АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК, 2023, том 57, № 6, с. 595–604

УДК 523-52

ДЖИНСОВСКАЯ ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ БЕЗ СТОЛКНОВЕНИЙ С АНИЗОТРОПНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

А. В. Колесниченко*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

**e-mail: kolesn@keldysh.ru*

Поступила в редакцию 09.04.2023 г.
После доработки 04.05.2023 г.
Принята к публикации 14.05.2023 г.

Проблема самогравитационной неустойчивости астрофизической вращающейся плазмы в сильном магнитном поле с анизотропным тензором давления исследована на основе квазигидродинамических уравнений Чу–Голдбергера–Лоу (ЧГЛ), модифицированных за счет обобщенных законов политропы. С использованием общей формы дисперсионного соотношения, полученного методом возмущений нормальных мод, обсуждается распространение волн возмущения малой амплитуды в бесконечной однородной плазменной среде для поперечного, продольного и наклонного направлений по отношению к вектору магнитного поля. Показано, что различные политропные индексы и анизотропное давление не только изменяют классическое условие неустойчивости Джинса, но и вызывают появление новых неустойчивых областей. Получены модифицированные критерии неустойчивости Джинса для изотропных МГД-уравнений и анизотропных уравнений ЧГЛ за счет влияния политропных индексов на гравитационную и "шланговую" неустойчивости для астрофизической плазмы. Показано, что в случае продольной моды распространения волны возмущения критерий неустойчивости Джинса не зависит от равномерного вращения. При поперечном режиме распространения – наличие вращения уменьшает критическое число волны и оказывает стабилизирующее влияние на скорость роста неустойчивого режима.

Ключевые слова*:* плазменные неустойчивости, гравитационный критерий Джинса, уравнения ЧГЛ с обобщенными законами политропы

DOI: 10.31857/S0320930X23060051, **EDN:** GIOZFW

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы наблюдается растущий интерес к изучению процессов неустойчивости гравитирующей плазмы без столкновений, в основном из-за большого числа астрофизических сред, содержащих магнитные поля, достаточно сильные для связи с ионизованным газом и характеризующихся плотностью, достаточно низкой для того, чтобы предотвратить изотропизацию давления относительно направления магнитного поля. Анизотропия давления (или температуры), являющаяся внутренней характеристикой плазмы без столкновений в сильном магнитном поле, имеет тенденцию развиваться в астрофизической плазме, в частности, при образовании намагниченных звезд и в аккреционных протопланетных дисках, на Солнце и в короне, в плазме звездного ветра, обтекающего Землю и другие планеты Солнечной системы, в магнитосфере и плазмосфере Земли с анизотропией температуры, в межпланетной плазме и т.д.

Как известно, в сильном магнитном поле появляется возможность гидродинамического описания разреженной бесстолкновительной плазмы. Система одножидкостных магнитогидродинамических уравнений идеальной плазмы Чу–Голдбергера–Лоу (ЧГЛ) (Chew и др., 1956) с анизотропным тензором давления и при использовании двойного адиабатического уравнения состояния, соответствует нулевому приближению решения кинетического уравнения Больцмана–Власова по малому параметру $\varepsilon \sim R_L / L$, имеющему порядок отношения ларморовского радиуса ионов R_L к характерному масштабу L (см. Chew и др., 1956; Рудаков, Сагдеев, 1958). Условие малости параметра ε практически выполняется в астрофизической плазме, например, в солнечном ветре (вблизи Земли $\varepsilon \sim 10^{-6}$), в ионосфере Земли (на высоте порядка 100 км $\varepsilon \sim 10^{-7}$).

Важно при этом подчеркнуть, что возможность гидродинамического описания намагниченной плазмы без столкновений объясняется тем, что сильное магнитное поле, симметризуя распределение скоростей в ортогональной ему плоскости, по характеру действия на заряженные частицы вполне аналогично столкновениям. По этой причине гидродинамическое приближение оказывается возможным в силу существования механизма передачи давления дрейфовым током, текущим в космической плазме. Отличие от классической бесстолкновительной магнитогидродинамики состоит здесь в том, что в приближении Чу–Голдбергера–Лоу квазигидродинамическое уравнение движения модифицируется заменой шарового тензора $\mathbf{P} = p\mathbf{I}$ со скалярным давлением p на тензор теплового давления

$$\mathbf{P} = p_{\perp}\mathbf{I} + (p_{\parallel} - p_{\perp})\mathbf{nn}, \qquad (1)$$

который состоит из компонент давления $p_{\parallel}$ и $p_{\perp}$, параллельных и перпендикулярных к направлению магнитного поля $\mathbf{B}$, соответственно (здесь $\mathbf{n} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$ – единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля, а $\mathbf{I}$ – единичный тензор). Компоненты диагонализированного тензора давления (1) подчиняются следующим законам двойной политропы: $p_{\parallel} \propto \rho^3/B^2$, $p_{\perp} \propto \rho B$, которые являются обобщениями обычного уравнения состояния. Смысл этих соотношений может быть истолкован следующим образом: при сжатии плазмы в направлении магнитного поля величины $p_{\perp}$ и $|\mathbf{B}|$ не изменяются; величины $p_{\parallel}$ и ρ оказываются связанными адиабатическим законом с показателем адиабаты $\gamma = 3$ в соответствии с тем, что увеличивается энергия одной продольной степени свободы; при сжатии плазмы в направлении, перпендикулярном к магнитному полю, давление $p_{\parallel}$ остается постоянным: согласно условию “вмороженности” магнитного поля в бесконечно проводящей плазме, $B \propto \rho$, следовательно, второе уравнение состояния может быть интерпретировано как адиабата с $\gamma = 2$, что свидетельствует об увеличении энергии двух степеней свободы в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{B}$ (см., например, Колесниченко, 2017).

Анизотропия давления порождает плазменные неустойчивости в зависимости от соотношения анизотропии, например, $p > p_{\perp}$ и $p_{\perp} > p$ для “шланговой” и “зеркальной” неустойчивостей, соответственно. Они ответственны за рост магнитной энергии и ускорение частиц. Предсказания на основе модели ЧГЛ, включая новые плазменные неустойчивости, также важны и для слабо намагниченных сред, поскольку даже слабого магнитного поля часто достаточно, чтобы изменить движение заряженных частиц и, следовательно, увеличить анизотропию давления.

В рамках модели ЧГЛ были исследованы различные неустойчивости в межпланетной космической плазме, например, в магнитосферах и плазмосферах планет, в звездных аккреционных дисках с учетом тока Холла, пульсирующего тензора вязких и лучистых напряжений, эффектов радиационной теплопроводности, неоднородности магнитного поля и т.п. (Bhatia, 1968; Bhatia, Chhonka, 1985; Kalra, Hosking, 1970; Dzhalilov и др., 2008; Ren и др., 2011; Cherkos, Tessema, 2013; Kaothekar, Chhajlani, 2013). В этих исследованиях плазма считалась полностью бесстолкновительной, при моделировании которой использовались уравнения ЧГЛ.

Вместе с тем, в целом ряде случаев существуют такие астрофизические ситуации (например, в переходных зонах в структуре плазменных астрофизических объектов), моделирование которых на основе этих уравнений обладает известными ограничениями, приводящими часто к результатам, заметно расходящимся с реальностью. Это затруднение отчасти было устранено в работе Abraham-Shrauner (1973), в которой ею была предложена модель анизотропной плазмы с новыми эвристическими политропными законами, включающими в себя как жидкостные МГД-уравнения для идеальной плазмы (Chandrasekhar, 1961; Hunter, 1972), так и жидкостные уравнения ЧГЛ для бесстолкновительной анизотропной плазмы.

Новые политропные законы для давления, являющиеся обобщением принятых в исходной теории ЧГЛ, имеют вид:

$$p_{\parallel} \propto \rho^{\beta}/B^{\alpha}, \quad p_{\perp} \propto \rho^{\varepsilon} B^{\nu}. \qquad (2)$$

Из этих соотношений, при использовании конкретизированных значений индексов политропы, могут быть получены известные уравнения состояния, соответствующие различным видам плазмы; в случаях:

(i) если $\alpha = 2$, $\beta = 3$ и $\varepsilon = \nu = 1$, то получаются уравнения состояния для ЧГЛ, которые применимы к плазме без столкновений;

(ii) если $\alpha = \nu = 0$ и $\varepsilon = \beta = 5/3$, то получаются уравнения состояния для магнитогидродинамики, которые применимы к идеальной плазменной среде с преобладанием столкновений;

(iii) если $\alpha = \nu = 0$ и $\varepsilon = \beta = 1$, то получаются изотермические уравнения состояния для обоих давлений, применимые к ионно-акустическим модам;

(iv) если $\alpha = 0$ и $\beta = \varepsilon = \nu = 1$, то получается изотермическое уравнение для параллельного давления, действующего вблизи Солнца (Noerdlinger, 1967).

Модифицированные новыми политропическими законами уравнения ЧГЛ также успешно использовались в целом ряде публикаций астрофизической направленности для изучения малоамплитудных гидромагнитных волн возмущения и нахождения новых критериев нестабильности в анизотропных плазмах различного вида (в частности, в плотной квантовой холловской плазме, ультрарелятивистской плазме и т.п. (см., например, Gliddon, 1966; Bhatia, Chhonkar, 1985; Hau и др., 1993; Hau, Sonnerup, 1993; Wang, Hau, 2003; Chou, Hau, 2004; Hau, Wang, 2013; Prajapati, Chhajlani, 2010; Bhakta и др., 2017)).

Следует отметить, что наличие однородного вращения в гравитирующих системах считается наиболее важным явлением, играющим значительную роль в режиме гравитационной неустойчивости (см., например, Sharma, Singh, 1988; Chhajlani, Vyas, 1988; Argal и др., 2014). Большинство подобных исследований было проведено на основе МГД-уравнений, не охватывающих анизотропию давления, которой нельзя пренебрегать в присутствии сильного магнитного поля. А в случае использования моделей ЧГЛ анизотропной бесстолкновительной плазмы исследования проводились раздельно для вращающейся плазмы и плазмы, модифицированной за счет законов двойной политропы. Именно по этой причине, целью данной работы является совместное исследование в рамках модифицированного набора уравнений ЧГЛ неустойчивостей астрофизической плазменной системы с вращением и при учете обобщенных законов политропы. Для этого выводится дисперсионное соотношение, на основе которого получены различные видоизмененные критерии гравитационной неустойчивости Джинса (Jeans, 1902).

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ГИРОТРОПНОЙ ПЛАЗМЫ

Рассмотрим намагниченную бесстолкновительную астрофизическую плазменную систему с анизотропным тензором давления, которая, вращаясь с постоянной угловой скоростью Ω $(\Omega_x, 0, \Omega_z)$, находится под влиянием постоянного сильного магнитного поля $\mathbf{B}$. В этом случае исходные уравнения звездной гидродинамики, записанные при отсутствии некоторых диссипативных эффектов, состоят из следующих модифицированных уравнений ЧГЛ в одножидкостном приближении (к которым добавляется эффект силы Лоренца), уравнения Пуассона и уравнения индукции Фарадея (в идеальном пределе):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\right)\rho + \rho\nabla\cdot\mathbf{V} = 0, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\right)\mathbf{V} = \\ = -\nabla\cdot\mathbf{P} - \rho\nabla\varphi + \frac{1}{4\pi}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} + 2\rho\mathbf{V}\times\Omega,\end{gathered} \tag{4}$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{V}\times\mathbf{B}), \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\right)\frac{p_{\parallel}B^{\alpha}}{\rho^{\beta}} = 0, \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\right)\frac{p_{\perp}}{\rho^{\varepsilon}B^{\nu}} = 0, \tag{7}$$

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho. \tag{8}$$

Здесь $\mathbf{B}$ — полоидальное магнитное поле, направленное вдоль оси $\mathbf{i}_z$, $\mathbf{B} = B_0\mathbf{i}_z$; $\rho(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ — массовая плотность и скорость потока, G — гравитационный потенциал. Остальные символы имеют свои обычные значения. Заметим, что $p_{\perp}(\mathbf{r},t)$ и $p_{\parallel}(\mathbf{r},t)$ в (1) в принципе должны быть суммированы по электронам и ионам (с отдельными давлениями для каждого вида частиц), в то время как ρ и $\mathbf{V}$ (3)–(4) являются плотностью и скоростью потока ионов. Для простоты в этой работе мы ограничимся только ионным давлением (т.е. $p_{\parallel} = p_{ion\parallel}$ и $p_{\perp} = p_{ion\perp}$), что оправдано в пределе холодных электронов (Sharma и др., 2007). Мы также будем пренебрегать неидеальными поправками к уравнению индукции (5) (например, членом Холла), что вполне уместно в случае пренебрежения эффектами конечного ларморовского радиуса.

ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Далее будем предполагать, что в начальном равновесном состоянии пространственно неограниченная анизотропная плазма является однородной. Одновременно будем считать, что магнитное поле, плотность плазмы, анизотропные газовые давления и скорость вращения невозмущенной среды являются постоянными величинами. В этом случае в линеаризованных уравнениях можно пренебречь всеми пространственными производными. Кроме этого, будем считать, что затухание малых возмущений пренебрежимо мало из-за омических потерь. При получении линеаризованных уравнений ограничимся также возмущениями только первого порядка по каждой из физических переменных. Представим теперь физические переменные в виде:

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho(\mathbf{r},t),\quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0(=0) + \mathbf{v}(\mathbf{r},t),$$
$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \delta\mathbf{P}(\mathbf{r},t),$$
$$\mathbf{B} = B_0\mathbf{i}_z + \mathbf{b}(\mathbf{r},t),\quad \varphi = \varphi_0 + \delta\varphi(\mathbf{r},t),$$

где слагаемые с индексом “0” описывают невозмущенные значения, а величины $\mathbf{b} = \left[b_x(\mathbf{r},t), b_y(\mathbf{r},t), b_z(\mathbf{r},t)\right]$, $\mathbf{v} = \left[v_x(\mathbf{r},t), v_y(\mathbf{r},t), v_z(\mathbf{r},t)\right]$, $\delta\rho$, $\delta\varphi$ и $\delta\mathbf{P}$ представляют возмущения первого порядка от равновесных значений магнитного поля, гидродинамической скорости жидкости, массовой плотности жидкости, гравитационного потенциала и тензора давления, соответственно. Тогда, при выполнении всех необходимых разложений, при удержании членов только первого порядка относительно малых возмущений и с учетом сделанных выше упрощающих предположений, система уравнения (1) и (3)–(8) принимает следующий линеаризованный вид:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{P} = \delta p_\perp\mathbf{I} + (\delta p_\parallel - \delta p_\perp)\mathbf{nn} + \\ + (p_\parallel - p_\perp)(\mathbf{n}\,\delta\mathbf{n} + \delta\mathbf{n}\,\mathbf{n}),\end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{\partial\,\delta\rho}{\partial t} = -\rho_0\nabla\cdot\mathbf{v}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla\cdot\delta\mathbf{P} - \rho_0\nabla\delta\varphi + \\ + \frac{1}{4\pi}(\nabla\times\mathbf{b})\times\mathbf{B}_0 + 2\rho_0(\mathbf{v}\times\Omega),\end{aligned} \tag{11}$$

$$\frac{\partial\,\mathbf{b}}{\partial t} = (\mathbf{B}_0\cdot\nabla)\mathbf{v} - \mathbf{B}_0(\nabla\cdot\mathbf{v}),\quad \nabla\cdot\mathbf{b} = 0, \tag{12}$$

$$\nabla^2\delta\varphi = (4\pi\,G)\,\delta\rho, \tag{13}$$

$$\frac{\delta p_\parallel}{p_\parallel} = \beta\frac{\delta\rho}{\rho_0} - \alpha\frac{b_z}{B_0}, \tag{14}$$

$$\frac{\delta p_\perp}{p_\perp} = \varepsilon\frac{\delta\rho}{\rho_0} + \nu\frac{b_z}{B_0}, \tag{15}$$

где

$$\delta\mathbf{n} = \left(\mathbf{b} - \mathbf{n}_0\cdot\mathbf{b}\right)\big/B_0\cdot\mathbf{n}_0 = \mathbf{i}_z. \tag{16}$$

Будем теперь предполагать, что все возмущенные величины $\delta f(\mathbf{r},t)$ изменяются по закону гармонических колебаний

$$\delta f(\mathbf{r},t) \sim \delta f\exp\left(\omega t + \mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right). \tag{17}$$

Здесь δf – независимая от времени и пространства малая амплитуда пульсаций; $\mathbf{k} = k_x\mathbf{i}_x + k_z\mathbf{i}_z$ – волновой вектор, а k_x и k_z – волновые числа соответственно в направлениях x и z, так что $k^2 = k_x^2 + k_z^2$; ω – комплексная частота гармонических колебаний. Очевидно, что если частота ω имеет ненулевую действительную часть, то имеется растущий режим и система будет неустойчивой. В случае, когда частота ω является чисто мнимой, система представляет собой стабильную конфигурацию.

С учетом предположения (17) линеаризованная система дифференциальных уравнений (10), (12)–(15) перейдет в следующую систему алгебраических уравнений:

$$\omega = -\mathrm{i}\,\rho_0\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{\omega}, \tag{18}$$

$$\frac{\mathbf{b}}{B_0} = \mathrm{i}\left[k_z\frac{\mathbf{v}}{\omega} - \mathbf{i}_z\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{\omega}\right],\quad i\mathbf{k}\cdot\mathbf{b} = 0, \tag{19}$$

$$k^2\delta\varphi = -i(4\pi G\rho_0)\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{\omega}, \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta p_\parallel}{p_\parallel} &= \mathrm{i}(\alpha - \beta)\frac{k_x v_x}{\omega} - \mathrm{i}\,\beta\frac{k_z v_z}{\omega},\\ \frac{\delta p_\perp}{p_\perp} &= -\mathrm{i}(\varepsilon + \nu)\frac{k_x v_x}{\omega} - \mathrm{i}\,\varepsilon\frac{k_z v_z}{\omega}.\end{aligned} \tag{21}$$

Уравнение для дивергенции $\nabla\cdot\delta\mathbf{P}$, входящей в линеаризованное уравнение движения (11), принимает тогда вид:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\delta\mathbf{P} = \left[\mathrm{i}\,\delta p_\perp k_x + \mathrm{i}\frac{(p_\parallel - p_\perp)}{B_0}b_x k_z\right]\mathbf{i}_x + \\ + \left[\mathrm{i}\frac{(p_\parallel - p_\perp)}{B_0}b_y k_z\right]\mathbf{i}_y + \\ + \left[\mathrm{i}\,\delta p_\parallel k_z + \frac{(p_\parallel - p_\perp)}{B_0}\mathrm{i}\,b_x k_x\right]\mathbf{i}_z,\end{aligned} \tag{22}$$

или, с учетом (19) и (21), записанной покомпонентно:

$$\begin{aligned}(\nabla\cdot\delta\mathbf{P})_x = \left[(\varepsilon + \nu)p_\perp k_x^2 - (p_\parallel - p_\perp)k_z^2\right]\frac{v_x}{\omega} + \\ + (\varepsilon p_\perp)k_x k_z\frac{v_z}{\omega},\\ (\nabla\cdot\delta\mathbf{P})_y = -(p_\parallel - p_\perp)\,k_z^2\frac{v_y}{\omega},\\ (\nabla\cdot\delta\mathbf{P})_z = (\beta\,p_\parallel)k_z^2\frac{v_z}{\omega} + \\ + \left[(\beta - \alpha)p_\parallel - (p_\parallel - p_\perp)\right]k_z k_x\frac{v_x}{\omega}.\end{aligned} \tag{23}$$

При подстановке соотношений (18), (20) и (21) в линеаризованное уравнение движения (11) получим следующие три уравнения относительно компонент пульсаций скорости v_x, v_y, v_z:

$$\begin{aligned}\left\{\omega^2 + \left(\mathbf{J}_\perp^2 + S_\parallel^2\right)k_x^2 + \Lambda k^2\right\}v_x - \\ - (2\Omega_z\omega)\,v_y + \left(\mathbf{J}_\perp^2 k_x\,k_z\right)v_z = 0,\end{aligned} \tag{24}$$

$$2\Omega_z v_x + \left(\omega + \Lambda k_z^2/\omega\right) v_y - 2\Omega_z = 0, \tag{25}$$

$$\begin{gathered}\left[\mathbf{J}_{\parallel}^2 - (\alpha+1)S_{\parallel}^2 + S_{\perp}^2)\right] k_x k_z v_x + \\ + (2\Omega_x\omega) v_y + \left(\omega^2 + \mathbf{J}_{\parallel}^2 k_z^2\right) v_z = 0.\end{gathered} \tag{26}$$

Здесь введены новые обозначения

$$\begin{gathered}\mathbf{J}_{\parallel}^2 := \beta S_{\parallel}^2 - 4\pi G\rho/k^2, \quad \mathbf{J}_{\perp}^2 := \varepsilon S_{\perp}^2 - 4\pi G\rho/k^2, \\ \Lambda := S_{\perp}^2 - S_{\parallel}^2 + c_a^2,\end{gathered} \tag{27}$$

имеющие следующие значения: $S_{\perp} := \sqrt{p_{\perp}/\rho}$ и $S_{\parallel} := \sqrt{p_{\parallel}/\rho}$ – скорости звука в перпендикулярном и параллельном направлении к магнитному полю, соответственно; $c_{\text{a}} := B/\sqrt{4\pi\rho}$ – альвеновская скорость звука.

Система однородных линейных уравнений (24)–(26) для пульсаций скорости является исходной для дальнейшего анализа динамики малых возмущений в модели разреженной плазмы с анизотропным тензором давления. Эта система имеет решение, отличное от тривиального только в том случае, когда определитель

$$\begin{vmatrix} \omega^2 + \left(\mathbf{J}_{\perp}^2 + S_{\parallel}^2\right)k_x^2 + \Lambda k^2, & -2\Omega_z\omega, & \mathbf{J}_{\perp}^2 k_x k_z \\ 2\Omega_z, & \omega + \Lambda k_z^2/\omega, & -2\Omega_x \\ \left[\mathbf{J}_{\parallel}^2 - (\alpha+1)S_{\parallel}^2 + S_{\perp}^2)\right] k_x k_z, & 2\Omega_x\omega, & \omega^2 + \mathbf{J}_{\parallel}^2 k_z^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{28}$$

матрицы коэффициентов системы (24)–(26) равен нулю.

Опуская несложные выкладки, сразу приведем получаемое при этом общее дисперсионное соотношение для бесконечной однородной плазменной среды

$$\begin{gathered}\left\{\omega^2 + \left[\mathbf{J}_{\perp}^2 + (\nu-1)S_{\perp}^2 + S_{\parallel}^2\right]k_x^2 + \Lambda k^2\right\} \times \\ \times \left\{\left[\omega + \frac{\Lambda}{\omega}k_z^2\right]\left(\omega^2 + \mathbf{J}_{\parallel}^2 k_z^2\right) + 4\Omega_x^2\omega\right\} + \\ + 4\Omega_z\omega\left\{\Omega_x\left[\mathbf{J}_{\parallel}^2 + S_{\perp}^2 - (\alpha+1)S_{\parallel}^2\right] k_x k_z + \right. \\ \left. + \Omega_z\left(\omega^2 + k_z^2\mathbf{J}_{\parallel}^2\right)\right\} + \mathbf{J}_{\perp}^2\left\{4\Omega_x\Omega_z\omega - k_x k_z \times \right. \\ \left. \times \left[\mathbf{J}_{\parallel}^2 + S_{\perp}^2 - (\alpha+1)S_{\parallel}^2\right]\left(\omega + \frac{\Lambda}{\omega}k_z^2\right)\right\} k_x k_z = 0,\end{gathered} \tag{29}$$

которое лежит в основе исследования МГД-волн и различных свойств неустойчивости в замагниченной, самогравитирующей и вращающейся анизотропной плазме без столкновений при учете обобщенных законов двойной политропы. Аналитическое решение этого дисперсионного соотношения, представляющего собой алгебраическое уравнение шестого порядка по параметру ω, в общем случае затруднительно. В работе (Kowal и др., 2011), посвященной анализу турбулентности в плазме без столкновений с использованием трехмерного моделирования уравнений ЧГЛ-МГД, получено численное решение дисперсионного соотношения типа (29), на основе которого были проанализированы новые волновые моды и изучен новый класс кинетических неустойчивостей, таких как “шланговые” и “зеркальные” неустойчивости. Вместе с тем дисперсионное соотношения (29) может быть существенно упрощено при аналитическом рассмотрении по отдельности поперечных, продольных и косых волновых мод.

ПОПЕРЕЧНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ ВОЗМУЩЕНИЯ

В случае поперечного распространения колебательной волны возмущения, когда $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$, соотношение (29) принимает следующий вид

$$\begin{gathered}\left(\omega^2 + 4\Omega_x^2\right)\left\{\omega^2 + \left[\mathbf{J}_{\perp}^2 + (\nu-1)S_{\perp}^2 + S_{\parallel}^2 + \Lambda^2\right]k^2\right\} + \\ + 4\Omega_z\left(\Omega_x + \omega^2\Omega_z\right) = 0.\end{gathered} \tag{30}$$

Проанализируем это соотношение для двух расположений оси вращения Ω системы – вдоль и поперек магнитного поля.

Ось вращения параллельна магнитному полю, $\Omega \parallel \mathbf{B}$

Подставляя координаты $\Omega_x = 0$ и $\Omega_z = \Omega$ вектора угловой скорости вращения в уравнение (30), в результате получим простое алгебраическое уравнение

$$\omega^2 + \left[(\varepsilon+\nu)S_{\perp}^2 + c_{\text{a}}^2\right]k^2 + 4\Omega^2 - 4\pi G\rho = 0, \tag{31}$$

описывающее гравитационные моды, зависящие от политропных индексов и комбинированных эффектов вращения, самогравитации и магнитного поля. Условие существования положительного действительного корня уравнения (31), соответствующее неустойчивости моды самогравитирующей плазменной системы с анизотропным давлением, имеет вид $\omega^2 > 0$. Отсюда получаем модифицированный критерий Джинса

$$k^2 < \frac{4\pi G\rho - 4\Omega^2}{(\varepsilon+\nu)(p_\perp/\rho) + c_a^2}. \qquad (32)$$

Из этого неравенства можно сделать следующий вывод: в случае поперечного распространения волны возмущения, направленной перпендикулярно к оси вращения плазменного облака ($\mathbf{k} \perp \Omega$), вращение и магнитное поле стабилизируют гравитационную неустойчивость. Для бесстолкновительной вращающейся плазмы ЧГЛ, когда политропные индексы равны $\nu = \varepsilon = 1$, критерий (32) приобретает вид:

$$k^2 < 4\frac{\pi G\rho - \Omega^2}{2(p_\perp/\rho) + c_a^2}, \qquad (33)$$

а для МГД-плазмы ($\nu = 0$, $\varepsilon = 5/3$) получим критерий

$$k^2 < 4(\pi G\rho - \Omega^2)\big/(c_s^2 + c_a^2). \qquad (34)$$

Здесь $c_s = \sqrt{5/3\, p_g/\rho}$ — адиабатическая скорость звука в идеальной плазме. Применительно к ионно-акустическим модам ($\nu = 0$, $\varepsilon = 1$), когда справедливы изотермические уравнения состояния для обоих давлений, имеет место следующий критерий неустойчивости разреженной плазмы

$$k^2 < 4\frac{\pi G\rho - \Omega^2}{(p_\perp/\rho) + c_a^2}. \qquad (35)$$

Ось вращения перпендикулярна к магнитному полю, $\Omega \perp \mathbf{B}$

В этом случае дисперсионное соотношение (30) приводит к двум модам распространения возмущающей волны

$$\left(\omega^2 + 4\Omega^2\right)\times \times\left\{\omega^2 + \left[(\varepsilon+\nu)S_\perp^2 + c_a^2\right]k^2 - 4\pi G\rho\right\} = 0. \qquad (36)$$

Первый сомножитель (36), приравниваемый к нулю, $\omega^2 + 4\Omega^2 = 0$, описывает стабильный затухающий режим, связанный с наличием вращения плазменной системы.

Приравниваемый к нулю второй сомножитель, приводит к уравнению

$$\omega^2 + \left[(\varepsilon+\nu)S_\perp^2 + c_a^2\right]k^2 - 4\pi G\rho = 0, \qquad (37)$$

из которого видно, что на этот гравитационный режим влияют политропные индексы, самогравитация и магнитное поле. В этом случае критерий нестабильности задается выражением

$$k^2 < \frac{4\pi G\rho}{(\varepsilon+\nu)(p_\perp/\rho) + c_a^2}. \qquad (38)$$

Таким образом, в случае продольного распространения волны возмущения, направленной перпендикулярно к оси вращения плазменного облака, $\mathbf{k} \perp \Omega$, вращение не влияет на состояние неустойчивости плазмы, которое зависит от самогравитации и значений политропных индексов ε и ν, играющих важную роль в определении критического волнового числа Джинса[1].

Критическое волновое число Джинса в рассматриваемом общем случае задается выражением

$$k_{cr} = 2\rho\sqrt{\pi G\big/\left[(\varepsilon+\nu)p_\perp + B^2/4\pi\right]}, \qquad (39)$$

которое для МГД-уравнений и для набора уравнений ЧГЛ равно соответственно

$$k_{cr} = 2\rho\sqrt{\pi G\big/\left[5p_\perp/3 + B^2/4\pi\right]} \qquad (40)$$

и

$$k_{cr} = 2\rho\sqrt{\pi G\big/\left[2p_\perp + B^2/4\pi\right]}. \qquad (41)$$

Из этих выражений следует, что критическое волновое число Джинса для МГД-уравнений больше по сравнению с набором уравнений ЧГЛ.

ПРОДОЛЬНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ ВОЗМУЩЕНИЯ

В случае продольного распространения мелкомасштабной волны возмущения (когда $k_x = 0$, $k_z = k$) дисперсионное соотношение (29) принимает более простой вид:

$$\omega\left(\omega + \frac{\Lambda}{\omega}k^2\right)\left\{\left[\omega + \frac{\Lambda}{\omega}k^2\right]\left(\omega^2 + J_\parallel^2 k^2\right) + 4\Omega_x^2\omega\right\} + + 4\Omega_z^2\omega\left(\omega^2 + k^2\mathbf{J}_\parallel^2\right) = 0. \qquad (42)$$

Проанализируем также это соотношение для двух расположений оси вращения плазменной системы — вдоль и поперек магнитного поля.

Ось вращения параллельна магнитному полю, $\Omega \parallel \mathbf{B}$

Подставляя в (42) величины $\Omega_x = 0$ и $\Omega_z = \Omega$, в результате получим следующее дисперсионное соотношение

[1] Напомним, что для неустойчивых волн возмущения частота $\omega > 0$, тогда как устойчивость соответствует условию $\omega < 0$. Эти два класса разделяет случай нейтральной устойчивости $\omega = 0$, что соответствует модам с критической длиной волны возмущения. Критическая длина волны возмущения $\lambda_{cr} = 2\pi/k_{cr}$ (для идеального газа: $k_{cr}^2 = \omega_{cr}^2/c_{gs}^2$, $\omega_{cr}^2 = 4\pi G\rho$) является размером мельчайших "капель" рассматриваемой среды, которые могут удерживаться вместе собственным гравитационным притяжением.

$$\left(\omega^2 + \beta S_{\parallel}^2 k^2 - 4\pi G\rho\right)\left\{\left[\omega + \frac{\Lambda}{\omega}k^2\right]^2 + 4\Omega^2\right\} = 0. \quad (43)$$

Это уравнение описывает распространение в направлении магнитного поля продольной волны возмущения для плазмы без столкновений с анизотропным тензором давления и с модифицированными политропными индексами, ось вращения которой параллельна магнитному полю. Уравнение (43) содержит два независимых сомножителя, первый из которых описывает гравитационный режим, на который влияет политропный индекс β, в то время второй сомножитель не зависит от политропных индексов, но зависит от комбинированного эффекта, связанного с вращением и действием магнитным полем.

Приравненный к нулю первый сомножитель

$$\omega^2 + \beta S_{\parallel}^2 k^2 - 4\pi G\rho = 0 \quad (44)$$

приводит к следующему критерию гравитационной неустойчивости моды

$$k^2 < 4\pi G\rho^2 / \beta p_{\parallel}, \quad (45)$$

который зависит от самогравитации и значения политропного индекса β, играющего важную роль в определении критического волнового числа Джинса.

Критическое волновое число Джинса в этом случае задается выражением

$$k_{cr} = 2\rho\sqrt{\pi G / \beta p_{\parallel}}, \quad (46)$$

которое для МГД-уравнений ($\beta = 5/3$) и для набора уравнений ЧГЛ ($\beta = 3$) приводит соответственно к критериям

$$k_{cr} = 2\rho\sqrt{3\pi G / 5 p_{\parallel}} \text{ и } k_{cr} = 2\rho\sqrt{\pi G / 3 p_{\parallel}}.$$

Из этих выражений следует, что критическое волновое число Джинса для МГД-уравнений больше по сравнению с набором уравнений ЧГЛ.

Приравняем теперь к нулю второй сомножитель $\left[\omega + \Lambda k^2/\omega\right]^2 + 4\Omega^2 = 0$ алгебраического уравнения (43). В результате получим

$$\omega^4 + 2\left[2\Omega^2 + \Lambda k^2\right]\omega^2 + \Lambda^2 k^4 = 0. \quad (47)$$

Это дисперсионное соотношение описывает гравитационный режим, включающий в себя влияние магнитного поля, анизотропного давления и вращения, но индексы политропы на него не влияют.

В случае, когда величина $\Lambda = S_{\perp}^2 - S_{\parallel}^2 + c_{\text{a}}^2 > 0$, все коэффициенты уравнения (47) будут положительными. Это означает, что биквадратный многочлен, заданный уравнением (47), будет иметь все корни с отрицательными вещественными частями (или комплексные корни с отрицательными действительными частями) тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры матрицы Гурвица (см., например, Гантмахер, 2010) будут также положительными. Для того чтобы убедиться в выполнении критерий Рауса–Гурвица, выпишем все главные миноры для многочлена, заданного уравнением (47):

$$\begin{aligned} &\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = k^2(S_{\perp}^2 - S_{\parallel}^2 + c_{\text{a}}^2) > 0, \\ &\Delta_3 = 4\Omega^2 > 0, \quad \Delta_4 = 4\Omega^2(S_{\perp}^2 - S_{\parallel}^2 + c_{\text{a}}^2)^2 > 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Поскольку все миноры положительны, то критерий Рауса–Гурвица удовлетворяется. А это означает, что система, представленная уравнением (47), будет в случае выполнения неравенства $S_{\perp}^2 - S_{\parallel}^2 + c_{\text{a}}^2 > 0$ устойчивой.

Уравнение (47) может быть записано в виде биквадратного уравнения для фазовой скорости (так называемых шланговых мод) в виде:

$$v_{\phi}^4 + 2\left[2\Omega^2/k^2 + \Lambda\right]v_{\phi}^2 + \Lambda^2 = 0. \quad (49)$$

Это уравнение является дисперсионным уравнением для волн Альвена с фазовой скоростью $v_{\phi} = \omega/k$, модулированной вращением и анизотропным давлением в различных направлениях.

В случае отсутствия вращения ($\Omega = 0$) оно сводится к простому уравнению $\left(v_{\phi}^2 + \Lambda\right)^2 = 0$, которое имеет решение

$$\begin{aligned} (v_{\phi})_{f,s} &= \pm\sqrt{S_{\parallel}^2 - S_{\perp}^2 - c_{\text{a}}^2} = \\ &= \pm\frac{1}{\sqrt{\rho}}\sqrt{p_{\parallel}^2 - p_{\perp}^2 - B^2/4\pi}. \end{aligned} \quad (50)$$

В отличие от изотропного случая ($p_{\parallel}^2 = p_{\perp}^2$), фазовая скорость альвеновских волн определяется не только магнитным полем, но и анизотропным давлением плазмы. Если $p_{\parallel}^2 - p_{\perp}^2 - B^2/4\pi = 0$, то имеет место нераспространяющаяся мода (резонансный режим, $\omega = 0$),что объясняется абсолютно неупругим возмущением силовых линий магнитного поля. Если справедливо неравенство

$$p_{\parallel}^2 > p_{\perp}^2 + B^2/4\pi, \quad (51)$$

то имеет место нераспространяющийся, неустойчивый режим. Эта неустойчивость, называется шланговой (firehose) неустойчивостью. Физический механизм этой неустойчивости связан с “вмороженностью” силовых линий магнитного поля в бесконечно проводящую плазму. Поскольку в этом случае частицы плазмы привязаны к силовым линиям, то при искривлении силовой линии возникает центробежная сила, пропорциональная энергии продольного движения частиц и стремящаяся увеличить искривление. Если продольное давление велико, то эта сила оказывается больше, чем возвращающие силы, связанные с натяжением силовых линий. В результате силовая линия будет еще больше искривляться по аналогии с поведением шланга, по которому подается сильная струя воды. Таким образом, в однородной анизотропной плазме магнитогидродинамическая сдвиговая альвеновская волна может стать неустойчивой при выполнении условия (50). Заметим, что неустойчивость подобного типа возможна в плазме солнечного ветра (Abraham-Shrauner, 1973).

Ось вращения перпендикулярна к магнитному полю, $\Omega \perp \mathbf{B}$

Подставляя $\Omega_x = \Omega$ и $\Omega_z = 0$ в соотношение (42), в результате получим следующее дисперсионное уравнение

$$\omega\left(\omega + \frac{\Lambda}{\omega}k^2\right)\times \times\left\{\left[\omega + \frac{\Lambda}{\omega}k^2\right]\left(\omega^2 + \mathbf{J}_{\parallel}^2 k^2\right) + 4\Omega^2\omega\right\} = 0, \quad (52)$$

или

$$\omega^6 + \omega^4\left[2k^2\Lambda^2 + \mathbf{J}_{\parallel}^2 k^2 + 4\Omega^2\right] + \omega^2\left[k^4\Lambda^4 + 2\mathbf{J}_{\parallel}^2 k^4\Lambda^2 + 4\Omega^2 k^2\Lambda^2\right] + k^6\Lambda^4\mathbf{J}_{\parallel}^2 = 0. \quad (53)$$

Это уравнение описывает гравитационные режимы, зависящие от политропного индекса β и включающие эффекты магнитного поля и вращения. Критерий гравитационной неустойчивости плазменной анизотропной системы, вытекающий из уравнения (53), в случае положительности параметра $\Lambda > 0$, зависит от постоянного члена; когда $k^2 J_{\parallel}^2 < 0$ он имеет вид:

$$k^2 < 4\pi G\rho/\beta(p_{\parallel}/\rho), \quad (54)$$

что совпадает с критерием (45), полученным для случая продольного распространения волны возмущения, когда ось вращения системы параллельна магнитному полю.

Заметим, что в случае справедливости неравенств

$$\Lambda = S_{\perp}^2 - S_{\parallel}^2 + c_{\text{a}}^2 > 0, \quad J_{\parallel}^2 k^2 = \beta S_{\parallel}^2 k^2 - 4\pi G\rho > 0, \quad (55)$$

уравнение (53) имеет мнимые корни, что является необходимым условием устойчивости системы.

НАКЛОННОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ ВОЗМУЩЕНИЯ

При рассмотрении поперечных и параллельных волн возмущения обращался в нуль последний член в общем дисперсионном соотношении (29), который может играть значительную роль при анализе наклонного распространения возмущенной волны и неустойчивости плазменной системы.

Пусть волна возмущения распространяется с волновым вектором

$$\mathbf{k} = k\sin\theta\mathbf{i}_x + k\cos\theta\mathbf{i}_z, \quad (56)$$

где θ – угол распространения. Тогда, предполагая для простоты отсутствие вращения ($\Omega = 0$), перепишем дисперсионное соотношение (29) в виде:

$$\left(v_{\phi}^2 + \Lambda\cos^2\theta\right)\times \times\left\{\left[v_{\phi}^2 + \left(\mathbf{J}_{\perp}^2 + (\nu - 1)S_{\perp}^2 + S_{\parallel}^2\right)\sin^2\theta + \Lambda\right]\times \times\left(v_{\phi}^2 + \mathbf{J}_{\parallel}^2\cos^2\theta\right) + \mathbf{J}_{\perp}^2\left[(\alpha + 1)S_{\parallel}^2 - \mathbf{J}_{\parallel}^2 - S_{\perp}^2\right]\sin^2\theta\cos^2\theta\right\} = 0, \quad (57)$$

где $v_{\phi} = \omega/k$ – фазовая скорость волновых мод.

Это уравнение содержит два независимых сомножителя, первый из которых описывает режим, на который не влияют политропные индексы, в то время как второй сомножитель зависит как от политропных индексов, так и от эффектов, связанных с магнитным полем и самогравитацией.

Приравнивая к нулю первый сомножитель, получим следующее уравнение для фазовой скорости (так называемых шланговых мод)

$$v_{\phi}^2 - \left(S_{\parallel}^2 - S_{\perp}^2 - c_{\text{a}}^2\right)\cos^2\theta = 0. \quad (58)$$

Уравнение (57) показывает, что на фазовую скорость этих мод индексы политропы не оказывают влияния. Решение этого уравнения

$$(v_{\phi})_{\text{f,s}} = \pm\sqrt{\frac{p_{\parallel}^2 - p_{\perp}^2 - B^2/4\pi}{\rho}}\cos^2\theta \quad (59)$$

описывает волны (их обозначим меткой f, s), которые являются прототипами альвеновских колебаний в обычной изотропной магнитогидродинамике. Если

$$p_{\parallel}^2 > p_{\perp}^2 + B^2/4\pi, \quad (60)$$

то имеется положительный корень уравнения (48) и, следовательно, в этом случае развивается шланговая неустойчивость. Таким образом, критерий неустойчивости бесстолкновительной анизотропной плазменной системы при косом распространении волны возмущения совпадает, в частности, с критерием (41), справедливом для продольного распространения волны. Вместе с тем, решение (58) определяет всевозможные промежуточные режимы (при $\theta \neq 0$) распространения волны для различных значений угла θ. При поперечном режиме распространения волны (когда $\theta = \pi/2$) это решение обращается в нуль. Инкремент неустойчивости имеет максимум при параллельном распространении, когда $\theta = 0$.

Второй сомножитель уравнения (56) приводит к следующему биквадратному уравнению для зависящих от выбора политропных индексов фазовых скоростей:

$$v_\phi^4 + bv_\phi^2 + c = 0, \quad (61)$$

где

$$b = \left[\left((\varepsilon + \nu)S_\perp^2 + c_a^2\right)\sin^2\theta + (\Lambda + \mathbf{J}_\parallel^2)\cos^2\theta\right], \quad (62)$$

$$c = \mathbf{J}_\parallel^2\cos^2\theta\left[\left((\varepsilon + \nu)S_\perp^2 + c_a^2\right)\sin^2\theta + \Lambda\cos^2\theta\right] + \\ + \mathbf{J}_\perp^2\left((\alpha + 1)S_\parallel^2 - S_\perp^2 - \mathbf{J}_\parallel^2\right)\sin^2\theta\cos^2\theta = 0. \quad (63)$$

Решение уравнения (60) имеет вид

$$(v_\phi^2)_{\mathrm{f,s}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \quad (64)$$

Заметим, что при $\alpha = \nu = 0$ и $\varepsilon = \beta = 5/3$ приведенные соотношения аналогичны стандартным изотропным МГД-дисперсиям для медленных (знак минус в уравнении (63)), промежуточных и быстрых режимов (знак плюс в уравнении (63)) в соответствии с упорядочением их фазовых скоростей. В изотропной МГД-плазме поведение корней (63) биквадратного уравнения обсуждалось во многих работах (см., например, Захаров, 1988), в которых приведены все три (быстрые, медленные и промежуточные или альвеновские) диаграммы фазовых скоростей. Подобные диаграммы представляют собой фазовые графики, построенные для характеристической фазовой скорости и значений угла распространения возмущений θ, которые аналогичны диаграммам Фридриха в магнитогидродинамике. В работе (Abraham-Shrauner, 1973) приведены фазовые диаграммы для анизотропной плазмы при использовании обобщенных законов политропного давления.

Таким образом, полученное здесь дисперсионное уравнение (60) описывает как быстрые (f), медленные (s), так и промежуточные режимы распространения возмущенных волн в анизотропной самогравитирующей плазме. Очевидно, что учет гравитационного члена в уравнении (60) изменяет классические три моды гидромагнитных волн.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа посвящена исследованию гравитационной неустойчивости бесконечной вращающейся намагниченной плазмы без столкновений, с анизотропным давлением и при учете модифицированных законов двойной политропы. Основные уравнения рассматриваемой системы построены с использованием комбинированной системы уравнений ЧГЛ и МГД. Общая дисперсионная система уравнений получена с помощью стандартного модового анализа путем построения линеаризованной системы уравнений. На ее основе обсуждаются волновые модовые решения и свойства неустойчивости в трех предельных случаях: для продольного волнового числа, для поперечного волнового числа, а также для наклонного распространения волны возмущения. Распространение волн возмущения рассматривается также как вдоль, так и поперек оси вращения.

Существование анизотропного давления приводит к появлению новых неустойчивых режимов. В частности, для поперечного режима распространения волны возмущения с осью вращения, параллельной направлению магнитного поля, наблюдается уменьшение критического волнового числа Джинса с ростом угловой скорости вращения, что означает стабилизирующее влияние вращения на систему. Было также получено, что область неустойчивости и величина критического волнового числа Джинса больше для системы уравнений ЧГЛ по сравнению с системой МГД-уравнений. В случае распространения возмущающей волны параллельно магнитному полю и с осью вращения, перпендикулярной магнитному полю, получены две отдельные моды, на которые влияют вращение и самогравитация. С целью выявления влияния вращения и самогравитации был выполнен также анализ косого распространения возмущающей волны в анизотропной плазменной системе и получен соответствующий критерий неустойчивости. При этом установлено, что классическое условие неустойчивости шланга остается неизменным из-за наличия равномерного вращения.

Проведенное исследование направлено на изучение разреженных астрофизических гравитационных систем (например, аккреционных протопланетных дисков, магнитосферы и плазмосферы Земли и экзопланет, плазмы звездного ветра, обтекающей Землю и другие планеты Солнечной системы и т.п.), где вращение, наряду с намагниченностью плазмы и анизотропией давления, должны быть значительными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 463 с.

Захаров В.Ю. Волны малой амплитуды в замагниченной плазме без столкновений // Вопросы магнитной гидродинамики плазмы без столкновений в сильглм магнитном поле. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 168 с.

Рудаков Л.И., Сагдеев Р.З. О квазигидродинамическом описании разреженной плазмы, находящейся в магнитном поле // Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 3. С. 268–277.

Колесниченко А.В. К описанию движения разреженной магнитосферной плазмы в сильном магнитном поле // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2017. № 43. 32 с.

Abraham-Shrauner B. Small amplitude hydromagnetic waves for a plasma with a generalized polytrope law // Plasma Physics. 1973. V. 15. № 5. P. 375–385.

Argal S., Tiwari A., Sharma P.K. Jeans instability of a rotating self-gravitating viscoelastic fluid // Europhys. Lett. 2014. V. 108. id. 35003.

Bhatia P.K. Gravitational instability of a rotating anisotropic plasma with the inclusion of finite Larmor radius effect // Z. Astrophysik. 1968. V. 69. S. 363–367.

Bhatia P.K., Chhonkar R.P.S. Instability of rotating isotropic and anisotropic plasmas // Astrophys. and Space Sci. 1985. V. 114. P. 135–149.

Bhakta S., Prajapati R.P., Dolai B. Small amplitude waves and linear firehose and mirror instabilities in rotating polytropic quantum plasma // Phys. Plasmas. 2017. V. 24. id. 082113 (13 p.).

Chandrasekhar S. Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability. Clarendon, 1961. 585 p.

Chew G.F., Goldberger M.L., Low F.E. The Boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1956. V. 236. P. 112–118.

Cherkos A.M., Tessema S.B. Gravitational instability on propagation of MHD waves in astrophysical plasma // J. Plasma Physics. 2013. V. 79. № 5. P. 805–816.

Chou M., Hau L.-N. Magnetohydrodynamic waves and instabilities in homogeneous gyrotropic ultrarelativistic plasma // Astrophys. J. 2004. V. 611. № 2. P. 1200–1207.

Chhajlani R.K., Vyas M.K. Effect of thermal conductivity on the gravitational instability of a magnetized rotating plasma through a porous medium in the presence of suspended particles // Astrophys. and Space Sci. 1988. V. 145. P. 223–240.

Dzhalilov N.S., Kuznetsov V.D., Staude J. Wave instabilities in an anisotropic magnetized space plasma // Astron. and Astrophys. 2008. V. 489. № 2. P. 769–772.

Gliddon E.C. Gravitational instability of anisotropic plasma // Astrophys. J. 1966. V. 145. P. 583–588.

Hau L.-N., Phan T.-D., Sonnerup B.U.O., Paschmann G. Double-polytropic closure in the magnetosheath // Geophys. Res. Lett. 1993. V. 20. № 20. P. 2255–2258.

Hau L.-N., Sonnerup B.U.Ö. On slow-mode waves in an anisotropic plasma // Geophys. Res. Lett. 1993. V. 2. № 17. P. 1763–1766.

Hau L.-N., Wang B.-J. Effects of Hall current and electron temperature anisotropy on proton fire-hose instabilities // Phys. Plasmas. 2013. V. 20. id. 102120 (9 p.).

Hunter C. Self-gravitating gaseous disks // Ann. Rev. Fluid Mech. 1972. V. 4. P. 219–242.

Jeans J.H. The stability of a spherical nebula // Phil. Transact. Roy. Soc. London. Ser. A. Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. 1902. V. 199. P. 1–53.

Kalra G.L., Hosking R.J. Effect of sele-gravitation or finite ion mass on the stability of anisotropic plasma // Astrophys. and Space Sci. 1970. V. 9. P. 34–79.

Kaothekar S., Chhajlani R.K. Jeans instability of self gravitating partially ionized Hall plasma with radiative heat loss functions and porosity // AIP Conf. 2013. Proc. V. 1536. P. 1288–1289.

Kowal G., Falceta-Gonçalves D.A., Lazarian A. Turbulence in collisionless plasmas: statistical analysis from numerical simulations with pressure anisotropy // New J. Physics. 2011. V. 13. P. 053001 (1–23).

Noerdlinger P.D. Anisotropic compression of a relativistic plasma // Phys. Fluids. 1967. V. 10. № 11. P. 2505.

Prajapati R.P., Chhajlani R.K. Effect of pressure anisotropy and flow velocity on Kelvin–Helmholtz instability of anisotropic magnetized plasma using generalized polytrope laws // Phys. Plasmas. 2010. V. 17. id. 112108 (12 p.).

Ren H., Ca J., Wu Z., Chu P.K. Magnetorotational instability in a collisionless plasma with heat flux vector and an isotropic plasma with self-gravitational effect // Phys. Plasmas. 2011. V. 18. № 9. id. 092117 (10 p.).

Sharma R.C. Singh B. Gravitational instability of a rotating and partially-ionized plasma in the presence of variable magnetic field // Astrophys. and Space Sci. 1988. V. 143. P. 233–239.

Sharma P., Quataert E., Hammett G.W., Stone J.M. Electron heating in hot accretion flows // Astrophys. J. 2007. V. 667. P. 714–723.

Wang B.J., Hau L.N. MHD aspects of fire-hose type instabilities // J. Geophys. Res.: Space Phys. 2003. V. 108. № A12. id.1463 (12 p.).