

УДК 523-52

ВЛИЯНИЕ ЧЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА КРИТЕРИЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЖИНСА В ОКОЛОЗВЕЗДНОМ ПЛАЗМЕННОМ ДИСКЕ ПРИ УЧЕТЕ НЕИЗОЭНТРОПИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ

© 2022 г. А. В. Колесниченко*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

**e-mail: kolesn@keldysh.ru*

Поступила в редакцию 26.01.2022 г.

После доработки 27.02.2022 г.

Принята к публикации 04.04.2022 г.

В рамках проблемы моделирования эволюции околозвездного газопылевого облака обсуждается влияние черного излучения на джинсовскую магнито-гравитационную неустойчивость для самогравитирующего намагниченного плазменного диска, с учетом эффектов воздействия вращения, крупномасштабного магнитного поля, диссипативных процессов магнитной вязкости и лучевого теплопереноса. С использованием анализа нормального режима выведено общее дисперсионное соотношение. На его основе получены модифицированные критерии джинсовской неустойчивости для ряда частных случаев, связанных с различными относительными ориентациями магнитного поля, оси вращения и вектора распространения волны возмущения. Условие гравитационной устойчивости системы обсуждается с использованием критерия Рауса–Гурвица. Показано, что в случае как продольного, так и поперечного направления распространения волны возмущения критерии неустойчивости Джинса существенно модифицируются за счет лучевых теплопотерь и стоковой коррекции. Полученные результаты позволяют, в частности, лучше понять проблему, связанную с эволюцией околозвездных плазменных дисков.

Ключевые слова: гравитационный критерий Джинса, околозвездный плазменный диск, черное излучение, взвешенные пылевые частицы, лучистая теплопроводность

DOI: 10.31857/S0320930X22050036

ВВЕДЕНИЕ

Заключительным этапом эволюции маломассивного протозвездного объекта является звезда типа Т Тау, окруженная газопылевым диском. Изучение этих дисков вызывает особый интерес, поскольку в них, по современным представлениям, происходит образование планетных систем, подобных Солнечной системе. При этом критерии магнито-гравитационной неустойчивости во вращающемся горячем газе (плазме) имеют ключевое значение в понимании процессов эволюции подобных околозвездных дисков. Именно гравитационная неустойчивость Джинса играет главную роль в процессе фрагментации дискового вещества. В частности, экзопланетные диски формируются из самогравитирующих околозвездных дисков в результате потери ими гравитационной устойчивости. Однако полной ясности в том, какие физико-механические свойства звездной системы доминируют при их формировании, до сих пор нет. Большинство обнаруженных на сегодня экзопланетных дисков вокруг галактиче-

ских звезд заметно отличаются от протопланетного диска Солнца. По этой причине теория, которая используется для описания эволюции Солнечной системы, является, по-видимому, одной из многих, и для адекватного моделирования эволюции экзопланетных дисков она должна быть частично видоизменена и дополнена.

Классическая теория гравитационной неустойчивости Джинса предполагает, что среда однородна и изотропна и характеризуется баротропным уравнением состояния (Jeans, 1902). Существенное усовершенствование этой теории при учете различных предположений о вращении системы и магнитном поле было выполнено Чандрасекхаром (Chandrasekhar, 1961). В дальнейшем многочисленные исследователи обсуждали гравитационную неустойчивость в линейном и нелинейном приближениях для вращающихся газа и плазмы в разных аспектах относительной ориентации магнитного поля, оси вращения и вектора распространения волны возмущения, а также с учетом влияния разнообразных физических про-

цессов и явлений (см., например, Bhatia, 1967; Aggarwal, Talwar, 1969; Sharma, 1974; Михайловский, 1977; Fridman, Polyachenko, 1984; Sharma, Singh, 1988; Bora, Nayyar, 1991; Bora, Talwar, 1993; Хоперсков, Храпов, 1999; Jacobs, Shukla, 2005; Borah, Sen, 2007; Shaikh и др., 2007; 2008; Prajapati и др., 2010; Dhiman, Dadwal, 2010; 2011; 2012; Фридман, Хоперсков, 2011; Kaothekar, Chhajlani, 2012; Prajapati и др., 2012; Argal и др., 2014; Jain и др., 2015; Kaothekar, 2016; Joshi, Pensia, 2017; Kumar и др., 2017; Pensia и др., 2018; Колесниченко, 2020).

Существует также относительно небольшое число работ, в которых при различных предположениях относительно направления магнитного поля и режимов распространения волны возмущения было исследовано влияние взвешенных частиц и процессов теплопроводности на магнито-гравитационную нестабильность вращающейся плазмы (см., например, Chhajlani, Vaghela, 1987; Tsintsadze и др., 2008; Prajapati, Chhajlani, 2011; Prajapati, Bhakta, 2015; Sharma, Patidar, 2017; Kumar и др., 2018; Dolai, Prajapati, 2018). Во всех перечисленных публикациях показано, что критерий неустойчивости Джинса сохраняется с некоторыми модификациями, связанными с учетом различных параметров.

И совсем немного на сегодняшний день имеется в литературе работ, в которых исследуется неустойчивость самогравитирующих астрофизических объектов в приближении чернотельного излучения (см., например, Vranješ, Čadež, 1990; Vranješ, 1990; Vaghela, Shrivastava, 1994; Prajapati, Chhajlani, 2011; Kumar и др., 2017; Kolesnichenko, 2020; 2021). Обычно, температура газа в околосветных дисках растет с приближением к аккрецирующему объекту. С ростом температуры увеличивается значимость давления излучения в эволюции диска по сравнению с газовым давлением. Впервые анализ устойчивости дисковой аккреции на черную дыру звездной массы относительно возмущений с учетом давления излучения был поставлен в работах (Lightman, 1974; Lightman, Eardley, 1974). Подробный анализ устойчивости относительно осесимметричных возмущений с учетом давления излучения был проведен Шакурой и Сюняевым в работе (Shakura, Sunyaev, 1976), в которой моделирование эволюции диска разбивается на несколько областей, в которых преимущественную роль играет то, или иное давление (P_g или P_r), а поток излучения может быть представлен (если исключить из рассмотрения внешние области плазменного диска, близкие к поверхности) в диффузионном приближении. В ряде последующих многочисленных работ также рассматривалась гравитационная неустойчивость аккреционных дисков с излучением при учете тепловой, вязкой и акустической мод, а также некоторых других физических процессов (см.,

например, Фридман, Хоперсков, 2011; Хоперсков, Храпов, 1999).

Вместе с тем, почти во всех цитируемых выше работах по неустойчивости радиационно-доминирующей области диска рассматривались только изоэнтропические волновые возмущения, при которых энтропия каждого элемента массы на всем его пути сохраняется. В этом случае мелко-масштабные эйлеровы вариации давления P'/P , плотности ρ'/ρ и температуры T'/T в линеаризованном уравнении сохранения энергии определялись, как правило, на основе известных адиабатических соотношений Эддингтона–Чандрасекхара (см. Тассуль, 1982). И хотя для большинства астрофизических приложений эти соотношения представляют собой достаточно разумное приближение, во многих более реалистических ситуациях необходимо учитывать отклонение от изоэнтропичности, при которой элементы массы приобретают или теряют тепло (например, в звездах верхней части главной последовательности, в которых давление излучения преобладает над газовым давлением). В этом случае относительно простые адиабатические соотношения Эддингтона–Чандрасекхара (см. Тассуль, 1982) более не применимы и следует использовать другие соотношения (Cox, Giuli, 1968; Ch 9), усложненные за счет учета вектора потока энергии, обусловленного всеми возможными механизмами переноса (излучение, теплопроводность, конвекция, нейтринные потери, потеря массы и т.п.). Как уже говорилось выше, вопрос о неустойчивости самогравитирующего плазменного облака, с учетом чернотельного излучения в неизоэнтропическом случае почти не обсуждался в литературе. Насколько известно автору, только в двух публикациях (Kaneko и др., 2005; Kaneko, Morita, 2006) методом радиационной акустики Уитхема (см. Cogley, Vincent, 1969) было исследовано распространение одномерных малоамплитудных возмущений в излучающей и рассеивающей серой среде совершенного газа с учетом лучистых теплопотерь.

В связи с этим представляется вполне оправданным появление работ, целью которых является детальное исследование того, как классический критерий гравитационной неустойчивости Джинса во вращающейся пылевой намагниченной плазме модифицируется для астрофизических оптически тонких¹ дисков в случае неизоэнтропичности возмущений совокупных параметров вещества и черного излучения при наличии динамически значимого давления излучения, лу-

¹ Околосветные диски с преобладанием излучения преимущественно оптически тонкие. Температура оптически тонких дисков определяется балансом между нагревом чернотельным излучением и вязкостным нагревом с одной стороны, и радиационным охлаждением с другой (см. Фридман, Хоперсков, 2011).

чистой вязкости и теплопроводности, а также крупномасштабных магнитных полей и турбулентности.

**БАЗИСНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ НАМАГНИЧЕННОЙ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ
ПЫЛЕВОЙ ПЛАЗМЫ**

В представленной работе мы обсудим в рамках предельно простой модели проблему влияния силы Кориолиса, однородного магнитного поля и чернотельного излучения на динамическую неустойчивость самогравитирующего околозвездного диска, вещество которого, являющееся смесью пылевой плазмы и черного излучения, вращается вокруг фиксированной в пространстве оси с некоторой постоянной угловой скоростью Ω . Далее будем предполагать, что пылевая фаза в каждом элементарном объеме присутствует в виде сферических включений одинакового радиуса r , причем объемная концентрация дисперсной фазы $\alpha = (4/3)\pi r^3 n$ не очень велика. По этой причине можно пренебречь силовым взаимодействием (в частности, столкновениями) между пылевыми частицами. Будем также предполагать, что плазменное облако в значительной мере обладает осевой симметрией, что является следствием его вращения вокруг центральной звезды. Исходная система уравнений для химической однородной облачной среды, записанная при отсутствии некоторых диссипативных эффектов, состоит в этом случае из уравнений звездной гидродинамики, уравнения Пуассона и уравнения магнитной индукции, которые имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{1}$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right\} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_\Sigma + \mathbf{j} \times \mathbf{H} + \rho \nabla \Phi + \rho_d \nu_c (\mathbf{u}_d - \mathbf{u}), \tag{2}$$

$$\rho_d \left(\frac{\partial \mathbf{u}_d}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_d \right) = \rho_d \nu_c (\mathbf{u} - \mathbf{u}_d), \tag{3}$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial E e}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla E \right\} + P \nabla \cdot \mathbf{u} = -\nabla \cdot (\mathbf{J}_g + \mathbf{J}_r), \tag{4}$$

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}), \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \tag{5}$$

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho. \tag{6}$$

Здесь

$$P(\rho, T) := P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}} \equiv P_{\text{gas}} + aT^4/3, \tag{7}$$

$$E(\rho, T) = e_{\text{gas}} + e_{\text{rad}} \equiv e_{\text{gas}} + aT^4/\rho \tag{8}$$

– соответственно полное давление и полная внутренняя энергия (на единицу массы) плазмы и черного излучения; $T(\mathbf{r}, t)$ – абсолютная темпера-

тура; a – постоянная давления излучения; $\mathbf{J}_{\text{gas}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)$ – сумма потоков тепла, обусловленных теплопроводностью и лучевыми теплотерями; $e_{\text{gas}}(\mathbf{r}, t) = C_{V, \text{gas}} T = (3/2) P_{\text{gas}}/\rho$ – удельная внутренняя энергия (на единицу массы) вещества плазменного облака; $e_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = aT^4/\rho$ – удельная энергия чернотельного излучения; $P_{\text{gas}}(\mathbf{r}, t) = (\mathcal{R}/\bar{\mu})\rho T = (2/3)\rho e_{\text{gas}}$ – тепловое давление плазменного вещества (аналог закона состояния в кинетической теории идеальных газов); $P_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = aT^4/3$ – давление излучения (преобладающее над газовым давлением во внутренних областях околозвездного диска, находящихся при высокой температуре); $\Phi(\mathbf{r})$ – ньютоновский гравитационный потенциал, являющийся решением уравнения Пуассона (6); G – гравитационная постоянная; $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = (1/4\pi)\nabla \times \mathbf{H}$ – плотность тока; \mathbf{H} – напряженность внешнего магнитного поля (далее все электромагнитные величины измеряются в единицах СГСМ); $\rho_d(\rho \gg \rho_d)$ – плотность нейтральной компоненты вещества (пыли); $\nu_c = 6\pi r v$ – частота столкновений между частицами пыли и плазмы (v – кинематическая вязкость несущей фазы); $C_{V, \text{gas}} = (3/2)\mathcal{R}/\bar{\mu}$ – удельная изохорная теплоемкость плазменной составляющей облака, \mathcal{R} – универсальная газовая постоянная; $\bar{\mu}$ – средняя атомная масса; $\gamma = C_{P, \text{gas}}/C_{V, \text{gas}} = 5/3$ – показатель адиабаты для идеальной плазмы; $\boldsymbol{\tau}_{\text{gas}}$ – не зависящий от столкновений частиц аналог тензора вязких напряжений плазмы, в которой ларморовский радиус играет роль обычной длины свободного пробега; $\boldsymbol{\tau}_{\text{rad}}$ – тензор лучистых напряжений; $\boldsymbol{\tau}_\Sigma := \boldsymbol{\tau}_{\text{gas}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{rad}}$ – совокупный тензор вязких напряжений для плазмы и чернотельного излучения, имеющий компоненты

$$\tau_{\Sigma ij} = \mu_\Sigma (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i - (2/3)\delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}),$$

где $\mu_\Sigma := \mu_{\text{gas}} + \mu_{\text{rad}}$ – полный коэффициент сдвиговой вязкости. Остальные символы имеют обычный смысл.

Дивергенция $\nabla \cdot (\mathbf{J}_{\text{gas}} + \mathbf{J}_{\text{rad}})$ в уравнении (4) описывает приток тепла от соседних элементов плазменного облака. Далее считается, что $\mathbf{J}_{\text{gas}} = -\lambda_{\text{gas}} \nabla T$, где λ_{gas} – коэффициент теплопроводности, являющийся мерой необратимого переноса тепловой энергии между частицами плазмы от областей облака, температура которых выше, к областям с более низкой температурой. Если исключить из рассмотрения внешние области плазменного диска, близкие к поверхности, то вектор потока излучения также может быть записан в диффузионном приближении в виде:

$$\mathbf{J}_{\text{rad}} = -\lambda_{\text{rad}} \nabla T, \quad \lambda_{\text{rad}} = 4/3 (ac/\kappa\rho) T^3, \quad (9)$$

где λ_{rad} – коэффициент лучистой теплопроводности, обусловленный радиационным теплообменом. Здесь c – скорость света в вакууме; κ – коэффициент поглощения фотонов в газовой среде (непрозрачность Крамерса), зависящий от параметров ρ , T и химического состава, $\kappa \propto \rho^n T^s$ (см., например, Шапиро, Тьюколски, 1985). Заметим, что для многих плазменных астрофизических объектов (исключая вырожденные звезды) обычно полностью пренебрегают “обычной” теплопроводностью ($\lambda_{\text{gas}} \ll \lambda_{\text{rad}}$).

При написании системы уравнений (1)–(6) были сделаны часто используемые в астрофизической литературе предположения. В частности, не учитывались токи смещения и предполагалось, что магнитная проницаемость плазменного вещества равна единице. В уравнении магнитной индукции (6) не учитывалась диффузия магнитного поля, поскольку для больших астрофизических масс крупномасштабное магнитное поле очень медленно просачивается сквозь вещество (т.е. далее рассматривается идеально проводящая среда с нулевой магнитной вязкостью, $v_H = 0$). По этой же причине в законе сохранения тепловой энергии (4) опущен член уравнения $(v_H/4\pi) |\nabla \times \mathbf{H}|^2$. Кроме этого, в энергетическом уравнении (4) не учитывался внутренний нагрев плазменного облака, описываемый так называемой диссипативной функцией $\Phi_V := \tau_{ij} \tau_{ij} / 2\mu_\Sigma$, которая пропорциональна полному коэффициенту сдвиговой вязкости

$$\mu_\Sigma := \mu_{\text{gas}} + \mu_{\text{rad}} = (2/5)m^{1/2} (k_B T)^{5/2} / (e^4 \ln \Lambda) + (4/15) a T^4 / (c\kappa\rho), \quad (10)$$

где $\mu_{\text{rad}} = 4aT^4 / (15c\kappa\rho)$ – коэффициент лучистой вязкости; m – масса протона, e – заряд электрона в единицах СГСЭ, a k_B – постоянная Больцмана; величина Λ равна $\Lambda = (3/2)e^{-3}(mk_B^3 T^3 / \pi\rho)^{1/2}$ и пропорциональна расстоянию обрезания столкновений, которое принимается равным дебаевскому радиусу. Формула (10) справедлива для чисто водородной плазмы, что вполне приемлемо для поставленной цели. Коэффициент лучистой вязкости μ_{rad} описывает взаимодействие между веществом и излучением с помощью тензора лучистых напряжений τ_{rad} , который по своей структуре похож на тензор напряжений для вещества τ_{gas} .

Изоэнтропические процессы в среде, содержащей газ и излучение

Уравнение баланса полной внутренней энергии излучающей плазмы (4) удобно переписать, используя уравнение неразрывности (1), в форме первого начала термодинамики (тождества Гиббса)²

$$dE/dt + Pd(1/\rho)/dt = dQ/dt = TdS/dt, \quad (11)$$

$$(d/dt := \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla),$$

где $\rho dQ/dt := -\nabla \cdot (\mathbf{J}_{\text{gas}} + \mathbf{J}_{\text{rad}})$ – полная скорость выделения тепла за счет энергии, уносимой теплопроводностью и излучением из элемента среды при его движении.

Для адиабатического (изоэнтропического) движения дивергенция $\nabla \cdot (\mathbf{J}_{\text{gas}} + \mathbf{J}_{\text{rad}})$ равна нулю во всех точках, т.е. теплота не течет через поверхность внутри жидкой среды. В этом случае уравнение энергии (11) принимает вид

$$\rho dE/dt - (P/\rho) d\rho/dt = 0, \quad (12)$$

выражающий тот факт, что скорость изменения полной внутренней энергии движущегося элемента дискового вещества равна работе по сжатию этого элемента, совершаемой окружающей средой. В астрофизических приложениях (в частности, при изучении динамики акустических колебаний) часто удобно использовать вместо уравнения (12) следующие две эквивалентные между собой его формы, полученные Эддингтоном и Чандрасекхаром (см., например, Тассуль, 1982):

$$\frac{d}{dt} \ln P = \Gamma_1 \frac{d}{dt} \ln \rho, \quad \frac{d}{dt} \ln T = (\Gamma_3 - 1) \frac{d}{dt} \ln \rho, \quad (13)$$

где Γ_1 и Γ_3 – так называемые обобщенные показатели адиабаты для смеси вещества и черного излучения, определяемые соотношениями

$$\Gamma_1 := \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_{\text{ad}} = \beta + \frac{(4 - 3\beta)(\gamma - 1)}{\beta + 12(\gamma - 1)(1 - \beta)}, \quad (14)$$

$$\Gamma_3 - 1 := \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_{\text{ad}} = \frac{(4 - 3\beta)(\gamma - 1)}{\beta + 12(\gamma - 1)(1 - \beta)} = \frac{\Gamma_1 - \beta}{4 - 3\beta}.$$

Здесь $\beta := P_{\text{gas}} / (P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}})$ – коэффициент, характеризующий долю давления вещества в полном давлении системы. Когда $\gamma = 5/3$, то $\Gamma_1 = \frac{32 - 3\beta(\beta + 8)}{3(8 - 7\beta)}$, $\Gamma_3 - 1 = \frac{8 - 6\beta}{3(8 - 7\beta)}$.

Если $P_{\text{gas}} \gg P_{\text{rad}}$, то $\beta \approx 1$ и все обобщенные показатели адиабаты для смеси “плазма + излучение”

² Следует отметить, что тождество Гиббса (11) для энтропии (на единицу массы системы) является совершенно таким же, как в случае неэлектропроводящей жидкости (см. де Гроот, Мазур, 1964).

ние” совпадают с показателем адиабаты идеального газа $\Gamma_1 = \Gamma_3 = \gamma$, а когда присутствует одно лишь излучение абсолютно черного тела ($P_{\text{gas}} \ll P_{\text{rad}}$), то они равны 4/3. Таким образом, для рассматриваемой астрофизической системы обобщенные показатели адиабаты принимают промежуточные значения от 4/3 до 5/3.

Неизотропические процессы в излучающей среде

Далее будет исследована гравитационная неустойчивость вращающегося с постоянной угловой скоростью околозвездного облака с учетом лучевого давления и крупномасштабного магнитного поля в более общем случае неизотропических возмущений параметров состояния, связанных с лучевым переносом тепла (в диффузионном приближении) и магнитной вязкостью. В этом случае вместо уравнений (13) нужно использовать другие формы энергетического уравнения (4) (см., например, Сох, 1979)

$$\frac{d}{dt} \ln P = \begin{cases} \Gamma_1 d \ln \rho / dt + (\Gamma_3 - 1) P^{-1} \rho \frac{dQ}{dt}, & (a) \\ \Gamma_1 d \ln \rho / dt + (\chi_T / C_V T) \frac{dQ}{dt}, & (b) \end{cases} \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \ln T = \begin{cases} (\Gamma_3 - 1) d \ln \rho / dt + (1 / C_{V\Sigma} \rho T) \frac{dQ}{dt}, & (a) \\ [(\Gamma_3 - 1) / \Gamma_1] d \ln P / dt + (1 / C_{P\Sigma} T) \frac{dQ}{dt}. & (b) \end{cases} \quad (16)$$

Здесь $C_{V\Sigma} = C_{V,\text{gas}} \frac{(\gamma - 1)(4 - 3\beta)^2}{\beta(\Gamma_1 - \beta)}$, $C_{P\Sigma} = C_{V\Sigma} \frac{\Gamma_1}{\beta}$ – соответственно полные удельные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении для облака, содержащего вещество и радиацию, а коэффициент χ_T определяется как

$$\chi_T := \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho = \frac{(\Gamma_3 - 1) \rho C_{V\Sigma} T}{P},$$

тогда $\chi_T / C_{V\Sigma} T = \rho(\Gamma_3 - 1) / P$.

ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для изучения мелкомасштабных возмущений линеаризуем систему уравнений (1)–(6) представим магнитогидродинамические переменные в виде сумм невозмущенных $\rho_0, T_0, P_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_{d0}, \mathbf{H}_0, \Phi_0$ и возмущенных $\rho', T', P', \mathbf{u}', \mathbf{u}'_d, \mathbf{H}', \Phi'$ ³ величин. Невозмущенные величины описывают по пред-

положению некоторое равновесное состояние плазменного облака, а возмущенные – суть малые возмущения параметров, слабо нарушающие невозмущенное состояние. При этом будем считать, что невозмущенное состояние соответствует равновесному состоянию однородного диска с $\mathbf{u}_0 = 0, \mathbf{u}_{d0} = 0, \mathbf{H}_0 = H \mathbf{i}_z$ и используем так называемое “мошенничество” Джинса $\Phi_0 \equiv 0$,⁴ согласно которому уравнение Пуассона (6) применяется лишь к возмущениям плотности. Кроме этого будем, для простоты, предполагать, что характерная длина волны возмущения мала по сравнению с характерным размером изменения параметров P_0, T_0, ρ_0 и с некоторыми другими характерными длинами задачи (т.е. ограничимся так называемым приближением коротковолновой акустики); тогда в линеаризованных уравнениях можно пренебречь пространственными производными для этих величин. Далее индекс “0” у невозмущенных величин будем опускать.

С учетом сделанных упрощающих предположений дифференциальные уравнения (1)–(6), при выполнении необходимых разложений и удержании только членов первого порядка относительно малых возмущений, принимают следующий линеаризованный вид (здесь энергетическое уравнение (3) записано в форме (15a)):

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (17)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\nabla P' + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}'_\Sigma + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{H}') \times \mathbf{H} + \rho \nabla \Phi' + \rho_d v_c (\mathbf{u}'_d - \mathbf{u}'), \quad (18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'_d}{\partial t} = -v_c (\mathbf{u}'_d - \mathbf{u}'), \quad (19)$$

$$\frac{\partial P'}{\partial t} = \Gamma_1 \frac{P}{\rho} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\Gamma_3 - 1) \lambda_\Sigma \nabla^2 T', \quad (20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}' \times \mathbf{H}), \quad \nabla \cdot \mathbf{H}' = 0, \quad (21)$$

$$\nabla^2 \Phi' = -4\pi G \rho'. \quad (22)$$

С учетом выбранного направления внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0 = H \mathbf{i}_z$, компоненты $\tau'_{\Sigma ij}$ пуль-

⁴ Напомним, что при рассмотрении гравитационной неустойчивости Дж. Джинс рассматривал однородное состояние самогравитирующего вещества в состоянии покоя, что не совсем корректно, так как такое состояние не является состоянием равновесия (Jeans, 1902). Тем не менее его вывод критерия неустойчивости можно рассматривать как первое приближение, которое в наиболее простых случаях дает правильный порядок нижней критической длины волны возмущения, ведущего к неустойчивости (см., например, Фридман, Хоперсков, 2011).

³ Здесь штрихом обозначены эйлеровы вариации, которые коммутируют с операторами градиента и производной по времени.

сирующего суммарного тензора вязких и лучистых напряжений принимают вид (Roberts, Taylor, 1962)

$$\begin{aligned}\tau'_{\Sigma xx} &= -\mu_{\Sigma} \left(\frac{\partial u'_y}{\partial x} + \frac{\partial u'_x}{\partial y} \right), & \tau'_{\Sigma yy} &= \mu_{\Sigma} \left(\frac{\partial u'_y}{\partial x} + \frac{\partial u'_x}{\partial y} \right), \\ \tau'_{\Sigma xy} &= \tau'_{\Sigma yx} = \mu_{\Sigma} \left(\frac{\partial u'_x}{\partial x} - \frac{\partial u'_y}{\partial y} \right), \\ \tau'_{\Sigma xz} &= \tau'_{\Sigma zx} = -2\mu_{\Sigma} \left(\frac{\partial u'_y}{\partial z} + \frac{\partial u'_z}{\partial y} \right), \\ \tau'_{\Sigma yz} &= \tau'_{\Sigma zy} = 2\mu_{\Sigma} \left(\frac{\partial u'_z}{\partial x} + \frac{\partial u'_x}{\partial z} \right), & \tau'_{\Sigma zz} &= 0.\end{aligned}\quad (23)$$

К уравнениям (18)–(23) необходимо добавить линейризованное уравнение состояния смеси (вещество + излучение). При использовании уравнения (7) и параметра $\beta = P_{\text{gas}}/P$, эйлерову вариацию полного давления P можно записать в виде

$$\begin{aligned}P' &= (\mathcal{R}/\bar{\mu})T\rho' + \left\{ (\mathcal{R}/\bar{\mu})\rho + \frac{4}{3}aT^3 \right\} T' = \\ &= \beta P \left\{ \frac{\rho'}{\rho} + \frac{(4-3\beta)T'}{T} \right\}.\end{aligned}\quad (24)$$

Система уравнений (18)–(24), описывающая эволюцию мелкомасштабных неадиабатических возмущений параметров плазменной среды с чернотельным излучением на фоне ее равновесного состояния, состоит из линейных однородных уравнений в частных производных, следовательно, к ней применим метод нормальных колебаний (метод мод). Далее будем предполагать, что возмущения равновесного фона эволюционируют во времени по закону $\sim \exp(\omega t + i k_{\perp} x + i k_{\parallel} z)$, где ω – частота гармонических колебаний, а $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2}$ – волновое число.

Комбинируя записанное для возмущений уравнение (20) и соотношение (24), получим ключевую для дальнейшего связь между пульсациями полного давления P' и объемной плотности среды ρ' :

$$P' = \left[(\omega c_{\text{gas,rad}}^2 + \mathbf{A}) / (\omega + \mathbf{B}) \right] \rho'. \quad (25)$$

Здесь использованы следующие величины

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &:= (\Gamma_3 - 1)\beta \frac{\lambda_{\Sigma} T}{\rho(4-3\beta)} \mathbf{k}^2, \\ \mathbf{B} &:= (\Gamma_3 - 1) \frac{\lambda_{\Sigma} T}{P(4-3\beta)} \mathbf{k}^2, \\ c_{\text{(gas,rad)}} &:= \sqrt{\frac{P}{\rho}} \Gamma_1 = \\ &= \sqrt{(\mathcal{R}/\bar{\mu})T \left[1 + \frac{(4-3\beta)^2(\gamma-1)}{\beta[\beta+12(\gamma-1)(1-\beta)]} \right]},\end{aligned}\quad (26)$$

– невозмущенная адиабатическая скорость звука в плазме с чернотельным излучением. Заметим, что в частном случае, когда параметр $\beta = 1$, эта величина совпадает с классическим выражением для адиабатической скорости звука в газе

$$c_{\text{(gas,rad)}} \Big|_{\beta=1} = c_{\text{gas}} = \sqrt{\gamma P_{\text{gas}} / \rho}.$$

Фурье-гармоники возмущений магнитного поля получим, используя линейризованные уравнения (21); в результате будем иметь

$$\begin{aligned}\omega \mathbf{H}'_x - i \mathbf{H} k_{\parallel} u'_x &= 0, & \omega \mathbf{H}'_y - i \mathbf{H} k_{\parallel} u'_y &= 0, \\ \omega \mathbf{H}'_z - i \mathbf{H} k_{\perp} u'_z &= 0, & \mathbf{H}'_x k_{\perp} + \mathbf{H}'_z k_{\parallel} &= 0.\end{aligned}\quad (27)$$

Из уравнений (17) и (21) следуют еще два соотношения для фурье-гармоник возмущений скорости и плотности

$$\omega \rho' + i \rho (k_{\perp} u'_x + k_{\parallel} u'_y) = 0, \quad \mathbf{k}^2 \Phi' = 4\pi G \rho'. \quad (28)$$

Используя (22), (24)–(27) при преобразовании уравнения (18) для пульсаций скорости \mathbf{u}' , в результате получим:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{C} + \frac{\mathbf{k}^2 c_A^2}{\omega} \right) u'_x + \left[v_{\Sigma} (\mathbf{k}^2 + k_{\parallel}^2) - 2\Omega_{\parallel} \right] u'_y + \\ + i \frac{k_{\perp}}{\mathbf{k}^2} \Omega_{\Gamma}^2 \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) = 0,\end{aligned}\quad (29)$$

$$\begin{aligned}\left[2\Omega_{\parallel} - v_{\Sigma} (\mathbf{k}^2 + k_{\parallel}^2) \right] u'_x + \left(\mathbf{C} + \frac{k_{\parallel}^2 c_A^2}{\omega} \right) u'_y - \\ - 2(v_{\Sigma} k_{\perp} k_{\parallel} + \Omega_{\perp}) u'_z = 0,\end{aligned}\quad (30)$$

$$2(v_{\Sigma} k_{\perp} k_{\parallel} + \Omega_{\perp}) u'_y + \mathbf{C} u'_z + i \frac{k_{\parallel}}{\mathbf{k}^2} \Omega_{\Gamma}^2 \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) = 0. \quad (31)$$

Наконец, взяв дивергенцию от уравнения (19) и учитывая соотношения (25) и (28), получим еще одно соотношение для фурье-гармоник возмущений скорости и плотности

$$i \frac{c_A^2 k_{\perp} k^2}{\omega} u'_x + i \left[v_{\Sigma} k_{\perp} (k^2 + 3k_{\parallel}^2) + 2(k_{\parallel} \Omega_{\perp} - k_{\perp} \Omega_{\parallel}) \right] u'_y - (\omega C + \Omega_T^2) \left(\frac{\rho'}{\rho} \right) = 0. \quad (32)$$

При написании алгебраических уравнений (29)–(32) были использованы следующие величины:

$$\Omega_T^2 := \frac{\Omega_I^2 + \omega \Omega_J^2}{\omega + \mathbf{B}}, \quad C := \omega \left(1 + \frac{v_c}{\omega + v_c} x_d \right), \quad (33)$$

$$\Omega_I^2 := k^2 \mathbf{A} - 4\pi G \rho \mathbf{B}, \quad \Omega_J^2 := k^2 c_{(\text{gas,rad})}^2 - 4\pi G \rho,$$

$x_d := \rho_d / \rho$ – массовая концентрация пылевых частиц; $\mu_{\Sigma} / \rho \equiv v_{\Sigma}$ – полный коэффициент кинематической вязкости; $c_A := \sqrt{H^2 / 4\pi\rho}$ – альвеновская скорость распространения возмущения в плазме (скорость распространения магнитогидродинамической волны).

Система уравнений (29)–(32) для пульсаций скорости и плотности является исходной для дальнейшего анализа динамики малых плоских возмущений в модели вращающегося плазменного облака с чернотельной радиацией.

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ
В НЕИЗОЭНТРОПИЧЕСКОМ
ПЛАЗМЕННОМ ОБЛАКЕ

Вводя для удобства обозначения

$$R_1 := \left[v_{\Sigma} (k_{\perp}^2 + 2k_{\parallel}^2) - 2\Omega_{\parallel} \right], \quad (34)$$

$$R_2 := -2(v_{\Sigma} k_{\perp} k_{\parallel} + \Omega_{\perp}), \quad R_3 := R_1 k_{\perp} - R_2 k_{\parallel}$$

запишем систему алгебраических уравнений (29)–(32) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} C + \frac{c_A^2 k^2}{\omega} & R_1 & 0 & i \frac{k_{\parallel}}{k^2} \Omega_T^2 \\ -R_1 & C + \frac{c_A^2 k_{\perp}^2}{\omega} & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & C & i \frac{k_{\perp}}{k^2} \Omega_T^2 \\ i \frac{c_A^2 k_{\parallel} k^2}{\omega} & i R_3 & 0 & -(\omega C + \Omega_T^2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \\ \frac{\rho'}{\rho} \end{pmatrix} = 0. \quad (35)$$

Система однородных линейных уравнений (35) имеет решение, отличное от тривиального, только в том случае, когда определитель системы равен нулю. Опуская несложные выкладки, сразу выпишем основное дисперсионное уравнение, которое в общем случае неизоэнтропических возмущений имеет вид:

$$C \left\| \omega \left[C \left\{ \left(C + \frac{c_A^2 k^2}{\omega} \right) \left(C + \frac{c_A^2 k_{\parallel}^2}{\omega} \right) + R_2^2 + R_1^2 \right\} + R_2^2 \frac{c_A^2 k^2}{\omega} \right] + \Omega_T^2 \left\{ \left(C + \frac{c_A^2 k_{\parallel}^2}{\omega} \right)^2 + R_2^2 + R_1^2 - \frac{1}{k^2} R_3^2 \right\} \right\| = 0. \quad (36)$$

При решении этого дисперсионного уравнения, описывающего частоту малых колебаний ω диска как функцию волнового числа \mathbf{k} , можно получить целый ряд модифицированных критериев джинсовской гравитационной неустойчивости, отвечающих неизоэнтропическим возмущениям магнитогидродинамических параметров пылевой плазмы с чернотельной радиацией. Вид подобного рода критериев связан с учетом совместного влияния на эволюцию самогравитирующего намагниченного плазменного пылевого вещества таких особенностей моделирования подобной астрофизической системы, как пространственные ориентации магнитного поля и оси вращения, наличие (или отсутствие) диссипативных процессов вязкости и теплопроводности, а также лучистого переноса тепла. Заметим, что громоздкое дисперсионное соотношение (36) обобщает на случай присутствия взвешенных пылевых частиц и черного излучения целый ряд известных в литературе результатов (см., например, Bhatia,

1967; Aggarwal, Talwar, 1969; Sharma, 1974; Fridman, Polyachenko, 1984; Chhajlani, Vaghela, 1987; Vyas, Chhajlani, 1989; Borah, Sen, 2007; Dhiman, Dadwal, 2010; 2011; Prajapati, Chhajlani., 2011; Фридман, Хоперсков, 2011; Kaothekar, Chhajlani, 2012).

Получим теперь на основе дисперсионного соотношения (36) несколько модифицированных критериев джинсовской гравитационной неустойчивости для ряда специальных случаев, связанных с различными относительными ориентациями магнитного поля, оси вращения и вектора распространения волны возмущения.

Соотношение (36) состоит из двух сомножителей, приравнивание каждого из которых к нулю приводит к двум независимым режимам распространения волны возмущения. С равенством

$$C \equiv \omega \left(1 + \frac{v_c}{\omega + v_c} \frac{\rho_d}{\rho} \right) = 0 \quad (37)$$

соотносится дисперсионное алгебраическое уравнение второго порядка

$$\omega^2 + \omega v_c(1 + x_d) = 0. \quad (38)$$

Первый корень $\omega_1 = 0$ этого уравнения описывает минимально устойчивый режим распространения волны возмущения, а второй отрицательный корень

$$\omega_2 = -v_c(1 + x_d) \quad (39)$$

соответствует устойчивой затухающей волне возмущения, модифицируемой силой Стокса, действующей на пылевые частицы со стороны несущей жидкости. Он не зависит от самогравитации системы и эффектов, связанных с диссипативными процессами и магнитным полем.

Второй множитель уравнения (36) приводит к дисперсионному соотношению

$$\begin{aligned} \omega \left[\mathbf{C} \left\{ \left(\mathbf{C} + \frac{c_A^2 \mathbf{k}^2}{\omega} \right) \left(\mathbf{C} + \frac{c_A^2 k_{\parallel}^2}{\omega} \right) + R_2^2 + R_1^2 \right\} + R_2^2 \frac{c_A^2 \mathbf{k}^2}{\omega} \right] + \\ + \Omega_T^2 \left\{ \left(\mathbf{C} + \frac{c_A^2 k_{\parallel}^2}{\omega} \right)^2 + R_2^2 + R_1^2 - \frac{1}{k^2} R_3^2 \right\} = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

которое и будет исследовано в последующих разделах.

ПОПЕРЕЧНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ ВОЗМУЩЕНИЯ

В случае поперечного распространения мелкомасштабной волны возмущения, когда $k_{\perp} = k$, $k_{\parallel} = 0$, а параметры R_i равны

$$\begin{aligned} R_1 &= (v_{\Sigma} k^2 - 2\Omega_{\parallel}), \quad R_2 := -2\Omega_{\perp}, \\ R_3 &= k(v_{\Sigma} k^2 - 2\Omega_{\parallel}), \end{aligned} \quad (41)$$

дисперсионное соотношение (40) принимает более простой вид

$$\begin{aligned} \omega \left[\mathbf{C} \left\{ \left(\mathbf{C} + \frac{c_A^2 k^2}{\omega} \right) \mathbf{C} + 4\Omega_{\perp}^2 + (v_{\Sigma} k^2 - 2\Omega_{\parallel})^2 \right\} + 4\Omega_{\perp}^2 \frac{c_A^2 k^2}{\omega} \right] + \\ + \Omega_T^2 (\mathbf{C}^2 + 4\Omega_{\perp}^2) = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Проанализируем это соотношение для двух расположений оси вращения системы – вдоль и поперек магнитного поля.

Ось вращения параллельна магнитному полю, $\mathbf{\Omega} \parallel \mathbf{H}$

Подставляя $\Omega_{\perp} = 0$ в уравнение (42), в результате получим следующее алгебраическое уравнение

$$\mathbf{C} \left\{ \omega \left[\mathbf{C} \left(\mathbf{C} + \frac{c_A^2 k^2}{\omega} \right) + (v_{\Sigma} k^2 - 2\Omega)^2 \right] + \Omega_T^2 \mathbf{C} \right\} = 0, \quad (43)$$

которое, в свою очередь, приводит к двум альтернативным дисперсионным соотношениям. Первое соотношение

$$\mathbf{C} = \omega \left(1 + \frac{v_c}{\omega + v_c} x_d \right) = 0, \quad (44)$$

аналогично уже рассмотренному уравнению (38).

Второе соотношение приводит к алгебраическому уравнению 5-ой степени

$$\begin{aligned} \left(\omega + \frac{\omega v_c}{\omega + v_c} x_d \right) \times \\ \times \left[\omega \left(\omega + \frac{\omega v_c}{\omega + v_c} x_d + \frac{c_A^2 k^2}{\omega} \right) + \frac{\Omega_I^2 + \omega \Omega_J^2}{\omega + \mathbf{B}} \right] + \\ + \omega (v_{\Sigma} k^2 - 2\Omega)^2 = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Прежде чем проанализировать это уравнение, рассмотрим сначала его частный случай, когда в плазменном облаке отсутствует пылевая составляющая, $v_c = 0$. Тогда уравнение (45) принимает вид:

$$\begin{aligned} \omega^3 \left\{ \omega \left(\omega + \frac{c_A^2 k^2}{\omega} \right) + \right. \\ \left. + (v_{\Sigma} k^2 - 2\Omega)^2 + \frac{\Omega_I^2 + \omega \Omega_J^2}{\omega + \mathbf{B}} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Это уравнение описывает комбинированное влияние на джинсовскую неустойчивость намагниченной плазмы различных физических явлений,

связанных с вращением, с крупномасштабным магнитным полем, с черным излучением и с диссипативными процессами вязкости и лучевой теплопередачи. Заметим, что похожее по структуре дисперсионное соотношение (без влияния черного излучения) ранее изучалось в литературе (см., например, Aggarwal, Talwar, 1969; Bora, Talwar, 1993; Prajapati и др., 2010).

Решение $\omega = 0$ уравнения (46) описывает минимально устойчивый режим распространения волны возмущения. Другие корни уравнения (46) являются решениями кубического (по параметру стабильности ω) алгебраического уравнения:

$$\omega^3 + \mathbf{B}\omega^2 + \left[(2\Omega - v_\Sigma k^2)^2 + (c_{(\text{gas,rad})}^2 k^2 + c_A^2 k^2 - 4\pi G\rho) \right] \omega + k^2 \mathbf{A} + \left[(c_A^2 k^2 - 4\pi G\rho) + (2\Omega - v_\Sigma k^2)^2 \right] \mathbf{B} = 0. \quad (47)$$

Заметим, что свободный член этого уравнения зависит от всех параметров, включенных в описание системы в рассматриваемом здесь случае.

Пренебрегая далее для простоты анализа вязкими эффектами, ($v_\Sigma = 0$), запишем соотношение (47) в виде

$$\omega^3 + \mathbf{B}\omega^2 + \left[4\Omega^2 + c_A^2 k^2 + (c_{(\text{gas,rad})}^2 k^2 - 4\pi G\rho) \right] \omega + \mathbf{A} k^2 + \mathbf{B} \left[4\Omega^2 + (c_A^2 k^2 - 4\pi G\rho) \right] = 0. \quad (48)$$

Точные решения этого алгебраического кубического уравнения могут быть получены методом Кардана. Однако эти решения, к сожалению, не приводят к наглядным формулам для различных показателей роста. Вместе с тем, уравнение (48), будучи уравнением нечетной степени, должно иметь в случае справедливости неравенства

$$k^2 > \frac{4\pi G\rho}{c_{(\text{gas,rad})}^2} = 4\pi G\rho \left\{ c_{\text{gas}}'^2 \left[1 + \frac{(4 - 3\beta)^2 (\gamma - 1)}{\beta [\beta + 12(\gamma - 1)(1 - \beta)]} \right] \right\}^{-1},$$

по крайней мере один положительный действительный корень, когда свободный член меньше нуля.⁵ Это обстоятельство позволяет записать условие существования положительного действительного корня уравнения (48), соответствующее

⁵ Напомним, что для неустойчивых волн возмущения частота $\omega > 0$, тогда как устойчивость соответствует условию $\omega < 0$. Эти два класса разделяет случай нейтральной устойчивости $\omega = 0$, что соответствует модам с критической длиной волны возмущения. Критическая длина волны возмущения $\lambda_{\text{cr}} = 2\pi/k_{\text{cr}}$ (для идеального газа: $k_{\text{cr}}^2 = \omega_{\text{gr}}^2/c_g^2$, $\omega_{\text{cr}}^2 = 4\pi G\rho$) является размером мельчайших “капель” рассматриваемой среды, которые могут удерживаться вместе собственным гравитационным притяжением.

ющего неустойчивости самогравитирующей системы, в виде неравенства:

$$k^2 \mathbf{A} + \mathbf{B} \left[4\Omega^2 + (c_A^2 k^2 - 4\pi G\rho) \right] \leq 0. \quad (49)$$

Отсюда, при использовании формулы $\mathbf{A}/\mathbf{B} = \beta P/\rho = c_{\text{gas}}'^2$, вытекает модифицированный критерий гравитационной неустойчивости Джинса

$$\frac{4\pi G\rho}{c_{(\text{gas,rad})}^2} < k^2 \leq 4 \frac{\pi G\rho - \Omega^2}{c_{\text{gas}}'^2 + c_A^2} = k_J^2 \frac{1 - \Omega^2/\pi G\rho}{\gamma^{-1} + c_A^2/c_{\text{gas}}'^2}. \quad (50)$$

Здесь $c_{\text{gas}}' = \sqrt{(\mathcal{R}/\mu)T} = \sqrt{P_{\text{gas}}/\rho}$ – изотермическая скорость звука плазменной составляющей астрофизической системы; k_J – классическое волновое число Джинса, $k_J^2 := 4\pi G\rho/c_{\text{gas}}'^2$; $c_{\text{gas}} = \sqrt{\gamma(\mathcal{R}/\mu)T} = \sqrt{\gamma P_{\text{gas}}/\rho} = \sqrt{\gamma(\beta P/\rho)}$ – адиабатическая скорость звука в идеальной плазме.

Из неравенства (50), представляющего собой модификацию критерия Джинса, можно сделать вывод, что в случае поперечного распространения волны возмущения, направленной перпендикулярно к оси вращения плазменного облака ($\mathbf{k} \perp \Omega$), и при условии $v_\Sigma = 0$, вращение и магнитное поле стабилизируют гравитационную неустойчивость; при этом лучистая теплопроводность влияет на стандартный критерий Джинса в излучающей плазменной среде, приводя к замене адиабатической скорости на изотермическую.

Покажем теперь, что если выполняется неравенство

$$k^2 \mathbf{A} + \mathbf{B} \left[4\Omega^2 + (c_A^2 k^2 - 4\pi G\rho) \right] > 0, \quad (51)$$

т.е. когда все коэффициенты уравнения (48) положительны, то режим распространения волны возмущения будет устойчивым. Для этого должен выполняться критерий устойчивости Рауса–Гурвица (см. Гантмахер, 2010), согласно которому все главные диагональные миноры определителя Гурвица также должны быть больше нуля. Миноры определителя Гурвица для уравнения (48), имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \mathbf{B} > 0, \\ \Delta_2 &= \mathbf{B} \left[4\Omega^2 + (c_A^2 k^2 - 4\pi G\rho) + c_{(\text{gas,rad})}^2 k^2 \right] - \mathbf{A} k^2 - \mathbf{B} \left[4\Omega^2 + (c_A^2 k^2 - 4\pi G\rho) \right] = \\ &= (c_{(\text{gas,rad})}^2 \mathbf{B} - \mathbf{A}) k^2 = \mathbf{B} (c_{(\text{gas,rad})}^2 k^2 - c_{\text{gas}}'^2 k^2) = \\ &= \left[c_{\text{gas}}'^2 k^2 \mathbf{B} \frac{(4 - 3\beta)^2 (\gamma - 1)}{\beta [\beta + 12(\gamma - 1)(1 - \beta)]} \right] > 0, \\ \Delta_3 &= \left[\Delta_2 \left\{ \mathbf{A} k^2 + \mathbf{B} \left[4\Omega^2 + (c_A^2 k^2 - 4\pi G\rho) \right] \right\} \right] > 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что критерий (50) является необходимым и достаточным условием неустойчивости системы по Гурвицу.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &:= \llbracket 3\chi_d v_c + \mathbf{B} \rrbracket, \\ \mathcal{L}_2 &:= \llbracket \chi_d v_c \mathbf{B} + (c_A^2 k^2 + \Omega_J^2) v_c^2 + 2\chi_d (\chi_d v_c^2 + \mathbf{B}) + \chi_d^2 v_c^2 + 4\Omega^2 + c_A^4 k^4 \rrbracket, \\ \mathcal{L}_3 &:= \llbracket c_A^2 k^2 (v_c + \mathbf{B}) + v_c^2 (\Omega_I^2 \mathbf{B} + v_c \Omega_J^2) + 2v_c^2 \chi_d^2 \mathbf{B} + v_c^2 (c_A^2 k^2 + \Omega_J^2) + \\ &\quad + (\chi_d v_c + \mathbf{B}) (\chi_d^2 v_c + 4\Omega^2) + 8v_c \Omega^2 + v_\Sigma^2 k^4 [(2 + \chi_d) v_c + \mathbf{B}] \rrbracket, \\ \mathcal{L}_4 &:= \llbracket (\Omega_I^2 + c_A^2 k^2 + \chi_d v_c^2) v_c \mathbf{B} + 2\chi_d v_c [c_A^2 k^2 (v_c + \mathbf{B}) + \Omega_J^2 + \Omega_I^2 \mathbf{B}] + \\ &\quad + (\Omega_J^2 + c_A^2 k^2) (\chi_d^2 v_c^2 + 4\Omega^2) + 8\Omega^2 v_c (\chi_d v_c + \mathbf{B}) + \\ &\quad + 4\Omega^2 v_c^2 + v_\Sigma^2 k^4 v_c [v_c + 2\mathbf{B} + \chi_d (2v_c + \mathbf{B})] \rrbracket, \\ \mathcal{L}_5 &:= \llbracket [2(\Omega_I^2 + c_A^2 k^2) \mathbf{B} + v_c \chi_d] \chi_d v_c^2 + \\ &\quad + 4\Omega^2 (c_A^2 k^2 v_c + \Omega_I^2 \mathbf{B} + \Omega_J^2) + 2v_c 4\Omega^2 [\chi_d v_c \mathbf{B} + (\Omega_J^2 + c_A^2 k^2)] + \\ &\quad + 4\Omega^2 v_c^2 [\chi_d v_c + \mathbf{B}] + v_\Sigma^2 k^4 v_c^2 [v_c \mathbf{B} + \chi_d (v_c + 2\mathbf{B})] \rrbracket, \\ \mathcal{L}_6 &:= \llbracket (\chi_d + \Omega_I^2) (\chi_d^2 v_c^3 + 4\Omega^2) \mathbf{B} + 4v_c \Omega^2 + [c_A^2 k^2 (1 + v_c) + v_c \Omega_J^2 + \Omega_I^2 \mathbf{B}] + \\ &\quad + 4\Omega^2 v_c^3 (\chi_d \mathbf{B} + c_A^2 k^2 + \Omega_J^2) + \chi_d v_c^3 \mathbf{B} \rrbracket, \\ \mathcal{L}_7 &:= \llbracket 4\Omega^2 (\Omega_I^2 + c_A^2 k^2) v_c \mathbf{B} + 4\Omega^2 c_A^2 k^2 [v_c (1 + \Omega_J^2) + \mathbf{B} (1 + \Omega_I^2)] v_c^2 \rrbracket, \\ \mathcal{L}_8 &:= \llbracket 4\Omega^2 (\Omega_I^2 + c_A^2 k^2) \mathbf{B} \rrbracket. \end{aligned}$$

Если $\mathcal{L}_8 < 0$, то условие неустойчивости определяется свободным членом уравнения (58). При отрицательном свободном члене уравнение (58) будет допускать по крайней мере один положительный действительный корень (или комплексный корень, действительная часть которого положительна). Следовательно, хотя бы один неустойчивый режим возможен при условии

$$k^2 \mathbf{A} - 4\pi G \rho \mathbf{B} + c_A^2 k^2 < 0, \quad (59)$$

которое, с учетом формул (55) и (56), приводит к следующему модифицированному критерию неустойчивости Джинса

$$k^2 < k_J^2 \gamma \left(1 - \frac{c_A^2}{4\pi G \lambda_\Sigma} C_{V, \text{gas}} \frac{(\gamma - 1)(4 - 3\beta)^2}{\beta(\Gamma_1 - \beta)} \right). \quad (60)$$

Таким образом, наличие взвешенных пылевых частиц не оказывает влияния на критерий неустойчивости Джинса, который в этом случае зависит от магнитного поля и наличия чернотельного излучения и коэффициента лучистой теплопроводности.

Когда одновременно справедливы неравенства $\Omega_I^2 > 0$ и $\Omega_J^2 > 0$, все коэффициенты уравнения (58) будут положительными. В этом случае выполняется необходимое условие устойчивости системы, но не достаточное. Следовательно, можно сделать вывод, что система, представленная уравнением (58), дает устойчивые режимы распространения волны возмущения только с учетом указанных необходимых условий.

Заметим, что если пренебречь наличием пыли ($v_c = 0$) и эффектами вязкости ($v_\Sigma = 0$) в уравнении (57), то оно приобретает более простой вид

$$\begin{aligned} \omega^3 + \mathbf{B} \omega^2 + [c_{\text{gas, rad}}^2 k^2 + (c_A^2 k^2 - 4\pi G \rho)] \omega + \\ + (k^2 c_A^2 - 4\pi G \rho) \mathbf{B} + k^2 \mathbf{A} = 0, \end{aligned} \quad (61)$$

из которого можно получить следующий модифицированный критерий неустойчивости

$$(\mathbf{A} k^2 + c_A^2 k^2 \mathbf{B}) - 4\pi G \rho \mathbf{B} \leq 0, \quad (62)$$

или

$$k^2 \leq \frac{4\pi G \rho}{\mathbf{A}/\mathbf{B} + c_A^2} = \frac{4\pi G \rho}{c_{\text{gas}}'^2 + c_A^2} = k_J^2 \gamma \frac{1}{1 + c_A^2/c_{\text{gas}}'^2}, \quad (63)$$

справедливый для поперечной волны возмущений, направленной вдоль оси вращения системы. Таким образом, в отличие от магнитного поля и чернотельного излучения, вращение системы не оказывает влияния на волну возмущений, распространяющуюся вдоль оси вращения.

ПРОДОЛЬНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ ВОЗМУЩЕНИЯ

Если $k_{\parallel} = k$, $k_{\perp} = 0$, то коэффициенты R_i равны $R_1 = 2(v_\Sigma k_{\parallel}^2 - \Omega_{\parallel})$, $R_2 = -2\Omega_{\perp}$ и $R_3 = -R_2 k_{\parallel} = 2\Omega_{\perp} k_{\parallel}$; в этом случае дисперсионное соотношение (40) принимает вид

$$\omega \left[\mathbf{C} \left\{ \left(\mathbf{C} + \frac{c_A^2 k^2}{\omega} \right)^2 + 4\Omega_{\perp}^2 + 4(v_{\Sigma} k^2 - \Omega_{\parallel})^2 \right\} + 4\Omega_{\perp}^2 \frac{c_A^2 k^2}{\omega} \right] + \Omega_T^2 \left\{ \left(\mathbf{C} + \frac{c_A^2 k^2}{\omega} \right)^2 + 4(v_{\Sigma} k^2 - \Omega_{\parallel})^2 \right\} = 0. \quad (64)$$

Проанализируем это соотношение для двух расположений оси вращения системы – вдоль и поперек магнитного поля.

Ось вращения параллельна к магнитному полю, $\Omega \parallel \mathbf{H}$

Подставляя в (64) величины $\Omega_{\parallel} = \Omega$ и $\Omega_{\perp} = 0$, получим следующее уравнение

$$\left\{ \left(\mathbf{C} + \frac{c_A^2 k^2}{\omega} \right)^2 + 4(v_{\Sigma} k^2 - \Omega)^2 \right\} \times \left(\mathbf{C}\omega + \frac{\Omega_{\perp}^2 + \omega\Omega_J^2}{\omega + \mathbf{B}} \right) = 0, \quad (65)$$

которое, в свою очередь, распадается на два дисперсионные соотношения

$$\left(1 + \frac{v_c}{\omega + v_c} x_d \right) \omega^2 + \frac{\Omega_{\perp}^2 + \omega\Omega_J^2}{\omega + \mathbf{B}} = 0 \quad (66)$$

и

$$\left(\omega + \frac{\omega v_c}{\omega + v_c} x_d + \frac{c_A^2 k^2}{\omega} \right)^2 + 4(v_{\Sigma} k^2 - \Omega)^2 = 0. \quad (67)$$

Дисперсионное соотношение (66) при разложении сводится к уравнению

$$\omega^4 + (v_c \chi_d + \mathbf{B}) \omega^3 + [v_c \chi_d \mathbf{B} + \Omega_J^2] \omega^2 + (v_c \Omega_J^2 + \Omega_{\perp}^2) \omega + v_c \Omega_{\perp}^2 \mathbf{B} = 0. \quad (68)$$

Если справедливо неравенство $\Omega_J^2 > 0$, а величина Ω_{\perp}^2 отрицательна, то уравнение (68) допуска-

ет по крайней мере один положительный действительный корень (или комплексный корень, действительная часть которого положительна), и, таким образом, условие неустойчивости принимает вид $k^2 \mathbf{A} - 4\pi G \rho \mathbf{B} < 0$. Отсюда следует модифицированный критерий Джинса

$$k^2 < \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}} = \frac{4\pi G \rho}{c_{\text{gas}}'^2} = k_J^2 \frac{c_{\text{gas}}}{c_{\text{gas}}'^2} = \gamma k_J^2. \quad (69)$$

Из этого неравенства можно сделать следующий вывод: учет черного излучения приводит к изменению скорости в классическом критерии Джинса, когда адиабатическая скорость звука заменяется на изотермическую. Итак, при $\Omega \parallel \mathbf{H}$ и $(\mathbf{k} \parallel \mathbf{H})$ условием неустойчивости намагниченной пылевой плазмы является модифицированный критерий Джинса, который не зависит ни от вращения системы, ни от эффектов, связанных с присутствием взвешенных пылевых частиц.

В случае, когда справедливо неравенство $\Omega_J^2 > 0$, все коэффициенты уравнения (68) будут положительными. Это означает, что многочлен, заданный уравнением (68), будет иметь все корни с отрицательными вещественными частями (или комплексные корни с отрицательными действительными частями) тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры матрицы Гурвица будут также положительными. Для того чтобы убедиться в выполнении критерия Рауса–Гурвица выпишем все главные миноры для многочлена, заданного уравнением (68):

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= [v_c \chi_d + \mathbf{B}] > 0, \\ \Delta_2 &= \left[\left[v_c + \mathbf{B} + x_d(1 + v_c + \chi_d v_c) \right] \mathbf{B} + v_c^{-1}(\gamma - 1) k^2 \mathbf{A} \right] > 0, \\ \Delta_3 &= \left[(\gamma - 1) k^2 (v_c \chi_d + v_c^{-1}) \mathbf{A} + \right. \\ &\quad \left. + (\Omega_J^2 + v_c^{-1} \Omega_{\perp}^2 \mathbf{B}) (x_d \Omega_J^2 + v_c^{-1}(\gamma - 1) k^2 \mathbf{A}) + \right. \\ &\quad \left. + x_d (v_c x_d + \mathbf{B}) \Omega_J^2 + x_d (v_c x_d + 2\mathbf{B}) \Omega_{\perp}^2 \mathbf{B} \right] > 0, \\ \Delta_4 &= [\Delta_3 \Omega_{\perp}^2 \mathbf{B}] > 0. \end{aligned}$$

Поскольку все миноры положительны, то критерий Рауса–Гурвица удовлетворяется. Это озна-

чает, что система, представленная уравнением (68), будет всегда устойчивой.

Обратимся теперь к уравнению (67), которое при разложении принимает вид:

$$\begin{aligned} \omega^6 + 2v_c \chi_d \omega^5 + \left[v_c^2 \chi_d + 2c_A^2 k^2 + (\Omega - v_\Sigma k^2)^2 \right] \omega^4 + \\ + 2v_c \left[c_A^2 k^2 (1 + \chi_d) + 4(\Omega - v_\Sigma k^2)^2 v_c \right] \omega^3 + \\ + v_c \left[c_A^2 k^2 (1 + 2v_c \chi_d) + 4v_c (\Omega - v_\Sigma k^2)^2 \right] \omega^2 + \\ + (2v_c c_A^4 k^4) \omega + v_c^2 c_A^4 k^4 = 0. \end{aligned} \quad (70)$$

Это уравнение не допускает действительных положительных корней или комплексных корней с положительной действительной частью, поскольку все его коэффициенты положительные. Следовательно, можно сказать, что система может быть только устойчивой.

Ось вращения перпендикулярна к магнитному полю, $\Omega \perp \mathbf{H}$

Подставляя в уравнение (64) величины $\Omega_{\parallel} = 0$ и $\Omega_{\perp} = \Omega$, получим дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} \left\{ \left(\mathbf{C} + \frac{k^2 c_A^2}{\omega} \right)^2 + 4v_\Sigma^2 k^4 \right\} (\omega \mathbf{C} + \Omega_T^2) + \\ + 4\Omega^2 \omega \left(\mathbf{C} + \frac{k^2 c_A^2}{\omega} \right) = 0, \end{aligned} \quad (71)$$

которое при разложении сводится к алгебраическому уравнению 10-ой степени по параметру ω (см. Колесниченко, 2022). Все коэффициенты этого уравнения положительные, а свободный член равен $\mathcal{Q}_{10} = (c_A^2 k^2)^2 \mathbf{B} v_c^3 \Omega_1^2$. Следовательно, это уравнение может описывать неустойчивый режим распространения волны возмущения только тогда, когда $\Omega_1^2 < 0$, что приводит к модифицированному критерию неустойчивости Джинса, аналогичному условию (69).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные этапы эволюции экзопланетных дисков в настоящее время все более проясняются и уточняются. Однако проблема построения непротиворечивой картины образования самих звезд и околозвездных газопылевых дисков до сих пор полностью не решена. Большинство обнаруженных на сегодня экзопланетных дисков вокруг солнечноподобных звезд сильно отличаются от протопланетного диска Солнца. По этой причине современная теория происхождения Солнечной системы является лишь одной из многих, и для моделирования эволюции любой другой протозвездной туманности подходящая теория может оказаться более сложной. Об этом, в частности,

свидетельствует коллекция обнаруженных во Вселенной экзопланет, которые весьма разнообразны. В связи со сказанным возникла, по мнению автора, необходимость в разработке нестандартного подхода, объясняющего (до известной степени) многообразие открытых экзопланетных дисков вокруг звезд.

В данной работе в рамках проблемы моделирования эволюции околозвездного диска обсуждается влияние чернотельного излучения на неустойчивость Джинса для намагниченной вращающейся пылевой плазмы с учетом влияния на критическую длину волны возмущения таких диссипативных процессов как магнитная вязкость и лучистая теплопроводность. Принимается, что ось вращения системы параллельна либо перпендикулярна к магнитному полю как для продольного, так и для поперечного режима распространения волны возмущения. На основе выведенного полного дисперсионного соотношения получены модифицированные критерии джинсовой неустойчивости для ряда специальных случаев, связанных с различными ориентациями ориентациями магнитного поля, оси вращения и вектора распространения возмущающей волны. Устойчивость среды обсуждается с помощью использования критерия Рауса–Гурвица.

Важно отметить, что эффект от совместного влияния черного излучения, магнитного поля, вращения системы, вязкости и теплопередачи на неустойчивость Джинса самогравитирующей намагниченной пылевой плазмы в литературе все еще недостаточно изучен. С учетом значимости подобного рассмотрения в астрофизическом контексте, в работе было проведено исследование неустойчивости самогравитирующего намагниченного плазменного пылевого облака при неизоэнтропичности распространения волны возмущения. Было показано, что во всех случаях критерий неустойчивости Джинса остается справедливым, но с небольшими модификациями, вызванными включением различных параметров. Вместе с тем, полученные в работе модифицированные критерии нестабильности Джинса существенно отличаются от некоторых известных в литературе критериев. В частности, было показано, что чернотельное излучение за счет лучевой теплопроводности подавляет флуктуации температуры в волне возмущения (вследствие чего волна затухает), сделав режим ее распространения изотермическим вместо адиабатического. Показано также, что для продольного распространения волны возмущения, в случае, когда ось вращения плазменного облака перпендикулярна к магнитному полю, эффекты, связанные с вращением системы и наличием взвешенных пылевых частиц, не влияют на критерий Джинса в присутствии магнитного поля. Для поперечного режима распространения волны возмущения, когда ось

вращения параллельна магнитному полю, было установлено, что вращение системы и магнитное поле стабилизируют гравитационную неустойчивость, причем стабилизирующий эффект вращения сравнительно более эффективен.

Результаты проведенного исследования позволяют, в частности, лучше понять проблемы, связанные с эволюцией околосолнечных экзопланетных дисков в результате потери ими устойчивости.

Работа выполнена в рамках Госзадания, а также частично поддержана грантом Минобрнауки № 075-15-2020-780 от 07.10.2020 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 463 с.
- де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
- Колесниченко А.В.* Вывод в рамках неэкстенсивной кинетики критерия гравитационной неустойчивости Джинса для допланетного вращающегося облака с учетом радиации и магнитного поля // *Mathematica Montisnigri*. 2020. V. XLVII. P. 176–200.
- Колесниченко А.В.* Роль черного излучения в модификации критериев неустойчивости Джинса для экзопланетного пылевого плазменного диска при учете магнитной вязкости и лучевого теплообмена // *Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2022. № 3. 40 с.
- Михайловский А.Б.* Теория плазменных неустойчивостей. Т. 2. Неустойчивости неоднородной плазмы. М.: Атомиздат, 1977. 360 с.
- Тассуль Ж.-Л.* Теория вращающихся звезд. М.: Мир, 1982. 472 с.
- Шапиро С., Тьюколски С.* Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Физика компактных объектов (в двух частях). М.: Мир, 1985. 635 с.
- Фридман А.М., Хоперсков А.В.* Физика галактических дисков. М.: Физматлит, 2011. 640 с.
- Хоперсков А.В., Храпов С.С.* Неустойчивость тепловой, вязкой и акустических мод в тонких аккреционных дисках // *Астрон. журн.* 1999. Т. 76. № 4. С. 256–269.
- Aggarwal M., Talwar S.P.* Magnetothermal instability in a rotating gravitating fluid // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 1969. V. 146. P. 235–242.
- Argal S., Tiwari A., Sharma P.K.* Jeans instability of a rotating self-gravitating viscoelastic fluid // *Europhys. Lett.* 2014. V. 108. id. 35003.
- Bhatia P.K.* Gravitational instability of a rotating anisotropic plasma // *Phys. Fluids*. 1967. V. 10. № 8. P. 1652–1653.
- Bora M.P., Talwar S.P.* Magnetothermal instability with generalized Ohm's law // *Phys. Fluids*. B. 1993. V. 5. P. 950–955.
- Bora M.P., Nayyar N.K.* Gravitational instability of a heat-conducting plasma // *Astrophys. and Space Sci.* 1991. V. 179. P. 313–320.
- Borah A.C., Sen A.K.* Gravitational instability of partially ionized molecular clouds // *J. Plasma Phys.* 2007. V. 73. № 6. P. 831–838.
- Chandrasekhar S.* Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 588 p.
- Chhajlani R.K., Vaghela D.S.* Gravitational stability of finitely conducting two-component plasma through porous medium // *Astrophys. and Space Sci.* 1987. V. 139. P. 337–352.
- Cogley A.C., Vincent W.G.* Application to radiative acoustics of Whitham's method for the analysis of non-equilibrium wave phenomena // *J. Fluid Mech.* 1969. V. 39. № 4. P. 641–866.
- Cox J.P.* Theory of stellar pulsation. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1979. 378 p.
- Cox J.P., Giuli R.T.* Principles of Stellar Structure. New York: Gordon and Breach, 1968. 568 p.
- Dhiman J.S., Dadwal R.* On the gravitational instability of a medium in non-uniform rotation and magnetic field // *Astrophys. and Space Sci.* 2010. V. 325. № 2. P. 195–200.
- Dhiman J.S., Dadwal R.* The gravitational instability of a non-uniformly rotating heat conducting medium in the presence of non-uniform magnetic field // *Astrophys. and Space Sci.* 2011. V. 332. № 2. P. 373–378.
- Dhiman J.S., Dadwal R.* On the Jeans criterion of a stratified heat conducting gaseous medium in the presence of non-uniform rotation and magnetic field // *J. Astrophys. and Astron. (Indian Acad. of Sci.)*. 2012. V. 33. P. 363–373.
- Dolai B., Prajapati R.P.* The rotating Rayleigh-Taylor instability in a strongly coupled dusty plasma // *Physics of Plasmas*.
- Fridman A.M., Polyachenko V.L.* Physics of gravitating system. N.Y.: Springer-Verlag, 1984. V. 1. 468 p. V. 2. 358 p.
- Jacobs G., Shukla P.K.* Stability of molecular clouds in partially ionized self-gravitating space plasmas // *J. Plasma Phys.* 2005. V. 71. № 04. P. 487–493.
- Jain S., Sharma P., Chhajlani R.K.* Jeans instability of magnetized quantum plasma: effect of viscosity, rotation and finite Larmor radius corrections // *AIP Conf. Proc.* 2015. V. 1670. id. 030013.
- Jeans J.H.* The stability of spherical nebulae // *Philosoph. Transact. Roy. Soc.* 1902. V. 199. P. 1–53.
- Joshi H., Pensia R.K.* Effect of rotation on Jeans instability of magnetized radiative quantum plasma // *Physics of Plasmas*. 2017. V. 24. № 3. id. 032113.
- Kaneko N., Morita K., Satoh T., Hayasaki K.* Small-amplitude disturbances in a radiating and scattering grey medium II. Solutions of given real wave number k // *Astrophys. and Space Sci.* 2005. V. 299. P. 263–306.
- Kaneko N., Morita K.* Small-amplitude disturbances in a radiating and scattering grey medium III. Gravitational effects on the solutions of given real wave number k // *Astrophys. and Space Sci.* 2006. V. 305. P. 349–376.
- Kaothekar S.* Star formation through thermal instability of radiative plasma with finite electron inertia and finite Larmor radius corrections // *AIP Advances*. 2016. V. 6. id. 085020 (1–14).
- Kaothekar S., Chhajlani R.K.* Effect of radiative heat-loss function and finite Larmor radius corrections on Jeans

- instability of viscous thermally conducting self-gravitating astrophysical plasma // *ISRN Astron. and Astrophys.* 2012. V. 2012. id. 420938 (1–14).
- Kolesnichenko A.V.* Jeans instability of a protoplanetary gas cloud with radiation in nonextensive Tsallis kinetics // *Sol. Syst. Res.* 2020. V. 54. № 2. P. 137–149.
- Kolesnichenko A.V.* Jeans instability of a protoplanetary circular disk taking into account the magnetic field and radiation in nonextensive Tsallis kinetics // *Sol. Syst. Res.* 2021. V. 55. № 2. P. 132–149.
- Kumar A., Sutar D.L., Pensia R.K., Sharma S.* Effect of fine dust particles and finite electron inertia of rotating magnetized plasma // *AIP Conf. Proc.* 2018. V. 1953. № 1. id. 060036 (1–4).
- Kumar A., Sutar D.L., Pensia R.K.* Jeans instability of a monatomic gas in the presence of thermal radiation // *J. Physics: Conf. Ser.* 2017. V. 836. id. 012012 (1–3).
- Lightman A.P.* Time-dependent accretion disks around compact objects. I. Theory and basic equations // *Astrophys. J.* 1974. V. 194. id. 419427.
- Lightman A.P., Eardley D.M.* Black holes in binary systems: instability of disk accretion // *Astrophys. J.* 1974. V. 187. P. 1–35.
- Pensia R.K., Sutar D.L., Sharma S.* Analysis of Jeans instability of optically thick quantum plasma under the effect of modified Ohm's law // *AIP Conf. Proc.* 2018. V. 1953. № 1. id. 060044 (1–4).
- Prajapati R.P., Chhajlani R.K.* Gravitational instability of dusty plasma with radiative process // *AIP Conf. Proc.* 2011. V. 1397. P. 267–268.
- Prajapati R.P., Pensia R.K., Kothekar S., Chhajlani R.K.* Self-gravitational instability of rotating viscous Hall plasma with arbitrary radiative heat-loss functions and electron inertia // *Astrophys. and Space Sci.* 2010. V. 327. P. 139–154.
- Prajapati R.P., Sharma P.K., Sanghvi R.K., Chhajlani R.K.* Jeans instability of self-gravitating magnetized strongly coupled plasma // *J. Physics: Conf. Ser.* 2012. V. 365. id. 012040 (1–4).
- Prajapati R.P., Bhakta S.* Influence of dust charge fluctuation and polarization force on radiative condensation instability of magnetized gravitating dusty plasma // *Phys. Lett. A.* 2015. V. 379. № 42. P. 2723–2729.
- Roberts K.V., Taylor J.B.* Magnetohydrodynamic equations for finite Larmor radius // *Phys. Rev. Lett.* 1962. V. 8. № 5. P. 197–198.
- Shaikh S., Khan A., Bhatia P.K.* Jeans' gravitational instability of a thermally conducting plasma // *Phys. Lett. A.* 2008. V. 372. № 9. P. 1451–1457.
- Shaikh S., Khan A., Bhatia P.K.* Stability of thermally conducting plasma in a variable magnetic field // *Astrophys. and Space Sci.* 2007. V. 312. P. 35–40.
- Shakura N.I., Sunyaev R.A.* A theory of the instability of disk accretion onto black holes and the variability of binary X-ray sources, galactic nuclei and quasars // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 1976. V. 175. P. 613–632.
- Sharma R.C.* Gravitational instability of a rotating plasma // *Astrophys. and Space Sci.* 1974. V. 29. P. L1–L4.
- Sharma R.C., Patidar A.* Effect of ion radiative cooling on Jeans instability of partially ionized dusty plasma with dust charge fluctuation // *Physics of Plasmas.* 2017. V. 24. id. 013705 (1–13).
- Sharma R.C., Singh B.* Gravitational instability of a rotating and partially-ionized plasma in the presence of variable magnetic field // *Astrophys. and Space Sci.* 1988. V. 143. P. 233–239.
- Tsintsadze N.L., Chaudhary R., Shah H.A., Murtaza G.* Jeans instability in a magneto-radiative dusty plasma // *J. Plasma Physics.* 2008. V. 74. № 06. P. 847–853.
- Vaghela D.S., Shrivastava H.S.P.* Magnetogravitational instability of a rotating homogeneous gas cloud with radiation // *Czechoslovak J. Physics.* 1994. V. 44. № 10. P. 905–911.
- Vranješ J.* Gravitational instability of a quasi-homogeneous plasma cloud with radiation // *Astrophys. and Space Sci.* 1990. V. 173. № 2. P. 293–298.
- Vranješ J., Čadež V.* Gravitational instability of a homogeneous gas cloud with radiation // *Astrophys. and Space Sci.* 1990. V. 164. № 2. P. 329–331.
- Vyas M.K., Chhajlani R.K.* On the gravitational instability of an ionized magnetized rotating plasma flowing through a porous medium with other transport processes and the suspended particles // *Contrib. Plasma Phys.* 1989. V. 29. № 2. P. 135–151.