

УДК 52-17::521.182::523.44

## ПРОГРЕСС И ПРОБЛЕМЫ В МЕТОДАХ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ АСТЕРОИДОВ, СБЛИЖАЮЩИХСЯ С ЗЕМЛЕЙ

© 2023 г. Т. Ю. Галушина<sup>а</sup> \*, В. А. Авдюшев<sup>а</sup>, П. А. Левкина<sup>б</sup>

<sup>а</sup>Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>б</sup>Институт астрономии РАН, Москва, Россия

\*e-mail: tatyana.galushina@mail.tsu.ru

Поступила в редакцию 01.03.2023 г.

После доработки 20.04.2023 г.

Принята к публикации 02.05.2023 г.

Прогнозирование движения астероидов, сближающихся с Землей, (АСЗ) представляет собой комплексную задачу, требующую использования сложной техники, различных методик и больших вычислительных затрат. В последние десятилетия достигнут существенный прогресс в данной области, однако многие проблемы еще ожидают своего решения. В данной работе рассмотрены основные методы прогнозирования движения АСЗ, используемые на разных этапах, начиная с проведения наблюдений и заканчивая изучением таких особенностей движения, как тесные сближения и столкновения с планетами, орбитальные и вековые резонансы, хаотичность и предсказуемость движения. Статья основана на докладе, сделанном на научно-практической конференции с международным участием “Околоземная астрономия–2022” (18–21 апреля 2022 г., Москва).

**Ключевые слова:** астероиды, сближающиеся с Землей, орбитальная эволюция, численное моделирование, позиционные наблюдения, вековые резонансы, орбитальные резонансы, динамический хаос

DOI: 10.31857/S0320930X2305002X, EDN: OKIANI

### ВВЕДЕНИЕ

Прогнозирование движения астероидов, сближающихся с Землей, (АСЗ) является важной задачей как с практической, так и с теоретической точек зрения. Точный прогноз движения необходим для предсказания сближений и столкновений астероидов с Землей. С другой стороны, изучение динамики популяции АСЗ помогает лучше понять эволюцию всей Солнечной системы.

В последние десятилетия развитие вычислительной техники и численных методов способствовало значительному прогрессу в решении рассматриваемой задачи. Не претендуя на полноту охвата, в данном обзоре мы рассмотрим основные методы, используемые на разных этапах исследования, обсудим их достоинства и встречающиеся проблемы.

В численном моделировании движения астероидов можно выделить следующие этапы:

1. Получение и обработка позиционных наблюдений;
2. Стохастическое моделирование начальной орбитальной неопределенности;
3. Отображение начальной орбитальной неопределенности на заданный момент времени;

4. Исследование различных особенностей движения:

- орбитальные и вековые резонансы,
- сближения и возможные столкновения с планетами,
- хаотичность.

Дальнейшие разделы данной работы посвящены перечисленным этапам, различным погрешностям, возникающим на этих этапах, проблемам и путям их решения. Следует отметить, что в этом веке самым популярным объектом орбитальных исследований является астероид (99942) Apophis (см., например, Соколов и др., 2021; Ивашкин и др., 2020; Włodarczyk, 2017; Vokrouhlický и др., 2015; Thuillot и др., 2015; Быкова, Галушина, 2010; Reddy и др., 2022; и т.д.), что связано с его тесным прохождением около Земли в 2029 г., которое приведет к резкому изменению орбиты и возможным столкновениям в последующие десятилетия. По этой причине часть описываемых методов будет проиллюстрирована на примере данного космического тела.

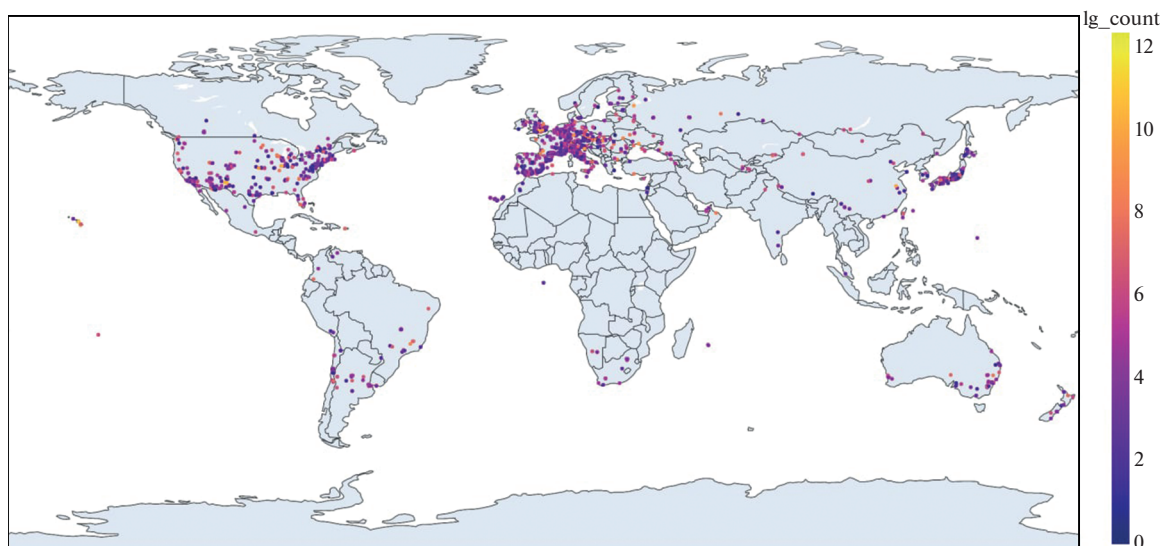


Рис. 1. Расположение обсерваторий, наблюдающих АСЗ.

### СОВРЕМЕННЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ АСЗ

При прогнозировании движения астероидов наибольшую значимость представляют астрометрические наблюдения, причем для точного определения орбиты они должны покрывать значительную дугу, по возможности, сопоставимую с орбитальным периодом. Все увеличивающееся число известных АСЗ требует все большего количества наблюдательных станций, более-менее равномерно покрывающих земной шар. На рис. 1 представлено расположение обсерваторий на Земле, цвет точек соответствует логарифму числа наблюдений АСЗ, представленных на сайте Центра малых планет (<https://minorplanetcenter.net>). Из рисунка видно, что большинство обсерваторий сконцентрировано в Европе и США.

Кроме количества, важно и качество получаемого наблюдательного материала, причем большую роль здесь играют не только прогресс в телескопостроении, но и совершенствование методик наблюдений и обработки снимков. В частности, следует обратить внимание на астрометрические каталоги, используемые при отождествлении кадров и обработке измерений, которые в настоящее время обновляются и дополняются, в значительной степени благодаря миссии КА Gaia (<https://www.cosmos.esa.int/web/gaia/earlydr3>). Важное значение также имеют методика обработки полученных снимков и используемое в этом процессе программное обеспечение. В настоящее время существует относительно большой выбор программ, реализующих астрометрическую обработку ПЗС-изображений, среди них: IZMCCD (Izmailov и др., 2010), Astrometrica (<http://www.astrometrica.at/>), Апекс-II (Девяткин и др., 2010), SAOImage

DS9 (<http://hea-www.harvard.edu/RD/ds9/>). Каждая из них обладает своими достоинствами и недостатками, поэтому выбор осуществляется индивидуально.

Отдельного внимания заслуживают радарные наблюдения (Haynes и др., 2021), поскольку их точность существенно превышает точность оптических. Однако получение радарных наблюдений возможно только во время тесного сближения астероида с Землей, поэтому они охватывают небольшую дугу орбиты. В настоящее время радарные наблюдения составляют малый процент от всех полученных и имеются далеко не для всех АСЗ. Оценки их влияния на точность начальных параметров орбиты представлены, в частности, в работах (Виноградова и др., 2008; Батурин, 2012). В большинстве случаев включение результатов радарных наблюдений позволяет уменьшить неопределенность начальных данных не более, чем на полпорядка.

Высокоточные наблюдения АСЗ (как оптические, так и радарные), получаемые на разных обсерваториях мира, участвуют в пополнении международных баз данных о движении малых тел Солнечной системы (самой полной из которых является база Центра малых планет) и служат источником эфемеридных данных (например, сервис эфемерид Центра малых планет <https://minorplanetcenter.net/iau/MPEph/MPEph.html> и служба вычисления эфемерид JPL Horizons NASA <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>).

## ОШИБКИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Любая численная модель орбитального движения представляет собой связку трех сущностей. Это: 1) математическая модель орбитального движения в виде обыкновенных дифференциальных уравнений; 2) численный метод для реализации математической модели, т.е. для решения дифференциальных уравнений; а также 3) компьютер как вычислительная среда, в которой реализуется математическая модель посредством численного метода. Каждая из этих сущностей является источником определенного рода ошибок. Все они классифицируются как модельные, методические и вычислительные.

Модельные ошибки связаны с неточным представлением орбитального движения дифференциальными уравнениями ввиду игнорирования тех или иных силовых факторов, а также с ошибками параметров, входящих в дифференциальные уравнения. Параметрические ошибки являются, главным образом, следствием того, что параметры определяются из наблюдений, которые всегда содержат ошибки различного происхождения, неустранимые в силу своей случайности. Поэтому параметрические ошибки задают некий, образно говоря, потолок точности моделирования, который невозможно преодолеть, какой бы высокоточный численный метод не использовался, и в какой бы высокоточной вычислительной среде не выполнялось моделирование орбитального движения. Повысить параметрическую точность можно только путем переопределения параметров с привлечением актуальных наблюдений и с повышением измерительной точности.

Методические ошибки порождаются численным методом. При пошаговой реализации они накапливаются, в то время как их суммарный рост (глобальная ошибка) зависит не только от величин локальных погрешностей на выполненных шагах, но и от специфики интегрируемых дифференциальных уравнений, а также от геометрических свойств численного метода. Численные методы теоретически позволяют выполнять моделирование орбит на любом желаемом уровне методической точности. Она достигается подбором порядка численного метода и/или величины шага интегрирования. Впрочем, повышение методической точности путем уменьшения величины шага интегрирования всегда сопряжено с увеличением объема вычислений, что влечет ухудшение вычислительной точности.

Вычислительные ошибки возникают вследствие округления чисел в компьютерной арифметике с ограниченной разрядной сеткой. Чем больше разрядов выделяется для представления чисел в компьютерной арифметике, тем меньше вычислительные ошибки. При численном моде-

лировании астероидного движения вычисления обычно выполняются в арифметике с двойной точностью. Однако имеются компиляторы программного кода, позволяющие выполнять моделирование с расширенной точностью при сохранении быстродействия. Четверная точность чаще реализуется программно, но при этом сопряжена с существенным понижением быстродействия, в несколько десятков раз.

## МОДЕЛЬ СИЛ

Традиционно, движение астероидов рассматривается в рамках возмущенной задачи двух тел (Дубошин, 1968) в гелиоцентрической системе координат, отнесенной к эклиптике или экватору эпохи 2000.0. Важным вопросом является выбор модели сил, влияние которых будет учитываться при интегрировании дифференциальных уравнений движения. Набор возмущающих факторов зависит от особенностей орбиты исследуемого объекта (наличия сближений с планетами, перигелийного расстояния и т.д.) и требуемой точности. Использование самой полной модели не всегда является разумным как минимум по двум причинам: во-первых, дополнительные вычисления увеличивают ошибку округления, во-вторых, неточное знание параметров модели может привести к ухудшению точности прогноза.

Как упоминалось выше, рассмотрим различные модели сил на примере астероида Apophis. Одна из самых полных моделей разработана и используется в Институте прикладной астрономии РАН. Авторы работы (Кочетова и др., 2009) учитывают следующие возмущающие факторы: влияние больших планет, Плутона, Луны, Цереры, Паллады, Весты, сжатия Земли и Солнца, светового давления, релятивистских эффектов (РЭ) от Солнца и Юпитера и эффекта Ярковского. Следует отметить, что тесное сближение с Землей в 2029 г. существенно изменит орбиту астероида, что приведет к изменению в структуре возмущений.

На рис. 2 представлены результаты исследования структуры возмущений рассматриваемого астероида, выполненного с помощью программного комплекса ИДА (Galushina, Letner, 2021). Здесь  $\Delta r$  означает разницу между положениями, полученными с полной моделью сил, и с исключением одного возмущающего фактора. Под полной моделью в данном исследовании понимается модель, учитывающая влияние Солнца, больших планет, Плутона, Луны, Цереры, Паллады, Весты, эффекта Ярковского, сжатия Земли, Солнца и Юпитера, светового давления и релятивистских эффектов от Солнца, Луны, Плутона и планет. Силы на графике расположены в порядке убывания значимости. Значения на рис. 2а соответствуют промежутку от момента наилучшей обусловленности (2017 г.) до тесного сближения в апреле

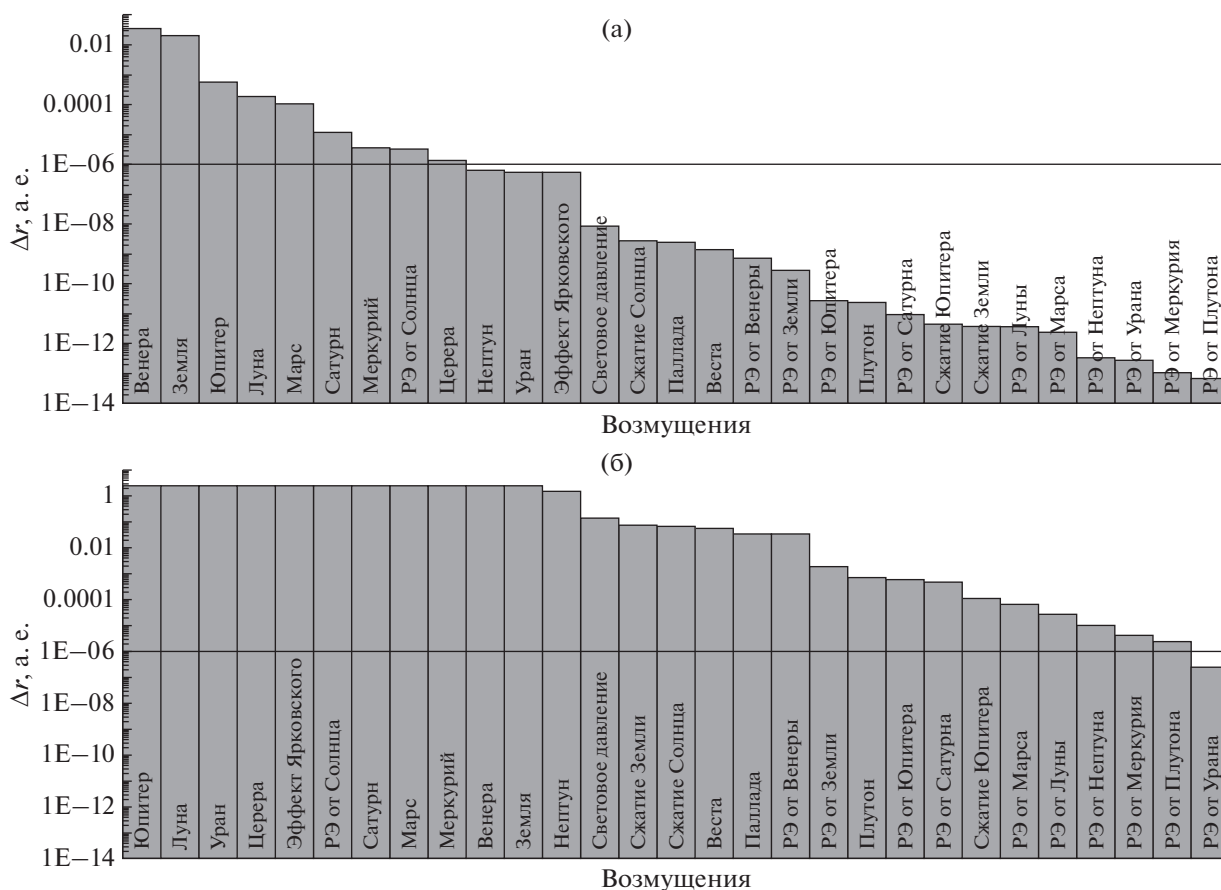


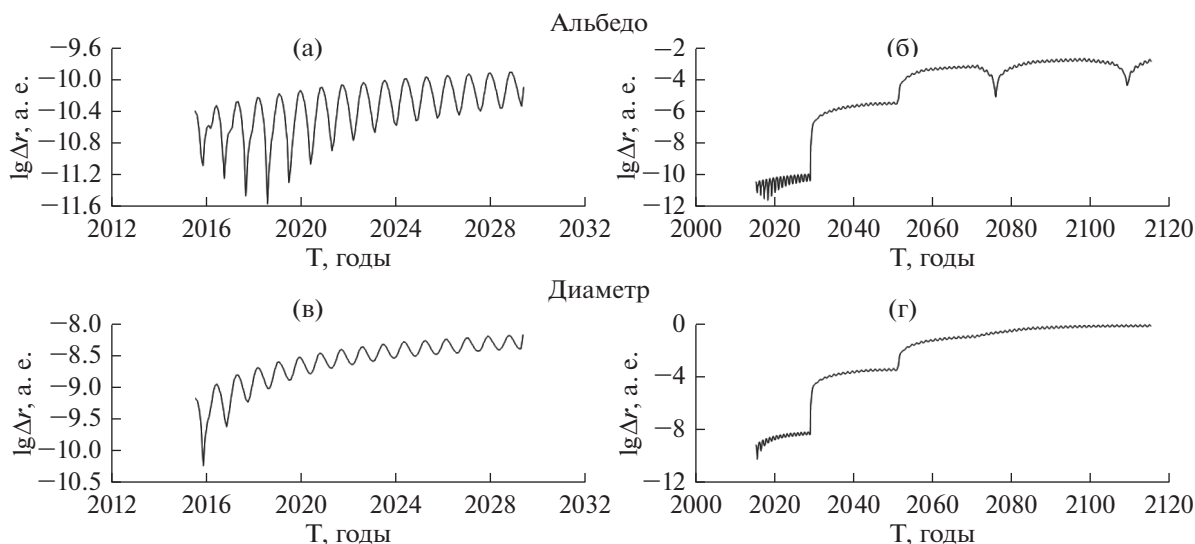
Рис. 2. Структура возмущений астероида (99942) Apophis до тесного сближения с Землей в апреле 2029 г. (а) и до 2115 г. (б).

2029 г., на рис. 26 представлены результаты исследования эволюции на 100 лет. Необходимый набор сил зависит от требуемой точности, например, как видно из рис. 2а, для достижения точности  $10^{-7}$  а. е. нужно учитывать влияние больших планет, Луны, Цереры, релятивистских эффектов от Солнца и эффекта Ярковского. Рис. 26 показывает, что на столетнем интервале влияние этих сил превышает 1 а. е., что является следствием существенного изменения орбиты при тесном сближении. При получении этого и последующего рисунков использованы наблюдения с сайта Центра малых планет, в том числе выполненные на Терскольской обсерватории. В данном исследовании использовались наблюдения астероида (99942) Apophis на интервале от 2004 до 2021 гг.

Особое внимание исследователей в последнее время привлекает эффект Ярковского, связанный с переизлучением тепловой энергии вращающимся телом (см., например, Bottke и др., 2006; Pérez-Hernández, Benet, 2022 и др.). Эффект Ярковского зависит от ряда физических свойств астероида (Greenberg и др., 2017), в частности параметров вращения, которые известны для очень малого числа астероидов. В этой ситуации един-

ственным выходом является предположение о зависимости рассматриваемой силы от гелиоцентрического расстояния и попытки найти коэффициент, характеризующий изменение большой полуоси, путем включения его в число оцениваемых параметров в процессе улучшения орбиты (Del Vigna и др., 2018). Обычно предполагается, что величина эффекта Ярковского обратно пропорциональна квадрату расстояния до Солнца. Однако для получения более-менее адекватных оценок необходимо, чтобы объект наблюдался на интервале больше одного оборота, но в любом случае точность определения параметра эффекта Ярковского ограничена точностью современных наблюдений (Галушина и др., 2021).

Аналогичные проблемы возникают при попытке учесть световое давление – диаметр, масса и альbedo для большинства астероидов или неизвестны, или известны с большой погрешностью. Например, в работе (Brozovic и др., 2018) приведены значения диаметра и геометрического альbedo для астероида Apophis:  $D = 0.34 \pm 0.04$  км,  $p_V = 0.35 \pm 0.10$ . Мы оценили (Быкова, Галушина, 2009) как влияют неопределенности в значениях альbedo и диаметра на положение астероида. На



**Рис. 3.** Влияние на движение астероида (99942) Арофис неопределенности значений альbedo (а, б) и диаметра (в, г) для тесных сближений с Землей в апреле 2029 г. и до 2115 г.

рис. 3 представлено расстояние между положениями Арофис, полученными на один и тот же момент времени с граничными значениями альbedo (0.34 и 0.36) и диаметра (300 и 380 м). Результаты показывают, что если до сближения в 2029 г. влияние незначительно и не превышает ошибки начальных данных, то после резкого изменения орбиты в апреле 2029 г. небольшие отклонения увеличиваются на несколько порядков и составляют миллионы километров.

Как упоминалось выше, наибольшее возмущающее воздействие на движение астероидов оказывают большие планеты, поэтому очень важно знать их положение с хорошей точностью. В настоящее время создано несколько вариантов эфемерид планет Солнечной системы (Folkner и др., 2014; Питьева и др., 2019; Fienga и др., 2019) и разрабатываются новые. В работе (Соколов и др., 2008) проведено сравнение расчета эволюции орбиты астероида (99942) Арофис с использованием эфемерид DE403, DE405 и EPM2004, оценено их влияние на моменты сближений 2029 и 2036 гг. и расстояние до геоцентра. Если в 2029 г. расстояние отличается на десятки километров, а момент времени совпадает до сотых долей секунды, то к 2036 г. отличия достигают часов и миллионов километров.

## МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Численное моделирование орбитального движения АСЗ основано на дифференциальных уравнениях, которые не интегрируются аналитически. Поэтому они решаются приближенно численными методами на компьютере. Этот процесс — пошаговый. Предположим, известны положение

и скорость астероида на какой-то начальный момент времени. Численным методом получают другие положение и скорость на следующий близкий момент, которые принимаются за начальные на следующем шаге, и так шаг за шагом рассчитываются динамические состояния объекта до заданного удаленного момента времени. Таким образом, орбита как бы собирается по кусочкам, т.е. интегрируется.

Численное интегрирование реализуется в так называемых интеграторах, которые представляют собой программные процедуры. Образно говоря, интегратор — это сердце или мотор компьютерной орбитальной модели, и эффективность численного моделирования во многом зависит от того, насколько удачно интегратор справляется с дифференциальными уравнениями, описывающими непростое движение АСЗ.

В предисловии к своей монографии (Hairer и др., 2002) авторы пишут: “В последние десятилетия теория численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений достигла определенной зрелости...”. Это же косвенно подтверждает и тот факт, что за последние почти тридцать лет в этой области не произошло ничего революционного. По мнению авторов настоящей работы, пожалуй, крупными результатами из последних стали открытые геометрические свойства некоторых методов Рунге—Кутты (Sanz-Serna, 1988; Lasagni, 1988), а также оригинальные составные симплектические методы Йошиды (Yoshida, 1990) и многошаговые симметричные методы Куинлэна—Тремейна (Quinlan, Tremaine, 1990) на рубеже еще 1980—1990-х гг. прошлого века.

В теории численных методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений можно выделить пять больших групп методов: 1) Рунге–Кутты; 2) коллокационные; 3) экстраполяционные; 4) многошаговые; 5) геометрические (Hairer и др., 2002), которые включают в себя симплектические, симметричные и проекционные методы. Помимо специально разработанных, в последнюю группу также входят некоторые методы первой, второй и четвертой групп. Некоторые методы Рунге–Кутты являются коллокационными.

В небесной механике для численного моделирования орбитального движения широко используются такие яркие представители этих групп как вложенный метод (Рунге–Кутты) Дормана–Принса 8(7) (Prince, Dormand, 1981), коллокационные методы Эверхарта (Everhart, 1974), экстраполяционный метод Грэгга–Булирша–Штера (Gragg, 1965; Bulirsch, Stoer, 1966), многошаговые методы Адамса–Мультона–Башфорта (Moulton, 1926), симметричные многошаговые методы Куинлэна–Тремейна (Quinlan, Tremaine, 1990), а также уже упоминавшиеся симплектические методы Йошиды (Yoshida, 1990).

Несмотря на то что дифференциальные уравнения орбитального движения АСЗ по конструкции относительно простые (в сравнении, скажем, с уравнениями движения ИСЗ), их решения достаточно нетривиальные в плане численного интегрирования. Орбиты АСЗ, как правило, сильно эксцентричны и усложнены тесными сближениями с планетами, поэтому интегрировать их целесообразно методами высоких порядков (от 10-го и выше) с переменным шагом.

Вложенный (явный) метод Рунге–Кутты порядка 12(10), максимального в настоящее время, получен Feagin (2012). Как и все вложенные методы, он позволяет выполнять численное интегрирование с переменным шагом в соответствии с задаваемой локальной точностью (для вложенного решения). Однако метод Фейгина – 25-этапный, т.е. он требует 25 вычислений функций дифференциальных уравнений на шаге, тогда как, например, любой (неявный) коллокационный метод на разбиении Гаусса–Лежандра – 6-этапный и при реализации с двумя итерациями для определения промежуточных решений на шаге требует только 12 вычислений функций дифференциальных уравнений.

Экстраполяционные методы также весьма трудоемки, поскольку объем вычислений для них пропорционален квадрату порядка. Так, например, экстраполяционный метод Грэгга–Булирша–Штера 8-го порядка требует на шаге 24 вычисления функций дифференциальных уравнений, а 12-го порядка – уже 48.

Многошаговые методы высоких порядков применительно к дифференциальным уравнениям в прямоугольных координатах имеют ограничение сверху на величину шага и, таким образом, не позволяют выполнять интегрирование с большим шагом, даже если он обеспечивает задаваемую локальную точность, поскольку многошаговая схема становится неустойчивой (Авдюшев, 2015). Причем это ограничение тем ниже, чем выше порядок схемы. По этой причине, если вычисления выполняются в компьютерной арифметике с двойной точностью, 10-й порядок является максимальным для практической реализации неявной схемы Адамса–Мультона–Башфорта, так как для более высоких порядков при допустимо максимальной величине шага методические ошибки становятся значительно меньше вычислительных ошибок.

Вследствие нерегулярности орбитального движения АСЗ, усложненного гравитационными маневрами, использование геометрических методов (симплектических и симметричных) нецелесообразно, к тому же их геометрические свойства сохраняются лишь при постоянном шаге.

Подходящий выбор для высокоточного численного моделирования орбит АСЗ, на наш взгляд, – это коллокационные методы (Guillou, Soule, 1969; Wright, 1970; Hairer и др., 2008). Примечательной особенностью коллокационных методов является то, что их теоретическая основа, как и программная реализация, универсальна для любого порядка (Авдюшев, 2015; 2020). Практически, порядок определяется разбиением на шаге, а именно количеством и спецификой распределения узловых значений, через которые выражаются все остальные константы интегратора. Кроме того, в отличие от других методов, коллокационные позволяют на каждом шаге легко конструировать приближенное аналитическое решение (коллокационный полином), чем удобно пользоваться для частого вывода результатов на плотной временной сетке.

Все коллокационные методы являются неявными, поэтому их схемы интегрирования реализуются итерационно для определения промежуточных решений внутри шага в узловых точках. Хотя аналитическое решение на каждом текущем шаге позволяет получать достаточно хорошие начальные приближения промежуточных решений на следующем шаге, что повышает скорость сходимости итерационного процесса до двух–трех итераций. Если выполняются две итерации, то на разбиениях Гаусса (Лежандра, Радау или Лобатто) количество вычислений функций дифференциальных уравнений на шаге равно порядку коллокационного метода.

Технически коллокационная схема интегрирования получается путем замены функции диф-

ференциального уравнения его полиномиальным интерполянт по безразмерной независимой переменной и последующим взятием определенных интегралов левой и правой частей уравнения с предельными значениями 0 и 1 (граничные значения безразмерной переменной на шаге). Формулы для промежуточных решений получаются таким же способом, но с заменой верхнего предельного (единичного) значения на узловое.

Если для интерполяции функции дифференциального уравнения применить полином Лагранжа, получается коллокационная схема Рунге–Кутты (Guillou, Soule, 1969; Wright, 1970). Everhart (1974) применил канонический полином, который дает простое по форме решение. Чтобы связать его коэффициенты с узловыми значениями функций дифференциальных уравнений, автор прибегает к разделенным разностям интерполяционного полинома Ньютона, которые непосредственно определяются из узловых значений. Между тем, коэффициенты канонического полинома выражаются через разделенные разности посредством линейных соотношений. Несмотря на столь сложную реализацию, метод Эверхарта, тем не менее, работает эффективнее коллокационных методов Рунге–Кутты (Авдюшев, 2022).

В небесной механике метод Эверхарта является одним из наиболее популярных для решения задач орбитальной динамики. Помимо оригинального интегратора Эверхарта RADAU (Everhart, 1985), на практике также используются его модификации: IAS15 (Rein, Spiegel, 2015) и GAUSS32 (Авдюшев, 2010; 2015).

Используя полином Ньютона в качестве интерполянта, Авдюшев (Авдюшев, 2020; Авдюшев и др., 2021) разработал серию интеграторов LOBBIE до 32-го порядка для решения дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядков, а также смешанных систем уравнений 1-го и 2-го порядков. В динамической астрономии смешанные системы применяются для исследования динамического хаоса (Cincotta и др., 2003), а также для линеаризации, регуляризации и стабилизации уравнений орбитальной динамики (Kustaanheimo, Stiefel, 1965; Burdet, 1968; Baumgarte, 1972; Шефер, 1991). Преобразования дифференциальных уравнений повышают эффективность их численного интегрирования, а, учитывая, что динамические уравнения 2-го порядка интегрируются точнее, нежели 1-го порядка, интегратор LOBBIE совместно с линейными, регулярными и стабилизированными уравнениями может представлять собой мощное ядро для компьютерной модели движения АСЗ (Авдюшев и др., 2021).

## НАЧАЛЬНАЯ ОРБИТАЛЬНАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

Наблюдения любого небесного тела, как бы тщательно они ни выполнялись, всегда обременены ошибками различного происхождения, неустранимыми в силу своей случайности. При определении орбиты из наблюдений, т.е. при решении обратной задачи орбитальной динамики, такие ошибки неизбежно вызывают ошибки в орбитальных параметрах. Для изучения параметрической неопределенности вследствие случайных ошибок наблюдений в настоящее время на практике часто используются стохастические (Монте-Карло) методы (Milani, 1999; Bordovitsyna и др., 2001; Virtanen и др., 2001; Muinonen и др., 2006; Avdyushev, Banschikova, 2007; Desmars и др., 2009; Emel'yanov, 2010; Avdyushev, 2011; 2017; 2022; Del Vigna, 2020). Стохастический подход позволяет численно моделировать так называемое облако неопределенности в параметрическом пространстве на заданную (начальную) эпоху, дискретно представляющее пространственное вероятностное распределение точного, но неизвестного динамического состояния относительно оценочного, полученного из наблюдений, как конечное множество виртуальных динамических состояний.

Обычно, прибегают к линейным стохастическим методам, основанным на ковариационной матрице параметрических ошибок, которая всегда доступна после определения параметров орбиты (Сюсина и др., 2012). Фактически, ковариационная матрица описывает параметрическую неопределенность в рамках линеаризованной обратной задачи. Поэтому параметрическая неопределенность дискретно представляется в виде эллипсоидального облака виртуальных динамических состояний, плотность которого соответствует вероятностной плотности нормального распределения. Между тем, любая обратная задача орбитальной динамики является нелинейной. Таким образом, фактическая параметрическая неопределенность не соответствует нормальному распределению. Однако при слабой нелинейности ковариационная матрица может быть вполне пригодной для моделирования облака неопределенности.

Сильная нелинейность часто возникает в тех обратных задачах, где параметрическая неопределенность велика, т.е. когда орбита определяется плохо из-за скудности наблюдательной информации о движении небесного тела. Нелинейность очень сильно влияет на протяженное распределение виртуальных динамических состояний (особенно периферийных), так что облако неопределенности может существенно отличаться от эллипсоидального. В этом случае приходится прибегать к нелинейным стохастическим методам.

Стохастическое моделирование параметрической неопределенности на основе наблюдатель-

ной информации имеет особое значение в задачах астероидной опасности при оценивании вероятности столкновения астероидов с Землей. Наиболее слабая нелинейность обратной задачи достигается, если начальная эпоха находится внутри периода наблюдения, хотя нелинейность может быть еще достаточно сильной в плане стохастического моделирования. Для этой эпохи на основе наблюдательной информации моделируется облако неопределенности, а затем отображается (распространяется) орбитальной моделью в физическое пространство на период сближения небесных тел. Относительная масса облака, проникшая в тело планеты при сближении астероида, как раз и дает вероятностную оценку ожидаемого столкновения с астероидом. Очевидно, что ее надежность непосредственно зависит от адекватности начального облака. В этом отношении нелинейные стохастические методы являются незаменимым инструментом, особенно при моделировании огромных начальных облаков неопределенности.

Если астероид наблюдался на очень короткой дуге, облако начальной неопределенности в параметрическом пространстве, вообще говоря, весьма протяженное и вытягивается вдоль некоторой кривой, соответствующей наименьшей скорости изменения целевой функции обратной задачи. В линейном случае это — прямая линия, направленная вдоль наибольшей полуоси доверительного эллипсоида. Учитывая эту особенность, Milani (1999) предложил моделировать распределение виртуальных динамических состояний непосредственно на этой кривой. Он назвал свой подход методом линии вариаций (LoV; line of variations).

Развивая подход Milani, Muinonen и др. (2006) разработали многомерный метод, основанный на однопараметрическом пятимерном отображении. Авторы назвали его методом объема вариаций (VoV; volume of variations). Суть его состоит в том, что: 1) для каждого виртуального динамического состояния на линии вариации определяется линейная локальная аппроксимация внутри пятимерного подпространства, ортогонального этой прямой; 2) затем для этого подпространства вычисляется ковариационная матрица, 3) которая используется для моделирования (линейно) пятимерного множества виртуальных динамических состояний. В результате получается шестимерное облако неопределенности.

Интересный подход для стохастического моделирования орбитальной неопределенности был предложен Virtanen и др. (2001). Он реализуется поэтапно: 1) из всей выборки угловых наблюдений случайным образом выбираются два; 2) в эти наблюдения и соответствующие модельные топоцентрические расстояния вводятся случайные, равномерно распределенные величины, соответствующие ошибкам угловых наблюдений и воз-

можным вариациям дальности до наблюдаемого объекта; 3) по сферическим топоцентрическим координатам (прямому восхождению, склонению и дальности) сначала получают два топоцентрических вектора положения, а затем путем параллельного сдвига определяют два вектора положения в системе отсчета, относительно которой моделируется орбитальное движение; 4) для этих двух положений каким-либо методом предварительного определения орбиты (например, методом Гаусса) находится вектор динамического состояния на один из двух моментов наблюдений. После многократного выполнения последовательности этих этапов формируется облако виртуальных динамических состояний. Авторы назвали свой подход статистической орбитальной дальнометрией (statistical orbital ranging).

Метод линии вариации предполагает наличие одной доминирующей составляющей в параметрической неопределенности. Однако на самом деле таких доминирующих составляющих две, так как при обработке угловых наблюдений по очень короткой дуге расстояние от наблюдателя до наблюдаемого объекта, а также его радиальная скорость неизвестны. Для моделирования двумерной параметрической неопределенности используется метод многообразия вариаций (MoV; manifold of variations) (Del Vigna, 2020). Метод производит выборку допустимых значений дальности и радиальной скорости на начальную эпоху, а затем для каждой пары подгоняет к наблюдениям так называемые атрибутивные параметры (attributable elements) (Milani и др., 2004) (прямое восхождение, склонение и их производные). Полученные сферические координаты и их производные дают виртуальные динамические состояния, формирующие двумерное облако неопределенности в пространстве параметров.

Несмотря на то что представленные методы не являются линейными, их нельзя рассматривать как строго нелинейные методы, адекватные исходной обратной задаче, поскольку каждый из них основан на том или ином упрощении или ограничении: метод линии вариации одномерный; его обобщенный многомерный аналог использует линейную аппроксимацию в некотором пятимерном подпространстве параметров; при статистической орбитальной дальнометрии строится облако неопределенности в рамках предварительного определения орбиты по двум положениям; а метод многообразия вариаций является двумерным. Следовательно, при сильной нелинейности эти методы практически необоснованы и могут оказаться неэффективными для стохастического моделирования параметрической неопределенности.

Альтернативным стохастическим методом для моделирования орбитальной неопределенности

является бутстрэп-метод (Efron, 1979; Desmars и др., 2009; Emel'yanov, 2010; Avdyushev, 2011). Он основан на многократном решении обратной задачи при использовании искусственных выборок наблюдений того же объема, что и для исходной выборки, но составленных из реальных наблюдений путем случайного выбора с возвращением. Примечательной особенностью бутстрэп-метода, в отличие от других нелинейных методов, является то, что он не требует знания реального распределения ошибок наблюдения. Тем не менее метод является математически необоснованным, и даже в слабонелинейном случае его результаты плохо согласуются с результатами других нелинейных методов (Avdyushev, 2011).

В сильно нелинейном случае для моделирования облака неопределенности можно прибегнуть к методу возмущенных (зашумленных) наблюдений (также известному как *observational Monte-Carlo*) (Press и др., 1987; Avdyushev, 2011; 2017). Он реализуется путем многократного решения обратной задачи для различных выборок наблюдений, моделируемых добавлением к реальным наблюдениям малых вариаций, распределенных по нормальному закону с дисперсией ошибок наблюдений и нулевым средним. В результате множество всех решений будет представлять облако неопределенности.

Несмотря на то, что метод адекватен исходной обратной задаче (Avdyushev, 2017), его реализация сопряжена с некоторыми сложностями. Поскольку обратная задача нелинейна, она решается итерационно каким-либо методом оптимизации для минимизации целевой функции, как правило, методом Гаусса–Ньютона. При моделировании облака неопределенности, за неимением лучшего, решение, полученное из реальных наблюдений, используется в качестве начального приближения, которое порой может быть очень грубым, особенно при моделировании периферийных виртуальных динамических состояний. Это приводит либо к большому количеству итераций, либо к расходимости итерационного процесса в худшем случае.

В своей работе Avdyushev (2022) предложил оригинальный нелинейный метод стохастического моделирования параметрической неопределенности, который также адекватен исходной обратной задаче и не требует дополнительных предположений или упрощений для реализации, а кроме того, лишен недостатка метода возмущенных наблюдений. Технически этот подход можно рассматривать как многомерное обобщение метода Милани. Он реализуется как пошаговое решение дифференциального уравнения, описывающего в параметрическом пространстве переход от оценки, получаемой из наблюдений, к виртуальному решению, но, в отличие от подхода

Милани, в произвольном, а не выборочном направлении.

## ХАРАКТЕРИСТИКИ ХАОТИЧНОСТИ

Сколь близко бы не располагались точки в начальном облаке неопределенности, со временем они расходятся в фазовом пространстве координат и компонент скорости. Пока это расхождение линейно, возможен достоверный прогноз движения, но как только частицы начинают разбегаться экспоненциально, то размеры облака неопределенности стремительно увеличиваются, и вскоре прогнозирование становится невозможным.

Для определения времени предсказуемости движения служат показатели хаотичности, классическим из которых является ляпуновское время (Лихтенберг, Либерман, 1984; Мюррей, Дертмотт, 2009). Однако данный показатель непросто применять для исследования движения АСЗ, поскольку он требует интегрирования на значительные интервалы времени. Кроме того, в ряде случаев затруднена интерпретация полученных результатов.

Решение указанных проблем принесла разработка так называемых быстрых показателей хаотичности, первым из которых стал FLI (*Fast Lyapunov Indicator*) (Froeschle и др., 1997; Shevchenko, 2020), а наиболее популярным – MEGNO (*Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbit*) (Cincotta и др., 2003). Если осредненный параметр MEGNO линейно растет, то можно говорить об экспоненциальном расхождении близких орбит, т.е. о проявлении хаотичности. В работе (Шефер, Коксин, 2013) предложен ряд модификаций параметра MEGNO, в частности, ортогональный MEGNO (OMEGNO), преимуществом которого является возможность разделять устойчивые и неустойчивые квазипериодические орбиты.

На рис. 4 в качестве примера показана эволюция параметров MEGNO (черным цветом) и OMEGNO (серым цветом) для астероида (3200) Phaethon. Данный объект испытывает многочисленные тесные сближения с планетами земной группы, что приводит к линейному росту изучаемых параметров и переходу через значение 2 в окрестности 5000 г., что свидетельствует о хаотичности орбиты. До этого времени орбита является квазипериодической, а тот факт, что параметр OMEGNO принимает значения  $\bar{Y}_1 < 2$ , говорит об устойчивости орбиты. Следует отметить, что в данном случае для исследования хаотичности подходят оба параметра, но OMEGNO является более информативным.

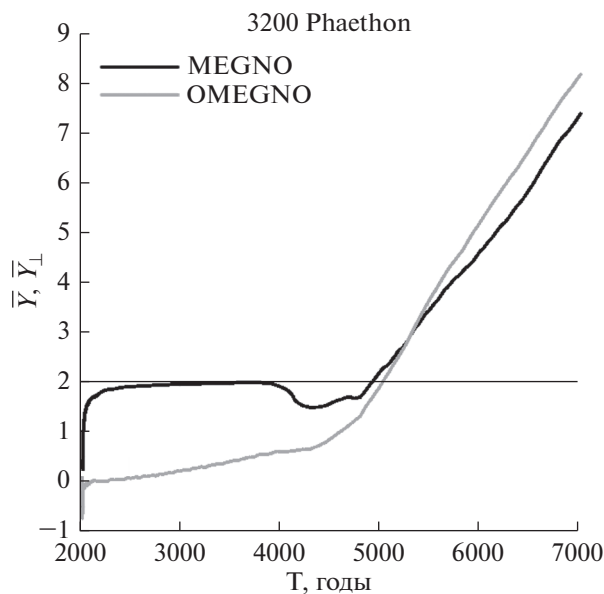


Рис. 4. Эволюция параметров MEGNO  $\bar{Y}$  и OMEGNO  $\bar{Y}_\perp$  для астероида (3200) Phaethon.

## ОРБИТАЛЬНЫЕ И ВЕКОВЫЕ РЕЗОНАНСЫ

Значительное влияние на движение астероидов оказывают орбитальные и вековые резонансы: устойчивые соизмеримости способствуют стабилизации движения и в ряде случаев служат защитным механизмом от сближений, неустойчивые же (а также перекрытие различных резонансов) могут приводить к хаотичности. Орбитальные резонансы обусловлены соизмеримостью средних движений астероида и планеты, вековые же (апсидально-нодальные) связаны с соизмеримостью скоростей прецессии орбит изучаемого объекта и возмущающего тела.

Резонансы средних движений давно являются предметом пристального внимания небесных механиков (Гребеников, Рябов, 1978; Мюррей, Дертмотт, 2009), в этой области достигнуты существенные успехи (см., например, de la Fuente Marcos C., de la Fuente Marcos R., 2019; Qi, de Ruiter, 2019; Fenucci и др., 2022; Li и др., 2019; Pokorny, Kuchner, 2021; Kaplan, Cengiz, 2020), в том числе сделаны попытки автоматической классификации резонансов (Carruba и др., 2022).

Иначе обстоит дело с вековыми резонансами: несмотря на то, что теория была разработана еще в прошлом веке (Kozai, 1962; Williams, 1969; Froeschle, Scholl, 1989), практические исследования применительно к движению АСЗ весьма немногочисленны (Froeschle и др., 1995; Michel, Froeschle, 1997; de la Fuente Marcos C., de la Fuente Marcos R., 2016; Емельяненко В.В., Емельяненко Н.Ю., 2018; Галушина, Самбаров, 2019). По-видимому, данный факт обусловлен тем, что к рассматриваемым объектам неприменимы ана-

литические методы, а использование численных методов приводит к быстрому накоплению ошибок округления в окрестности тесных сближений. В результате интервал исследования в лучшем случае охватывает один—два периода либрации резонансного аргумента, что часто недостаточно для объективных выводов о резонансном поведении.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данном кратком обзоре рассмотрены основные методы моделирования движения астероидов, перечислены существенные погрешности, возникающие на разных этапах исследования, показано, что наибольший вклад вносит ошибка начальных данных. Отдельное внимание в работе уделено таким особенностям движения, как орбитальные и вековые резонансы и хаотичность. Кроме того, подробно рассмотрены различные модели сил. Для иллюстрации некоторых аспектов при изложении использованы результаты исследования движения астероидов (99942) Apophis и (3200) Phaethon.

Несмотря на большой прогресс в развитии методов прогнозирования движения астероидов, сближающихся с Землей, массовый высокоточный прогноз всей популяции остается мечтой ученых. Самой большой еще нерешенной проблемой, на наш взгляд, является количество и качество наблюдений, поскольку именно они определяют параметрическую ошибку. Другой стороной данной проблемы оказывается неполное знание физических параметров астероидов, что затрудняет учет ряда негравитационных возмущений, таких, как эффект Ярковского и световое давление. Методы численного интегрирования также задают некоторые ограничения на возможности прогнозирования, которые, однако, больше обусловлены быстроедействием, чем точностью методов, поскольку исследования вероятностной орбитальной эволюции требуют изучения поведения большого числа тестовых частиц. Отдельного внимания заслуживает проблема хаотичности движения, которая представляется нам практически неразрешимой.

Работа выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования “Терскольская обсерватория”.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSWM-2020-0049).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Авдюшев В.А. Интегратор Гаусса—Эверхарта // Вычислит. технологии. 2010. Т. 15. № 4. С. 31—47.

- Авдюшев В.А.* Численное моделирование орбит небесных тел. Томск: Издат. дом Томского государственного университета, 2015. 336 с.
- Авдюшев В.А.* Новый коллокационный интегратор для решения задач динамики. I. Теоретические основы // Изв. вузов. Физика. 2020. Т. 63. № 11. С. 131–140.
- Авдюшев В.А.* Коллокационный интегратор Lobbie в задачах орбитальной динамики // Астрон. вестн. 2022. Т. 56. № 1. С. 36–46. (*Avdyushev V.A.* Collocation Integrator Lobbie in Orbital Dynamics Problems // Sol. Syst. Res. 2022. V. 56. № 1. P. 32–42.)
- Авдюшев В.А., Сюсина О.М., Тамаров В.А.* Нелинейность в обратных задачах астероидной динамики // Астрон. вестн. 2021. Т. 55. № 1. С. 84–96. (*Avdyushev V.A., Syusina O.M., Tamarov V.A.* Nonlinearity in inverse problems of asteroid dynamics // Sol. Syst. Res. 2021. V. 55. № 1. P. 71–82.)
- Батурин А.П.* Улучшение орбит астероидов с использованием радарных наблюдений // Изв. вузов. Физика. 2012. Т. 55. № 10/2. С. 77–81.
- Быкова Л.Е., Галушина Т.Ю.* Моделирование движения астероида (99942) Апофис до и после тесного сближения с Землей 13 апреля 2029 г. // Тр. междунар. конф. “Астрономия и всемирное наследие: через время и континенты”. Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. С. 130.
- Быкова Л.Е., Галушина Т.Ю.* Исследование движения астероида (99942) Апофис с использованием многопроцессорной вычислительной системы СКИФ Cyberia // Космич. исслед. 2010. Т. 48. № 5. С. 419–426.
- Виноградова Т.А., Кочетова О.М., Чернетенко Ю.А., Шор В.А., Ягудина Э.И.* Орбита астероида (99942) Арофис, определенная из оптических и радарных наблюдений // Астрон. вестн. 2008. Т. 42. № 4. С. 291–300. (*Vinogradova T.A., Kochetova O.M., Chernetenko Yu.A., Shor V.A., Yagudina E.I.* The orbit of asteroid (99942) Apophis as determined from optical and radar observations // Sol. Syst. Res. 2008. V. 42. № 4. P. 271–280.)
- Галушина Т.Ю., Летнер О.Н., Сюсина О.М.* Оценка точности определения значения параметра эффекта Ярковского на основе реальных и модельных наблюдений астероидов // Изв. вузов. Физика. 2021. Т. 64. № 9. С. 170–174.
- Галушина Т.Ю., Самбаров Г.Е.* Исследование динамики астероида 3200 Фаэтон под влиянием наложения различных резонансов // Астрон. вестн. 2019. Т. 53. № 3. С. 1–9. (*Galushina T.Yu., Sambarov G.E.* Dynamics of asteroid 3200 Phaethon under overlap of different resonances // Sol. Syst. Res. 2019. V. 53. № 3. P. 215–223.)
- Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. М.: Наука, 1978. 128 с.
- Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 800 с.
- Девяткин А.В., Горшанов Д.Л., Куприянов В.В., Верещачина И.А.* Программные пакеты “Апекс-I” и “Апекс-II” для обработки астрономических ПЗС-наблюдений // Астрон. вестн. 2010. Т. 44. № 1. С. 74–87. (*Devyatkin A.V., Gorshanov D.L., Kouprianov V.V., Verestchagina I.A.* Apex I and Apex II software packages for the reduction of astronomical CCD observations // Sol. Syst. Res. 2010. V. 44. № 1. P. 68–80.)
- Емельяненко В.В., Емельяненко Н.Ю.* Долгоживущий околоземный астероид 2013 RB6 // Астрон. вестн. 2018. Т. 52. № 1. С. 70–72. (*Emel'yanenko V.V., Emel'yanenko N.Y.* Long-lived near-Earth asteroid 2013 RB6 // Sol. Syst. Res. 2018. V. 52. № 1. P. 61–63.)
- Ивашкин В.В., Гуо П., Стихно К.А.* Исследование характеристик вероятной области соударения астероида Апофис с Землей в 2036 г. // Космич. исслед. 2020. Т. 58. № 1. С. 27–39.
- Кочетова О.М., Чернетенко Ю.А., Шор В.А.* Насколько точна орбита астероида (99942) Апофис и какова вероятность столкновения с ним в 2036–2037 гг. // Астрон. вестн. 2009. Т. 43. С. 338–347. (*Kochetova O.M., Chernetenko Y.A., Shor V.A.* How precise is the orbit of asteroid (99942) Apophis and how probable is its collision with the Earth in 2036–2037? // Sol. Syst. Res. 2009. V. 43. № 4. P. 324–333.)
- Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
- Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы. М.: Физматлит, 2009. 588 с.
- Питьева Е.В., Павлов Д.А., Питьев Н.П.* Динамическая модель Солнечной системы в эфемеридах планет EPM // Тр. Ин-та прикладной астрономии РАН. 2019. № 51. P. 82–92.
- Соколов Л.Л., Башаков А.А., Питьев Н.П.* Особенности движения астероида 99942 Арофис // Астрон. вестн. 2008. Т. 42. № 1. С. 20–29. (*Sokolov L.L., Bashakov A.A., Pijev N.P.* Peculiarities of the motion of asteroid 99942 Apophis // Sol. Syst. Res. 2008. V. 42. № 1. P. 18–27.)
- Соколов Л.Л., Кутеева Г.А., Петров Н.А., Эскин Б.Б., Баяев И.А., Васильев А.А.* О характеристиках особых траекторий астероида Апофис и возможности увода его от соударений с Землей // Астрон. вестн. 2021. Т. 55. № 3. С. 265–271. (*Sokolov L.L., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B., Balyaev I.A., Vasil'ev A.A.* On the characteristics of singular trajectories of the asteroid Apophis and the possibility of deflecting it to avoid collisions with the Earth // Sol. Syst. Res. 2021. V. 55. № 3. P. 259–265.)
- Сюсина О.М., Черницов А.М., Тамаров В.А.* Построение доверительных областей в задаче вероятностного исследования движения малых тел Солнечной системы // Астрон. вестн. 2012. Т. 46. № 3. С. 209–222. (*Syusina O.M., Chernitsov A.M., Tamarov V.A.* Construction of confidence regions in problem on probabilistic study into motion of minor bodies of the Solar system // Sol. Syst. Res. 2012. V. 46. № 3. P. 195–207.)

- Шефер В.А.* Линеаризация и регуляризация уравнений кеплеровского движения с помощью интегралов // *Астрон. журн.* 1991. Т. 68. С. 197–205.
- Шефер В.А., Коксин А.М.* Вычисление показателей хаотичности орбит, основанных на касательных векторах: применение к ограниченной задаче трех тел // *Изв. вузов. Физика.* 2013. Т. 56. № 6/3. С. 256–258.
- Avdyushev V.A.* Nonlinear methods of statistic simulation of virtual parameter values for investigating uncertainties in orbits determined from observations // *Celest. Mech. and Dyn. Astron.* 2011. V. 110. № 4. P. 369–388.
- Avdyushev V.* Intrinsic nonlinearity and method of disturbed observations in inverse problems of celestial mechanics // *Celest. Mech. and Dyn. Astron.* 2017. V. 129 (4). P. 537–552.
- Avdyushev V.* Transition methods for stochastic simulation of parametric uncertainty in inverse problems of orbital dynamics // *Celest. Mech. and Dyn. Astron.* 2022. V. 134. id. 53.
- Avdyushev V.A., Banshikova M.A.* Regions of possible motions for new Jovian satellites // *Sol. Syst. Res.* 2007. V. 41. № 5. P. 413–419.
- Baumgarte J.* Numerical stabilization of the differential equations of Keplerian motion // *Comp. Math. Appl.* *Mech. Eng.* 1972. V. 1. P. 1–16.
- Bottke W.F., Vokrouhlicky D., Rubincam D.P., Nesvornyy D.* The Yarkovsky and YORP Effects: Implications for Asteroid Dynamics // *Annu. Rev. Earth and Planet. Sci.* 2006. V. 34. P. 157–191.
- Bordovitsyna T., Avdyushev V., Chernitsov A.* New trends in numerical simulation of the motion of small bodies of the Solar system // *Celest. Mech. and Dyn. Astron.* 2001. V. 80 № 3/4. P. 227–247.
- Brozovic M., Benner L.A.M., McMichael J.G., Giorgini J.D., Pravec P., Scheirich P., Magri C., Busch M.W., Jao J.S., Lee C.G., Snedeker L.G., Silva M.A., Slade M.A., Semenov B., Nolan M.C., Taylor P.A., Howell E.S., Lawrence K.J.* Goldstone and Arecibo radar observations of (99942) Apophis in 2012–2013 // *Icarus.* 2018. V. 300. P. 115–128.
- Bulirsch R., Stoer J.* Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods // *Num. Math.* 1966. V. 8. P. 1–13.
- Burdet C.A.* Theory of Kepler motion: The general perturbed two body problem // *Z. Angew. Math. Phys.* 1968. V. 19. P. 345–368.
- Carruba V., Aljbaae S., Domingos R.C., Huaman M., Barletta W.* Machine learning applied to asteroid dynamics // *Celest. Mech. and Dyn. Astron.* 2022. V. 134. № 4. id. 36.
- Cincotta P.M., Girdano C.M., Simo C.* Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits // *Physica D.* 2003. V. 182. P. 151–178.
- Del Vigna A.* The Manifold of Variations: hazard assessment of short-term impactors // *Celest. Mech. and Dyn. Astron.* 2020. V. 132. id. 49.
- Del Vigna A., Faggioli L., Milani A., Spoto F., Farnocchia F., Carry B.* Detecting the Yarkovsky effect among near-Earth asteroids from astrometric data // *Astron. and Astrophys.* 2018. V. 617. id. A61 (16 p.) doi: arXiv:1805.05947
- Desmars J., Arlot S., Arlot J.-E., Lainey V., Vienne A.* Estimating the accuracy of satellite ephemerides using the bootstrap method // *Astron. and Astrophys.* 2009. V. 62. P. 321–330.
- Efron B.* Bootstrap methods: another look at the jackknife // *Ann. Statistics.* 1979. V. 7. P. 411–420.
- Emel'yanov N.* Precision of the ephemerides of outer planetary satellites // *Planet. and Space Sci.* 2010. V. 58. № 3. P. 411–420.
- Everhart E.* Implicit single sequence methods for integrating orbits // *Celest. Mech.* 1974. V. 10. № 1. P. 35–55.
- Everhart E.* An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings // *Dynamics of comets: their origin and evolution. Proc. 83rd IAU Colloq. Rome, 11–15 June 1984 / Eds: Carusi A., Valsecchi G.B. Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1985. P. 185–202.*
- Feagin T.* High-order explicit Runge–Kutta methods using m-symmetry // *Neural, Parallel and Sci. Computat.* 2012. V. 20. P. 437–458.
- Fenucci M., Gronchi G.F., Saillenfest M.* Proper elements for resonant planet-crossing asteroids // *Celest. Mech. and Dyn. Astron.* 2022. V. 134. № 3. id. 23.
- Fienga A., Deram P., Viswanathan V., Di Ruscio A., Bernus L., Durante D., Gastineau M., Laskar J.* INPOP19a planetary ephemerides, 2019. [https://www.imcce.fr/content/medias/recherche/equipas/asd/inpop/inpop19a\\_20191214.pdf](https://www.imcce.fr/content/medias/recherche/equipas/asd/inpop/inpop19a_20191214.pdf)
- Folkner W.M., Williams J.G., Boggs D.H., Park R.S., Kuchynka P.* The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431 // *IPN Progress Report 42–196.* February 15, 2014.
- Froeschle C., Scholl H.* The three principal secular resonances  $\nu_5$ ,  $\nu_6$ , and  $\nu_{16}$  in the asteroidal belt // *Celest. Mech. and Dyn. Astron.* 1989. V. 46. № 3. P. 231–251.
- Froeschle C., Hahn G., Gonczi R., Morbidelli A., Farinella P.* Secular resonances and the dynamics of Mars-crossing and Near-Earth asteroids // *Icarus.* 1995. V. 117. № 1. P. 45–61.
- Froeschle C., Lega E., Gonczi R.* Fast Lyapunov indicators. Application to asteroidal motion // *Celest. Mech. and Dyn. Astron.* 1997. V. 67. № 1. P. 41–62.
- De la Fuente Marcos C., de la Fuente Marcos R.* Far from random: Dynamical groupings among the NEO population // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 2016. V. 456. P. 2946–2956.
- De la Fuente Marcos C., de la Fuente Marcos R.* Dancing with Venus in the shadow of the Earth: A pair of genetically related near-Earth asteroids trapped in a mean-motion resonance // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 2019. V. 483. № 1. P. L37–L41.
- Galushina T.Yu., Letner O.N.* Modified version of IDA software and its application to the study of the motion of as-

- teroid 2007 PR10 // *Astron. and Astrophys. Transact.* 2021. V. 32. № 4. P. 355–370.
- Gragg W.B. On extrapolation algorithms for ordinary initial value problems // *SIAM J. Numer. Anal.* 1965. V. 2. № 3. P. 384–403.
- Greenberg A.H., Margot J.-L., Verma A.K., Hodge S.E. Yarkovsky drift detections for 159 Near-Earth asteroids // 2017. print arXiv:1708.05513.
- Guillou A., Soule J.L. La resolution numerique des problemes differentiels aux conditions initiales par des methodes de collocation // *Rev. Francaise Informat. Recherche Oprationnelle.* 1969. V. 3. Ser. R-3. P. 17–44.
- Hairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. Springer, 2002. 659 p.
- Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations. Nonstiff Problems. Springer, 2008. 528 p.
- Haynes M., Virkki A., Venditti F., Hickson D., Pinilla-Alonso N., Brisset J., Benner L., Raymond C., Lazio J., Freeman A., Castillo-Rogez J., Asphaug E., Taylor P., Herique A., Kofman W., Sava P., Pajola M., Lucchetti A., Nascimben De Pra M., Rivera-Valentin E. Asteroids inside out: Radar tomography // *Bull. Am. Astron. Soc.* 2021. V. 53. № 4. id. 116.
- Izmailov I.S., Khovrichева M.L., Khovrichев M.Yu., Kiyayeva O.V., Krutskaya E.V., Romanenko L.G., Grosheva E.A., Maslennikov R.L., Kalinichenko O.A. Astrometric CCD observations of visual double stars at the Pulkovo Observatory // *Astron. Lett.* 2010. V. 36. № 5. P. 349–354.
- Kaplan M., Cengiz S. Horseshoe co-orbitals of Earth: Current population and new candidates // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 2020. V. 496. № 4. P. 4420–4432.
- Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity // *Astron. J.* 1962. V. 67. P. 591–598.
- Kustaanheimo P., Stiefel E. Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // *J. Reine Angew. Math.* 1965. V. 218. P. 204–219.
- Lasagni F.M. Canonical Runge–Kutta methods // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik.* 1988. V. 39. P. 952–953.
- Li M., Huang Y., Gong S. Assessing the risk of potentially hazardous asteroids through mean motion resonances analyses // *Astrophys. and Space Sci.* 2019. V. 364. № 5. id. 78 (12 p.).
- Michel P., Froeschle Ch. The location of linear secular resonances for semimajor axes smaller than 2 AU // *Icarus.* 1997. V. 128. P. 230–240.
- Milani A. The asteroid identification problem. I. Recovery of lost asteroids // *Icarus.* 1999. V. 137. № 2. P. 269–292.
- Milani A., Gronchi G.F., DeMichieli Vitturi M., Knezevic Z. Orbit determination with very short arcs. I. Admissible regions // *Celest. Mech. and Dyn. Astron.* 2004. V. 90. № 1–2. P. 57–85.
- Muironen K., Virtanen J., Granvik M., Laakso T. Asteroid orbits using phase-space volumes of variation // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 2006. V. 368. № 2. P. 809–818.
- Moulton F.R. New Methods in Exterior Ballistics. Univ. Chicago Press, 1926. 257 p.
- Pérez-Hernández J.A., Benet L. Non-zero Yarkovsky acceleration for near-Earth asteroid (99942) Apophis // *Commun. Earth and Environ.* 2022. P. 3–10.
- Pokorny P., Kuchner M. Threat from within: Excitation of Venus's co-orbital asteroids to Earth-crossing orbits // *Planet. Sci. J.* 2021. id. 2:193 (13 p.).
- Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. (818 p.)
- Prince P.J., Dormand J.R. High order embedded Runge–Kutta formulae // *J. Comp. Appl. Math.* 1981. V. 7. P. 67–75.
- Qi Y., de Ruiter A. Planar near-Earth asteroids in resonance with the Earth // *Icarus.* 2019. V. 333. P. 52–60.
- Quinlan G.D., Tremaine S. Symmetric multistep methods for the numerical integration of planetary orbits // *Astron. J.* 1990. V. 100. P. 1694–1700.
- Reddy V., Kelley M.S., Dotson J., Farnocchia D., Erasmus N., Polishook D., Masiero J., Benner L.A.M., Bauer J., Alarcon M.R., Balam D., Bamberger D., Bell D., Barnardi F., Bressi T.H., Brozovic M., Brucker M.J., Buzzi L., Cano J., Cantillo D., Cennamo R., Chastel S., Omarov C., Choi Y.-J., Christensen E., Denneau L., Drózdź M., Elenin L., Erece O., Faggioli L., Falco C., Glamazda D., Graziani F., Heinze A.N., Holman M.J., Ivanov A., Jacques C., van Rensburg P.J., Kaiser G., Kamiński K., Kamińska M.K., Kaplan M., Kim D.-H., Kim M.-J., Kiss C., Kokina T., Kuznetsov E., Larsen J.A., Lee H.-J., Lees R.C., de León J., Licandro J., Mainzer A., Marciniak A., Marsset M., Mastaler R.A., Mathias D.L., McMillan R.S., Medeiros H., Micheli M., Mokhnatkina A., Moon H.-K., Morate D., Naidu S.P., Nastasi A., Novichonok A., Ogłóza W., Pál A., Pérez-Toledo F., Perminov A., Petrescu E., Popescu M., Read M.T., Reichart D.E., Reva I., Roh D.-G., Rumpf C., Satpathy A., Schmalz S., Scotti J.V., Serebryanskiy A., Serra-Ricart M., Sonbas E., Szakáts R., Taylor P.A., Tonry J.L., Tubbiolo A.F., Veres P., Wainscoat R., Warner E., Weiland H.J., Wells G., Weryk R., Wheeler L.F., Wiebe Y., Yim H.-S., Žejmo M., Zhornichenko A., Zola S., Michel P. Apophis planetary defense campaign // *The Planet. Sci. J.* 2022. V. 3. id. 123 (16 p.)
- Rein H., Spiegel D.S. IAS15: a fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision over a billion orbits // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 2015. V. 446. № 2. P. 1424–1437.
- Sanz-Serna J.M. Runge–Kutta schemes for Hamiltonian systems // *BIT.* 1988. V. 28. P. 877–883.
- Shevchenko I.I. Dynamical Chaos in Planetary Systems. Springer, 2020. 376 p.
- Thuillot W., Bancelin D., Ivantsov A., Desmars J., Assafin M., Egl S., Hestroffer D., Rocher P., Carry B., David P., Abe L.,

- Andreev M., Arlot J.-E., Asami A., Ayvasian V., Baransky A., Belcheva M., Bendjoya Ph., Bikmaev I., Burkhonov O.A., Camci U., Carbognani A., Colas F., Devyatkin A.V., Ehgamberdiev Sh.A., Enikova P., Eyer L., Galeev A., Gerlach E., Godunova V., Golubaev A. V., Gorshanov D.L., Gumerov R., Hashimoto N., Helyaci M., Ibryamov S., Inasaridze R.Ya., Khamitov I., Kostov A., Kozhukhov A.M., Kozyryev Y., Krugly Yu.N., Kryuchkovskiy V., Kulichenko N., Maigurova N., Manilla-Robles A., Martyusheva A.A., Molotov I.E., Nikolov G., Nikolov P., Nishiyama K., Okumura S., Palaversa L., Parmonov O., Peng Q.Y., Petrova S.N., Pinigin G.I., Pomazan A., Rivet J.-P., Sakamoto T., Sakhbullin N., Sergeev O., Sergeyev A.V., Shulga O.V., Suarez O., Sybiryakova Y., Takahashi N., Tarady V., Todd M., Urakawa S., Uysal O., Vaduvescu O., Vovk V., Zhang X.-L.* The astrometric Gaia-FUN-SSO observation campaign of 99942 Apophis // *Astron. and Astrophys.* 2015. V. 583. id. A59 (12 p.)
- Virtanen J., Muinonen K., Bowell E.* Statistical ranging of asteroid orbits // *Icarus.* 2001. V. 154. № 2. P. 412–431.
- Vokrouhlický D., Farnocchia D., Čapek D., Chesley S.R., Pravec P., Scheirich P., Müller T.G.* The Yarkovsky effect for 99942 Apophis // *Icarus.* 2015. V. 252. P. 277–283.
- Williams J.G.* Secular perturbations in the Solar System // Ph. D. Dissertation. Los Angeles: Univ. California, 1969. 4890 p.
- Włodarczyk I.* Possible impact solutions of asteroid (99942) Apophis // *Bulgarian Astron. J.* 2017. V. 27. P. 89–100.
- Wright K.* Some relationships between implicit Runge–Kutta, collocation and Lanczos methods, and their stability properties // *BIT.* 1970. V. 10. P. 217–227.
- Yoshida H.* Construction of higher order symplectic integrators // *Phys. Lett. A.* 1990. V. 150. P. 262–268.