 2017. V. 381. P. 452–456.

Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: Bibliography/ http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm.

Ourabah K., Tribeche M. Plank radiation law and Einstein coefficients reexamined in Kaniadakis statistics // Phys. Rev. T. 2014. V. 89. P. 062130 (p. 5).

Renyi A. On measures of entropy and information // Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. Prob. 1960. V. 1. Berkeley, Los Angeles: Univ. California Press, 1961. P. 547–561.

Rossani A., Scarfone A.M. Generalized kinetic equations for a system of interacting atoms and photons: theory and simulations // J. Phys. A: Math. and Theor. 2004. V. 37. № 18. P. 4955–4975.

Scarfone A.M., Wada T. Canonical partition function for anomalous systems described by the κ-entropy // Prog. Theor. Phys. Suppl. 2006. V. 162. P. 45–52.

Scarfone A.M., Wada T. Legendre structure of κ-thermostatistics revisited in the framework of information geometry // J. Phys. A: Math. Theor. 2014. V. 47. P. 275002 (17 p.)

Silva R. The H-theorem in κ-statistics: influence on the molecular chaos hypothesis // Phys. Lett. A. 2006. V. 352. P. 17–20.

Silva J.M., Silva R., Lima J.A.S. Conservative force fields in non-Gaussian statistics // Phys. Lett. A. 2008. V. 372. P. 5754–5757.

Sharma B.D., Mittal D.P. New non-additive measures of relative information // J. Comb. Inform. and Syst. Sci. 1977. V. 2. P. 122–133.

Soares B.B., Silva J.R.P. On the rotation of ONC stars in the Tsallis formalism context // Europhys. Lett. 2011. V. 96. P. 19001 (p. 6).

Susskind L. The World as a hologram // J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 11. P. 6377–6396.

Taneja I.J. On Generalized Information Measures and Their Applications // Advances in Electronics and Electron Physics / Ed. Hawkes P.W. London: Academic Press, 1989. V. 76. P. 327–413.

Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V. 52. № 1–2. P. 479–487. (a regular updated bibliography is accessible at http:/tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm)

Tsallis C., Sa Barreto F.C., Loh E.D. Generalization of the Planck radiation law and application to the cosmic microwave background radiation // Phys. Rev. E. 1995. V. 52. № 2. P. 1448–1451.

Tsallis C., Cirto L.J.L. Black hole thermodynamical entropy // European Phys. J. C. 2013. V. 73. № 7. P. 2487 (p. 5).

Unruh W.G. Notes on black-hole evaporation // Phys. Rev. D. 1976. V. 14. № 4. P. 870–892.

Verlinde E. On the origin of gravity and the laws of Newton // J. High Energy Phys. 2011. V. 4. P. 1–26.