Автоматика и телемеханика, № 1, 2019

Управление в технических системах

© 2019 г. И.С. ПОЛЯНСКИЙ, канд. техн. наук (van341@mail.ru)
(Академия ФСО России, Орёл),
Н.С. АРХИПОВ, д-р техн. наук (arhns97@mail.ru)
(ЗАО «Эврика», Санкт–Петербург),
С.Ю. МИСЮРИН, д-р физ.-мат. наук (ssmmrr@mail.ru)
(Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва)

О РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ АДАПТИВНОЙ МНОГОЛУЧЕВОЙ ЗЕРКАЛЬНОЙ АНТЕННОЙ

Рассмотрено решение задачи оптимального управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной. Задача с применением принципа максимума Понтрягина сведена к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение полученной системы предполагается выполнять численно с использованием современных методов типа Рунге–Кутты и гибридных эволюционных алгоритмов. Оценка вектора состояния выполнена по критерию максимума правдоподобия при решении порожденного стохастического дифференциального уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. При этом функция апостериорной плотности вероятности сопоставлена с нормированным значением плотности потока энергии в раскрыве облучателей. Определена способность подавления помех адаптивной многолучевой зеркальной антенной. Приведен пример решения задачи управления.

Ключевые слова: адаптивная многолучевая зеркальная антенна, подавление помех, уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, принцип максимума Понтрягина.

DOI: 10.1134/S0005231019010069

1. Введение

Теория оптимального приема сигналов средствами многоканальной радиосвязи на фоне помех получила широкое развитие в работах отечественных и зарубежных ученых (таких как О.Е. Антонов, В.Г. Валеев, Г. Ван-Трис, С. Кассама, Д.Д. Кловский, А.П. Лукошкин, Дж. Мелс, Э. Сейдж, В.И. Тихонов, Б. Уидроу, С.Е. Фалькович, Я.Д. Ширман, М.С. Ярлыков и др.) и связана с достижениями антенной техники – появлением антенных решеток (АР). Эти результаты положены в основу корреляционной теории пространственно-временной обработки сигналов (ПВОС), развитой Т. Кайлатцевым, В.Ф. Комаровичем, М.П. Поповым, Ю.Г. Сосулиным, С.С. Щесняком и др. [1], и по сути сориентированы на решение проблемы синтеза адаптивных АР (ААР), инвариантных к воздействию преднамеренных и непреднамеренных помех [2–4]. Наиболее часто во всех определениях в антенной технике упоминается факт априорной известности о направлении на источник полезного сигнала и различие в направлении прихода полезного сигнала

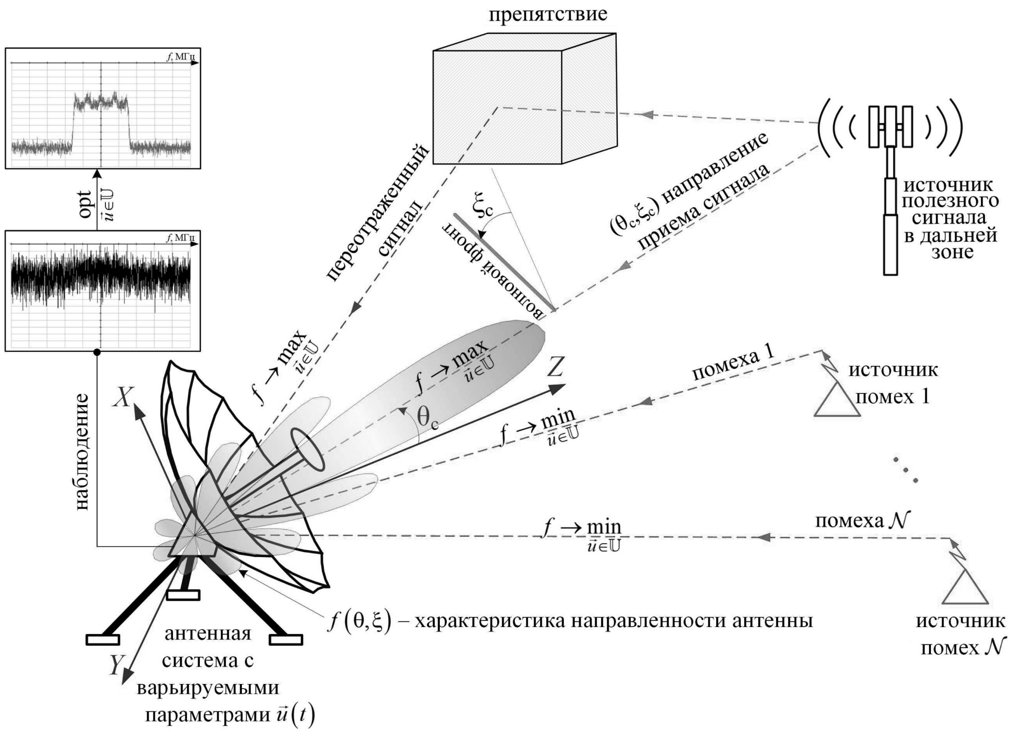

Рис. 1. Адаптация антенной системы к условиям сигнально-помеховой обстановки.

и подавляемых помех. Адаптация антенны сводится к формированию характеристики направленности с провалами (минимумами) в направлениях на источники помех при максимизации уровня полезного сигнала (рис. 1). Энергетические и конструктивно-технологические ограничения антенных решеток для M степеней свободы [3, 5, 6] (M – число элементов ААР) затрудняют эффективное решение указанной проблемы, в частности, и практическое воплощение инвариантной к помеховым сигналам ААР в целом.

Попытки разработки инвариантной к помеховым сигналам антенной системы с учетом достижений адаптивной оптики [7] привели к разработке адаптивных многолучевых зеркальных антенн (АМЛЗА) с деформируемым рефлектором. Зависимость свойств АМЛЗА от особенностей конструкции, взаимного размещения облучающих элементов [8] и формы деформируемого рефлектора [9] приводит к выявлению дополнительных возможностей антенны при реализации ПВОС [10].

В статье рассмотрено решение указанной проблемы с применением разработанных авторами методов анализа и синтеза многолучевых зеркальных антенн [9, 11–14].

2. Содержательная постановка задачи

АМЛЗА представим деформируемым рефлектором и M облучателями (рис. 2). В качестве управляемых параметров выберем [11]: амплитуду $A_m^{(o)}$

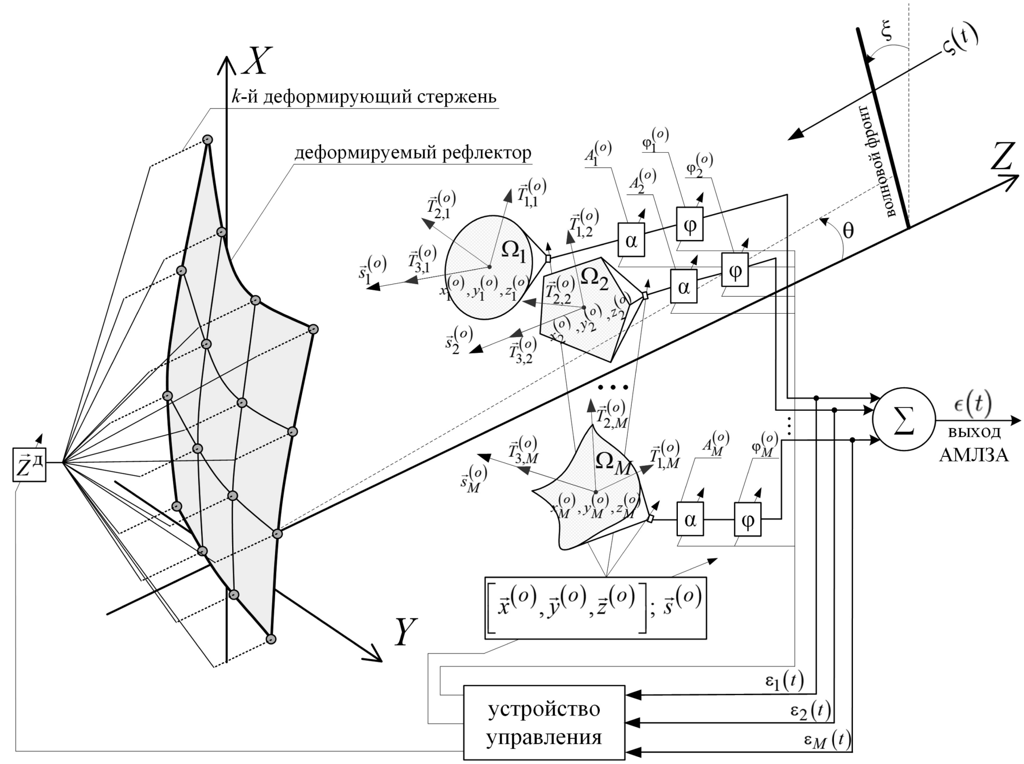

Рис. 2. Обобщенная схема адаптивной многолучевой зеркальной антенны.

и фазу $\varphi_m^{(o)}$ тока возбуждения m-го облучателя; угол $\nu_m^{(o)}$ поворота плоскости Ω_m в системе координат рефлектора; координаты центра раскрыва m-го облучателя – $x_m^{(o)}$, $y_m^{(o)}$, $z_m^{(o)}$; орт нормали $\vec{s}_m^{(o)}$ к плоскости Ω_m, характеризующий ориентацию m-го облучателя; форму отражающей поверхности, формируемую K-мерной системой приводов, которые воздействуют на упругую поверхность отражателя при параметризации переменной $Z_k^{д}$ положения k-го деформирующего стержня относительно оси OZ, где $k = \overline{1, K}$.

Пусть АМЛЗА принимает из дальней зоны с направления (θ, ξ) некоторый сигнал $\varsigma(t)$, заданный электромагнитной волной $\left\{\vec{E}^{(\varsigma)}(t), \vec{H}^{(\varsigma)}(t)\right\}$ с плоским фазовым фронтом, а с выхода АМЛЗА наблюдается суммарный сигнал $\epsilon(t)$, сформированный из сигналов $\tilde{\varsigma}_m(t)$ с выходов m-х облучателей, где $m = \overline{1, M}$. В физическом смысле $\tilde{\varsigma}_m(t)$ характеризуется величиной ЭДС $X_m(t) = \oint\limits_{L_m} \vec{E}_m(t) d\vec{l}$, которая определяется мгновенным значением напряженности электрического поля $\vec{E}_m(t)$, наводимого в режиме приема на некотором замкнутом контуре L_m внутри m-го облучателя. Для определения зависимости между входным $\varsigma(t)$ и выходными $\vec{X}(t) = \left(X_m(t)\right)_M$ значениями рассмотрим задачу дифракции внешнего поля $\left\{\vec{E}^{(\varsigma)}, \vec{H}^{(\varsigma)}\right\}$ с учетом следующих допущений: 1) деформируемый рефлектор представляет собой бесконечно тонкую идеально проводящую гладкую поверхность S'; 2) m-й облучатель представляется объемом V_m, который ограничен раскрывом Ω_m и бесконечно тонкой идеально проводящей поверхностью S_m; 3) V_m задается однородной изотропной средой с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_m^a и μ_m^a; 4) область V_0 распространения ЭМП между рефлектором и облучателями является однородной изотропной средой с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_0^a и μ_0^a. Тогда математическая постановка задачи дифракции $\left\{\vec{E}^{(\varsigma)}(t), \vec{H}^{(\varsigma)}(t)\right\}$ примет вид:

$$\text{(1а)}\quad \nabla\times\vec{H}_{m_0} = -i\varkappa_{m_0}\vec{E}_{m_0}, \quad \nabla\times\vec{E}_{m_0} = i\varkappa_{m_0}\vec{H}_{m_0} \quad \text{в} \quad V_{m_0}, \quad m_0\in\{0,\overline{1,M}\};$$

$$\text{(1б)}\qquad \vec{n}_0\times\vec{E}_0 = 0,\ \vec{n}_0\vec{H}_0 = 0 \text{ на } S';$$

$$\text{(1в)}\qquad \vec{n}_m\times\vec{E}_m = 0,\ \vec{n}_m\vec{H}_m = 0 \text{ на } S_m;$$

$$\text{(1г)}\qquad \begin{cases} \vec{s}_m^{(o)}\times\left(\vec{E}_m - \vec{E}_m^{(o)}\right) = \vec{s}_m^{(o)}\times\vec{E}^{(\varsigma)}, \\ \vec{s}_m^{(o)}\times\left(\vec{H}_m - \vec{H}_m^{(o)}\right) = \vec{s}_m^{(o)}\times\vec{H}^{(\varsigma)} \end{cases} \quad \text{на } \Omega_m,$$

с условиями излучения на бесконечности [15]: $\left\{\vec{E}_{m_0}, \vec{H}_{m_0}\right\} = o\left(R^{-1}\right)$, $R\to\infty$ при $\operatorname{Im}\varkappa_{m_0} > 0$ (Зоммерфельда); $\vec{H}_{m_0}\times\vec{e}_R - \vec{E}_{m_0} = o\left(R^{-1}\right)$, $\vec{E}_{m_0}\times\vec{e}_R + \vec{H}_{m_0} = o\left(R^{-1}\right)$, $\left\{\vec{E}_{m_0}, \vec{H}_{m_0}\right\} = \mathcal{O}\left(R^{-1}\right)$, $R\to\infty$ при $\operatorname{Im}\varkappa_0 = 0$, $\varkappa_0 \neq 0$ на S' и S_m (Сильвера–Мюллера); $\vec{E}_m\times\vec{e}_R + \sqrt{\mu_m^a/\varepsilon_m^a}\vec{H}_m = o\left(R^{-1}\right)$, $\vec{H}_m = \mathcal{O}\left(R^{-1}\right)$, $R\to\infty$ при $\operatorname{Im}\varkappa_m = 0$, $\varkappa_m \neq 0$ на Ω_m (Сильвера–Мюллера в слабой форме [16]). Здесь $\vec{n}_0$ и $\vec{n}_m$ – орты векторов нормалей к S' и S_m соответственно; $\left\{\vec{E}_m^{(o)}, \vec{H}_m^{(o)}\right\}$ – ЭМП в Ω_m; $\varkappa_{m_0} = \omega\sqrt{\varepsilon_{m_0}^a\mu_{m_0}^a}$ – волновое число; $\omega = 2\pi/\lambda$ – круговая частота; $R = |\vec{r}|$; $\vec{e}_R = \vec{r}/|\vec{r}|$; $\vec{r}\in\mathbb{R}^3$.

С целью снижения вычислительных затрат для решения задачи (1) в масштабе времени, близком к реальному, примем дополнительное допущение на то, что ЭМП, приходящее в $\Omega_m\backslash\partial\Omega_m$, полностью передается в соответствующую фидерную линию (т. е. $|\Gamma_m|\to 0$, где $|\Gamma_m|$ – коэффициент отражения для m-го облучателя) [11]. Введенное допущение позволяет декомпозировать общую задачу (1) на последовательное решение задач (1а), (1б), (1г) и (1а), (1в), (1г) – задач электродинамики в неограниченной и ограниченной расчетных областях при задании соответствующих функций $P_2^{\langle m\rangle} : \vec{E}^{(\varsigma)}(t) \to \vec{E}_m^{(o)}(t)$ и $P_1^{\langle m\rangle} : \vec{E}_m^{(o)}(t) \to \vec{E}_m(t)$. Функцию $P_1^{\langle m\rangle}$ определения $\vec{E}_m(t)$ предполагается задавать векторным барицентрическим методом [13] по заданному распределению ЭМП $\vec{E}_m^{(o)}(t)$ в раскрыве Ω_m, которое формируется рефлектором в режиме приема. Функцию $P_2^{\langle m\rangle}$ определения $\vec{E}_m^{(o)}(t)$ предполагается задавать модифицированным токовым методом [12] или барицентрическим методом при численном решении сингулярных интегральных уравнений [14] с учетом заданных постановок задач дифракции на ограниченном экране и отверстии в плоском экране [15].

Для заданной электродинамической постановки, рассматривая величину ЭДС с выходов m-х облучателей марковским векторным процессом

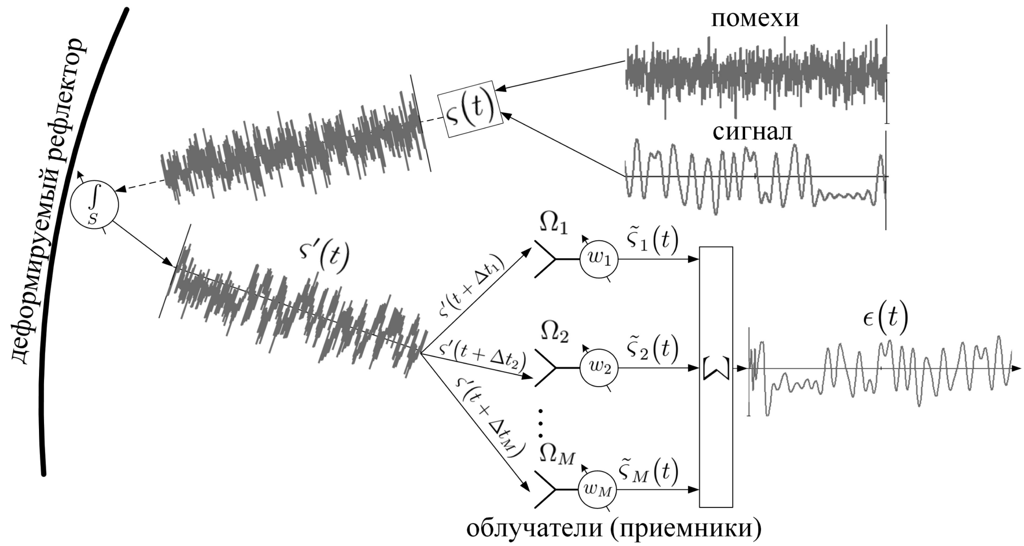

Рис. 3. Пространственно-распределенное множество сигналов для АМЛЗА.

$\vec{X}(t) = \left(X_m(t)\right)_M$, в общей форме при представлении пространственно-распределенного множества сигналов (рис. 3) и задании зависимости от управления $\vec{u}_t \stackrel{def}{=} \vec{u}(t)$ [18] априорные сведения о АМЛЗА определим из уравнений состояния

$$\dot{\vec{X}}_t = \vec{D}^{\langle\mu\rangle}\left(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t\right) + \mathbf{D}^{\langle\sigma\rangle}\left(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t\right)\vec{V}_t \quad \text{при} \quad \vec{X}_{t_0} = \vec{X}_0 \tag{2}$$

и наблюдения

$$\vec{\tilde{\varsigma}}_t = \vec{h}\left(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t\right) + \vec{W}_t, \tag{3}$$

где $\vec{X}_t \stackrel{def}{=} \vec{X}(t)$; $\dot{\vec{X}}_t = \left(dX_m(t)/\,dt\right)_M$; $\vec{\tilde{\varsigma}}_t \stackrel{def}{=} \vec{\tilde{\varsigma}}(t)$; $\vec{D}^{\langle\mu\rangle}\left(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t\right) = \left(D_m^{\langle\mu\rangle}\right)_M$ и $\mathbf{D}^{\langle\sigma\rangle}\left(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t\right) = \left(D_{mm'}^{\langle\sigma\rangle}\right)_{M\times M}$ – вектор сноса и матрица диффузии; $\vec{V}_t \stackrel{def}{=} \vec{V}(t)$ – белый гауссовский нормированный вектор-шум, наблюдаемый при помощи векторного нелинейного наблюдателя (3); t_0 – начальный момент времени; $\vec{X}_0$ – начальное распределение векторного процесса $\vec{X}(t)$; $\vec{h}\left(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t\right)$ – нелинейная векторная функция наблюдателя, задающая выходную характеристику облучающих элементов; $\vec{W}_t \stackrel{def}{=} \vec{W}(t)$ – гауссовский белый шум с нулевым средним и матрицей интенсивностей $E\left[\vec{W}_t\vec{W}_\tau^{\mathrm{T}}\right] = \mathbf{D}^{\langle W\rangle}(t)\delta(t-\tau)$.

Решение стохастического дифференциального уравнения (2) предполагается выполнять при его понимании в смысле Ито (см. с. 148 в [17]).

Оптимальное управление предполагает получение для заданного момента времени t наилучшей оценки $\hat{\vec{X}}_t$ векторного процесса $\vec{X}_t$.

3. Оптимальная фильтрация вектора наблюдений адаптивной многолучевой зеркальной антенны

Оценку $\hat{\vec{X}}_t$ векторного процесса $\vec{X}_t$ предполагается получить по критерию максимума правдоподобия функции апостериорной плотности вероятности (АПВ) $\rho\left(\vec{X}_t, t\right) = \rho\left(\vec{X}_t, t \middle| \vec{\varsigma}_\tau,\ \tau \in [t_0, t]\right)$, которая удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК) [20]:

$$(4)\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{m,m'=1}^{M} \frac{\partial^2}{\partial X_m \partial X_{m'}}\left[\rho G^{\langle 2\rangle}_{mm'}\right] - \sum_{m=1}^{M} \frac{\partial}{\partial X_m}\left[\rho G^{\langle 1\rangle}_{m}\right] \ \text{ при } \ \rho\left(\vec{X}_{t_0}, t_0\right) = \rho_0,$$

где

$$\vec{G}^{\langle 1\rangle}\left(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t\right) = \left(G^{\langle 1\rangle}_m\right)_M \quad \text{при} \quad G^{\langle 1\rangle}_m = D^{\langle \mu\rangle}_m = \lim_{\Delta\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta}\left\langle\left[X^{\langle m\rangle}_{t+\Delta} - X^{\langle m\rangle}_t\right] \middle| \vec{\varsigma}_\tau\right\rangle\right\};$$

$$\mathbf{G}^{\langle 2\rangle}\left(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t\right) = \left(G^{\langle 2\rangle}_{mm'}\right)_{M\times M} \quad \text{при} \quad G^{\langle 2\rangle}_{mm'} = \sum_{j=1}^{M} D^{\langle \sigma\rangle}_{mj} D^{\langle \sigma\rangle}_{jm'}$$

$$\text{и} \quad D^{\langle \sigma\rangle}_{mm'} = \lim_{\Delta\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta}\left\langle\left[X^{\langle m\rangle}_{t+\Delta} - X^{\langle m\rangle}_t\right]\left[X^{\langle m'\rangle}_{t+\Delta} - X^{\langle m'\rangle}_t\right] \middle| \vec{\varsigma}_\tau\right\rangle\right\}.$$

Сведем оценку $\hat{\vec{X}}_t$ при согласовании решений внешней и внутренней задач электродинамики [11] к определению плотности потока энергии $\mathcal{J}_m(x, y, t)$, формируемого в Ω_m в режиме приема.

Т е о р е м а 1. *Пусть наблюдается* $\vec{\varsigma}_t$ *по правилу* (3), *тогда нормированное значение* $\tilde{\mathcal{J}}_m(x, y, t) = \mathcal{J}_m(x, y, t) \Big/ \int\limits_{\Omega_m} \mathcal{J}_m(x, y, t)\, d\Omega$ *плотности потока энергии* $\mathcal{J}_m(x, y, t)$ *ЭМП в точке* $(x, y) \in \Omega_m$ *АМЛЗА удовлетворяет уравнению*

$$(5)\qquad \frac{\partial \tilde{\mathcal{J}}_m}{\partial t} = A_m \tilde{\mathcal{J}}_m + \vec{B}_m \nabla \tilde{\mathcal{J}}_m + \left(\nabla \mathbf{C}_m \nabla^{\mathrm{T}}\right)\tilde{\mathcal{J}}_m.$$

В выражении (5) $\tilde{\mathcal{J}}_m = \tilde{\mathcal{J}}_m(x, y, t)$; $\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ — оператор набла; $A_m = \frac{1}{2}\sum\limits_{m'=1}^{M} \frac{\partial^2 G^{\langle 2\rangle}_{mm'}}{\partial X_m \partial X_{m'}} - \frac{\partial G^{\langle 1\rangle}_m}{\partial X_m}$; $\vec{B}_m = b_m\left\{\left(\frac{\partial X_m}{\partial x}\right)^{-1}, \left(\frac{\partial X_m}{\partial y}\right)^{-1}\right\}$ при $b_m = -G^{\langle 1\rangle}_m + \sum\limits_{m'=1}^{M} \frac{\partial G^{\langle 2\rangle}_{mm'}}{\partial X_{m'}}$; $\mathbf{C}_m = c_m \begin{pmatrix} \left(\partial^2 X_m/\partial x^2\right)^{-1} & \left(\partial^2 X_m/\partial x \partial y\right)^{-1} \\ \left(\partial^2 X_m/\partial y \partial x\right)^{-1} & \left(\partial^2 X_m/\partial y^2\right)^{-1} \end{pmatrix}$ при $c_m = \left[\left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2}\right)^{-1} + \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial x \partial y}\right)^{-1} + \left(\frac{\partial^2 X_m}{\partial y^2}\right)^{-1}\right]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Относительно выхода m-го облучателя АМЛЗА m-я функция АПВ $\rho_m = \rho_m\left(\vec{X}_t, t \middle| \vec{\varsigma}_\tau,\ \tau \in [t_0, t]\right)$ векторного процесса $\vec{X}_t$ с учетом (4) будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{m'=1}^{M} \frac{\partial^2}{\partial X_m \partial X_{m'}}\left[\rho_m G^{\langle 2\rangle}_{mm'}\right] - \frac{\partial}{\partial X_m}\left[\rho_m G^{\langle 1\rangle}_{m}\right]. \tag{6}$$

Применив формулу дифференцирования произведения функций уравнение (6) представим в виде

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = A_m \rho_m + b_m \frac{\partial \rho_m}{\partial X_m} + \frac{1}{2}\sum_{m'=1}^{M} G^{\langle 2\rangle}_{mm'} \frac{\partial^2 \rho_m}{\partial X_m \partial X_{m'}}. \tag{7}$$

Учитывая функции $P_1^{\langle m\rangle} : \vec{E}_m^{(o)} \to \vec{E}_m$, $P_2^{\langle m\rangle} : \vec{E}^{(\varsigma)} \to \vec{E}_m^{(o)}$ и $X_m = \oint\limits_{L_m} \vec{E}_m d\vec{l}$, установим зависимость составляющих X_m от $(x, y) \in \Omega_m$, заданных в соответствующих системах координат в раскрывах m-х облучателей. Для установленной зависимости $X_m = X_m(x, y)$ проведем преобразование координат фазового пространства с плотностью вероятности $\tilde{\rho}_m(x, y, t) = \rho_m(X_m, t)\sqrt{\left(\frac{\partial X_m}{\partial x}\right)^{-2} + \left(\frac{\partial X_m}{\partial y}\right)^{-2}}$ [17] в стохастическом дифференциальном уравнении (7) с применением правил дифференцирования сложных функций и с учетом $\mathbf{C}_m = \mathbf{C}_m^{\mathrm{T}}$ представим его в квадратичной форме:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_m}{\partial t} = A_m \tilde{\rho}_m + \vec{B}_m \nabla \tilde{\rho}_m + \left(\nabla \mathbf{C}_m \nabla^{\mathrm{T}}\right)\tilde{\rho}_m. \tag{8}$$

Для условий: $\int\limits_{\Omega_m} \tilde{\rho}_m(x, y, t)\, d\Omega = 1$; $\tilde{\rho}_m(x, y, t) = 0$, $\forall (x, y) \in \Omega_{m'}$, $m' \neq m$; $\tilde{\rho}_m(x, y, t) \geq 0$, $\forall (x, y) \in \Omega_m$ и определения значений функций АПВ $\tilde{\rho}_m$ относительно величины ЭДС, снимаемой с выходов m-х облучающих элементов, справедлива характеристика $\tilde{\rho}_m$ нормированным значением плотности потока энергии ЭМП в раскрывах m-х облучателей Ω_m, т.е. $\tilde{\mathcal{J}}_m(x, y, t) = \tilde{\rho}_m(x, y, t)$.

Полученные представления позволяют задать уравнение (8) относительно $\tilde{\mathcal{J}}_m = \tilde{\rho}_m = \tilde{\mathcal{J}}_m(x, y, t)$ в матричной форме (5), что и требовалось доказать.

Решение краевой задачи (5) предполагается выполнять численно в приближении барицентрического метода при определении аппроксимации Ритца функции $\tilde{\mathcal{J}}_m$ соотношением $\tilde{\mathcal{J}}_m(x, y, t) = \sum\limits_{j \in \mathbb{M}_r} I_j^{\langle m\rangle}(t)\, \alpha_j^{\langle m\rangle}(x, y)$, в котором [19]:

$$\alpha_j^{\langle m\rangle}(x, y) = \prod_{n=1}^{N_m} \beta_{j_n}^{\langle m\rangle}(x, y);\ \beta_{j_n}^{\langle m\rangle}(x, y) = \prod_{k=1}^{j_n}\left[\left(r\zeta_n^{\langle m\rangle}(x, y) - k + 1\right)\Big/ k\right], \tag{9}$$
$$j_n > 0,\ \beta_0^{\langle m\rangle}(x, y) = 1,\ (x, y) \in \Omega_m,$$

где $I_j^{\langle m\rangle}(t)$ – величина нормированного значения плотности потока энергии в j-х узловых точках раскрыва Ω_m m-го облучателя в момент времени t;

$\zeta_n^{\langle m\rangle}(x,y)$ – барицентрические координаты, определяемые в Ω_m по правилам [21] при представлении Ω_m произвольным многоугольником из N_m вершин; r – порядок аппроксимации полиномом $\alpha_j^{\langle m\rangle}(x,y)$; j – мультииндекс из множества $\mathbb{M}_r$:

$$\mathbb{M}_r = \left\{ j = (j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots, j_{N_m}) : j_n \in \mathbb{Z},\, j_n \geq 0,\, \sum_{n\in[1;N_m]} j_n = r \right\}. \tag{10}$$

Для заданной аппроксимации в приближении вариационных методов Галеркина и Ритца при определении зависимости от времени и управления сведем задачу (5) к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), представленной в матричном виде:

$$\dot{\vec{I}}^{\langle m\rangle}(t) - \mathbf{Q}_m(\vec{u}_t, t)\,\vec{I}^{\langle m\rangle}(t) = 0, \tag{11}$$

где

$$\vec{I}^{\langle m\rangle}(t) = \left(I_j^{\langle m\rangle}(t)\right)_{|\mathbb{M}_r|}; \quad \dot{\vec{I}}^{\langle m\rangle}(t) = \left(dI_j^{\langle m\rangle}(t)/dt\right)_{|\mathbb{M}_r|};$$

$$\mathbf{Q}_m(\vec{u}_t, t) = \left(Q_{jj'}^{\langle m\rangle}(\vec{u}_t, t)\right)_{|\mathbb{M}_r|\times|\mathbb{M}_r|} \quad \text{при} \quad Q_{jj'}^{\langle m\rangle}(\vec{u}_t, t) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_m} \left\{ \left[A_m(\vec{u}_t, t)\,\alpha_j^{\langle m\rangle} + \vec{B}_m(\vec{u}_t, t)\cdot\nabla\alpha_j^{\langle m\rangle} + \left(\nabla\mathbf{C}_m(t)\,\nabla^{\mathrm{T}}\right)\alpha_j^{\langle m\rangle} \right] \alpha_{j'}^{\langle m\rangle} \right\} d\Omega.$$

4. Оптимальное управление адаптивной многолучевой зеркальной антенной

Полученные результаты позволяют несколько упростить известные решения, применяемые при синтезе стохастических оптимальных систем [18]. С учетом (11) и связью максимума правдоподобия с минимумом эмпирического риска (средние потери) [22] сформулируем задачу оптимального в среднем управления АМЛЗА при минимизации квадратичной функции потерь

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} F\left(\vec{I}_\tau^{\langle 1\rangle}, \ldots, \vec{I}_\tau^{\langle M\rangle}, \vec{u}_\tau, \tau\right) d\tau \to \min_{\vec{u}(\cdot)\in\mathbb{U}} \tag{12}$$

для заданного уравнения динамики

$$\dot{\vec{I}}_t^{\langle m\rangle} = \mathbf{Q}_m(\vec{u}_t, t)\,\vec{I}_t^{\langle m\rangle}, \tag{13}$$

и начального условия

$$\vec{I}_{t_0}^{\langle m\rangle} = \vec{I}_0^{\langle m\rangle}, \tag{14}$$

где

$$\vec{I}_t^{\langle m\rangle} \overset{def}{=} \vec{I}^{\langle m\rangle}(t); \quad F\left(\vec{I}_t^{\langle 1\rangle}, \ldots, \vec{I}_t^{\langle M\rangle}, \vec{u}_t, t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\sum_{j\in\mathbb{M}_r}\left(I_j^{\langle m\rangle}(t) - J_j^{\langle m\rangle}(\vec{u}_t, t)\right)^2; \quad \vec{J}^{\langle m\rangle}(\vec{u}_t, t) = \left(J_j^{\langle m\rangle}(\vec{u}_t, t)\right)_{|\mathbb{M}_r|}$$

— рассчитываемое по методам [12, 13] распределение нормированных значений плотности потока энергии в j-х узловых точках раскрыва Ω_m m-го облучателя в момент времени t для заданных значений вектора управления $\vec{u}_t$; $t \in [t_0, t_1]$; $[t_0, t_1]$ – отрезок времени управления; $\mathbb{U}$ – множество допустимых управлений.

Значения вектора $\vec{J}^{\langle m \rangle}(\vec{u}_t, t)$ для аппроксимационных полиномов (9) при $\tilde{J}_m^{\mathrm{p}}(\vec{u}_t, x, y, t) = \sum\limits_{j \in \mathbb{M}_r} J_j^{\langle m \rangle}(\vec{u}_t, t)\, \alpha_j^{\langle m \rangle}(x, y)$ определяется из решения задачи $\int\limits_{\Omega_m} \left| \tilde{J}_m(\vec{u}_t, x, y, t) - \tilde{J}_m^{\mathrm{p}}(\vec{u}_t, x, y, t) \right|^2 d\Omega \to \min$ соотношением

$$\vec{J}^{\langle m \rangle}(\vec{u}_t, t) = \mathbf{T}_m^{-1} \vec{J}_m^{\alpha}(\vec{u}_t, t), \tag{15}$$

где

$\mathbf{T}_m = \left(T_{jj'}^{\langle m \rangle} \right)_{|\mathbb{M}_r| \times |\mathbb{M}_r|}$ – метрическая матрица Ω_m при $T_{jj'}^{\langle m \rangle} = \int\limits_{\Omega_m} \alpha_j^{\langle m \rangle} \alpha_{j'}^{\langle m \rangle} d\Omega$ [13]; $\vec{J}_m^{\alpha}(\vec{u}_t, t) = \left(J_{m,j}^{\alpha}(\vec{u}_t, t) \right)_{|\mathbb{M}_r|}$ при $J_{m,j}^{\alpha}(\vec{u}_t, t) = \int\limits_{\Omega_m} \tilde{J}_m(\vec{u}_t, t)\, \alpha_j^{\langle m \rangle} d\Omega$; $\tilde{J}_m(\vec{u}_t, t) = \tilde{J}_m(\vec{u}_t, x, y, t)$, а $\tilde{J}_m(\vec{u}_t, x, y, t)$ задается соотношением [11]

$$\tilde{J}_m(\vec{u}_t, x, y, t) = \frac{\left| \vec{E}_m^{(o)}(\vec{u}_t, x, y, t) \times \vec{H}_m^{(o)}(\vec{u}_t, x, y, t) \right|}{\int\limits_{\Omega_m} \left| \vec{E}_m^{(o)}(\vec{u}_t, x, y, t) \times \vec{H}_m^{(o)}(\vec{u}_t, x, y, t) \right| d\Omega}, \tag{16}$$

при оценке мгновенных значений напряженностей электрического $\vec{E}_m^{(o)}(\vec{u}_t, x, y, t)$ и магнитного $\vec{H}_m^{(o)}(\vec{u}_t, x, y, t)$ полей функциями $P_2^{\langle m \rangle}$ в раскрывах m-х облучателей $(x, y) \in \Omega_m$ – задача (1а), (1б), (1г).

Решение задачи (12)–(14) выполним с применением принципа максимума Понтрягина [23]. Функцию Гамильтона определим в виде:

$$\begin{gathered} \mathcal{H}\left(\vec{I}_t^{\langle 1 \rangle}, \ldots, \vec{I}_t^{\langle M \rangle}, \vec{\psi}_t^{\langle 1 \rangle}, \ldots, \vec{\psi}_t^{\langle M \rangle}, \vec{u}_t, t \right) = \\ = F\left(\vec{I}_t^{\langle 1 \rangle}, \ldots, \vec{I}_t^{\langle M \rangle}, \vec{u}_t, t \right) - \sum_{m=1}^{M} \left[\left(\vec{\psi}_t^{\langle m \rangle} \right)^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_m(\vec{u}_t, t)\, \vec{I}_t^{\langle m \rangle} \right], \end{gathered} \tag{17}$$

где $\vec{\psi}_t^{\langle m \rangle} \overset{def}{=} \vec{\psi}^{\langle m \rangle}(t)$; $\vec{\psi}^{\langle m \rangle}(t) = \left(\psi_j^{\langle m \rangle}(t) \right)_{|\mathbb{M}_r|}$ – вспомогательный вектор импульсов управления.

Таким образом, итоговую задачу управления АМЛЗА для (17) сведем к решению системы ОДУ, включающей с учетом (13) и начального условия (14) для $m=\overline{1,M}$, $j\in\mathbb{M}_r$ следующие уравнения:

$$\begin{aligned}(18)\quad &\sum_{m=1}^{M}\sum_{j\in\mathbb{M}_r}\left\{\frac{\partial J_j^{\langle m\rangle}(\vec{u}_t,t)}{\partial\vec{u}_t}\left(I_j^{\langle m\rangle}(t)-J_j^{\langle m\rangle}(\vec{u}_t,t)\right)+\right.\\ &\left.+\psi_j^{\langle m\rangle}(t)\sum_{j'\in\mathbb{M}_r}\frac{\partial Q_{jj'}^{\langle m\rangle}(\vec{u}_t,t)}{\partial\vec{u}_t}I_{j'}^{\langle m\rangle}(t)\right\}=0;\end{aligned}$$

$$(19)\quad \frac{d\psi_j^{\langle m\rangle}(t)}{dt}=\sum_{m=1}^{M}\left\{\left(I_j^{\langle m\rangle}(t)-J_j^{\langle m\rangle}(\vec{u}_t,t)\right)-\sum_{j'\in\mathbb{M}_r}\psi_{j'}^{\langle m\rangle}(t)\,Q_{j'j}^{\langle m\rangle}(\vec{u}_t,t)\right\}.$$

Общее решение задачи (13),(14),(18),(19) предлагается осуществлять численно при построении алгоритма адаптации АМЛЗА по рекуррентно-итерационной модели [24]. Алгоритм формируется для следующих обозначений и условий: $\tau\in[t_0,t_1]$; непрерывные значения элементов вектора наблюдения (3) оцифровываются на интервале управления (N отсчетов, $n=\overline{0,N-1}$) с учетом теоремы Котельникова при $\Delta=(\tau_{n+1}-\tau_n)\le\frac{1}{2f_c}$, где f_c – ширина полосы принимаемого сигнала; каждый интервал $[\tau_n,\tau_{n+1}]$ дискретизируется отсчетами $v=0,1,2,\dots,$ (число отсчетов определяет степень точности численного решения). Основные этапы работы алгоритма:

1) максимально-правдоподобная оценка плотности потока энергии $\vec{I}^{\langle m\rangle}(\tau_{n+1})$ в раскрывах облучателей в дискретный момент времени τ_{n+1}:

– в дискретные моменты времени $\tau_v^n\in[\tau_n,\tau_{n+1}]$ учет наблюдения $\vec{\bar{\zeta}}_{\tau_v^n}$ (3);

– для принятых значений отсчетов ($v=0,1,2,\dots,$) вектора сигналов $\vec{\bar{\zeta}}_{\tau_v^n}$ вычислить элементы, составляющие $\vec{G}^{\langle 1\rangle}\left(\vec{\bar{\zeta}}_\tau,\vec{u}_n,\tau\right)$ и $\mathbf{G}^{\langle 2\rangle}\left(\vec{\bar{\zeta}}_\tau,\vec{u}_n,\tau\right)$ ($\vec{u}_n=$ $=\vec{u}(\tau_n)$) в (6) относительно вектора сноса и матрицы диффузии соответственно с учетом правил из [25];

– в анализируемый момент времени τ_{n+1} функциями $P_1^{\langle m\rangle}$ и $P_2^{\langle m\rangle}$, задаваемыми методами [12, 14] и [13] соответственно, рассчитать элементы матрицы $\mathbf{Q}_m(\vec{u}_n,\tau_{n+1})$;

– вычислить приближенные значения $\vec{I}^{\langle m\rangle}(\tau_{n+1})$ и $\vec{\psi}^{\langle m\rangle}(\tau_{n+1})$ при решении уравнений (13),(19) для момента времени τ_{n+1} с использованием экономичных явных схем типа Рунге–Кутты [26, 27] с учетом выбранного числа отсчетов $v=0,1,2,\dots,$ на $[\tau_n,\tau_{n+1}]$;

2) вычисление вектора управляющих воздействий $\vec{u}_{n+1}$ для момента времени τ_{n+1} при решении уравнения (18) для $m=\overline{1,M}$ с применением комбинированных эволюционных методов [28] и учетом заданной оценки $\vec{I}^{\langle m\rangle}(\tau_{n+1})$ и $\vec{\psi}^{\langle m\rangle}(\tau_{n+1})$ на $[\tau_n,\tau_{n+1}]$.

Вычисление частных производных в (18) по вектору управления для $\vec{J}^{\langle m\rangle}(\vec{u}_t,t)$ выполнено аналитически с учетом (15), (16) и функций $P_1^{\langle m\rangle}$ и $P_2^{\langle m\rangle}$, задаваемых методами [12, 14] и [13] соответственно, а для $\mathbf{Q}_m(\vec{u}_t,t)$ – численно с учетом указанных правил дискретизации интервалов и подынтервалов управления. Отметим, что применение принципа максимума при подобном решении (разделение общей задачи управления на (13), (19) и (18) на интервале дискретизации $[\tau_n, \tau_{n+1}]$) необходимо ввиду невозможности удовлетворить условию стационарности (требуется при решении задачи управления (12)–(14) при раздельном решении (13) и (18) на интервале дискретизации $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ без введения вспомогательных векторов импульсов управления).

5. Подавление помех адаптивной многолучевой зеркальной антенной

Заданные соотношения (13), (18), (19) с учетом критерия (12) согласно результатам, полученным в корреляционной теории ПВОС [2, 3], соответствуют стандартному критерию качества ААР – максимум отношения правдоподобия. Целесообразность его использования заключается в том, что в большинстве возможных случаев единственная априорная информация о полезном сигнале состоит в известности направления его возможного прихода. Для полученных результатов в сравнении с теорией ААР [3, 5, 6] возникает дополнительный интерес в оценке числа степеней свободы АМЛЗА.

Утверждение 1. Пусть задана АМЛЗА, включающая M облучателей и деформируемый рефлектор с K устройствами деформации, тогда, принимая полезный сигнал $\varsigma(t)$ с направления (θ, ξ), АМЛЗА максимально способна подавить $\mathcal{N} = MK - 1$ помеховых сигналов $\eta_n(t)$, которые приходят с направлений $(\theta_n, \xi_n) \neq (\theta, \xi)$, где $n = \overline{1, \mathcal{N}}$.

Доказательство. С учетом принципа обратимости процессов приема и передачи для заданной модели приемной АМЛЗА (рис. 2, 3) изначально отметим, что для доказательства справедливо рассматривать антенну и как передающую. Из теории ААР известно [3], что изменением амплитуды $A_m^{(o)}$ и фазы $\varphi_m^{(o)}$ токов возбуждения m-х реальных источников ЭМП (облучателей) можно добиться подавления $M-1$ помеховых сигналов при формировании $M-1$ нулей диаграммы направленности (ДН) весовыми коэффициентами $w_m^{(o)} = A_m^{(o)} e^{i\varphi_m^{(o)}}$, где $i = \sqrt{-1}$. При этом ноль ДН в некотором направлении задается интерференцией когерентных волн антенны, равных по амплитуде и противоположных по фазе. Число M весовых коэффициентов $w_m^{(o)}$ определяет число степеней свободы ААР. Исходя из принципа Гюйгенса–Френеля АМЛЗА содержит M весовых коэффициентов $w_m^{(o)}$, параметризующих совокупность реальных источников (облучателей), и весовой коэффициент $w^{(p)}$, параметризующий комплексную амплитуду совокупности фиктивных вторичных источников (рефлекторов). Рассмотрим $w^{(p)}$ в качестве скалярного потенциала в точке Θ. Из интегральной теоремы Кирхгофа – Гельмгольца известно, что мгновенное значение $w^{(p)}(t, \Theta)$ определяется соотношениями [16]

$$
\begin{aligned}
&w^{(p)}(t,\Theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v^{(p)}(\omega,\Theta)\, e^{-i\omega t} d\omega; \\
&v^{(p)}(\omega,\Theta) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{\partial v^{(p)}}{\partial \vec{n}_0} \frac{e^{-i\varkappa R}}{R} - v^{(p)} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_0} \left(\frac{e^{-i\varkappa R}}{R} \right) \right\} dS,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

где $\varkappa = \omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$; ε_a и μ_a – электрический и магнитный параметры среды; ω – угловая частота; R – расстояние между Θ и точкой интегрирования на поверхности S; $\vec{n}_0$ – орт вектора нормали к S в точке интегрирования.

Задав аппроксимацию функции $v^{(p)} = \sum\limits_{k=1}^{K} v_k^{д} \alpha_k^{д}(x, y)$ под знаком второго интеграла (20) в некоторой K-мерной системе ортогональных функций деформации формы $\alpha_k^{д}(x, y)$, введенных, например, в [19], приведем (20) к виду

$$w^{(p)}(t, \Theta) = \sum_{k=1}^{K} A_k^{(p)}(t, \Theta)\, e^{i\varphi_k^{(p)}(t,\Theta)}, \tag{21}$$

где $A_k^{(p)}$ и $\varphi_k^{(p)}$ характеризуются амплитудой и фазой соответствующего комплексного числа

$$w_k^{(p)} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_k^{д} e^{-i\omega t} \oint\limits_{S} \left\{ \frac{\partial \alpha_k^{д}}{\partial \vec{n}_0} \frac{e^{-i\varkappa R}}{R} - \alpha_k^{д} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_0} \left(\frac{e^{-i\varkappa R}}{R} \right) \right\} dS d\omega. \tag{22}$$

Полученные соотношения (21), (22) определяют то, что при параметризации поверхности рефлектора [19] положением $X_k^{д}, Y_k^{д}, Z_k^{д}$ деформирующих стержней (приводов [29]) $z(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{K} Z_k^{д} \delta\left(x - X_k^{д}\right) \delta\left(y - Y_k^{д}\right)$ число степеней свободы рефлектора равно K.

Поскольку k-е весовые функции $w_k^{(p)}$ являются фиктивными вторичными источниками излучения m-х облучателей $\left(m = \overline{1, M}\right)$, общее число степеней свободы АМЛЗА равно MK. Таким образом, принимая смесь, включающую один полезный и $\mathcal{N}$ помеховых сигналов, АМЛЗА способна подавить $MK - 1$ помех, что и требовалось доказать.

С учетом полученных результатов, закона необходимого разнообразия при $K \to \infty$ возможно доказать следующее утверждение.

Следствие 1. Существует конструкция адаптивной многолучевой зеркальной антенны, инвариантной к воздействию помех.

6. Результаты моделирования и их обсуждение

Для верификации полученных решений в Matlab проведено математическое моделирование задачи оптимального управления АМЛЗА, состоящей из трех рупорных облучателей с треугольным, прямоугольным и круглым раскрывами. Поверхность деформируемого рефлектора исходно задана параболическим цилиндром. Параметры синтезируемой антенной системы следующие: средняя длина волны $\lambda = 0{,}05$ м из спектра принимаемого сигнала, радиус вписанной в раскрывы облучателей окружности $1{,}25\lambda$ (раскрывы заданы правильными многоугольниками), ширина раскрыва рефлектора по оси OX 20λ, длина раскрыва рефлектора по оси OY 30λ, фокусное расстояние $f = 40\lambda$, исходная поверхность деформируемого рефлектора $Z(x, y) = 0{,}25\left(x^2 + y^2\right)/f$, направление приема сигнала $\varsigma(t)$ выбрано в

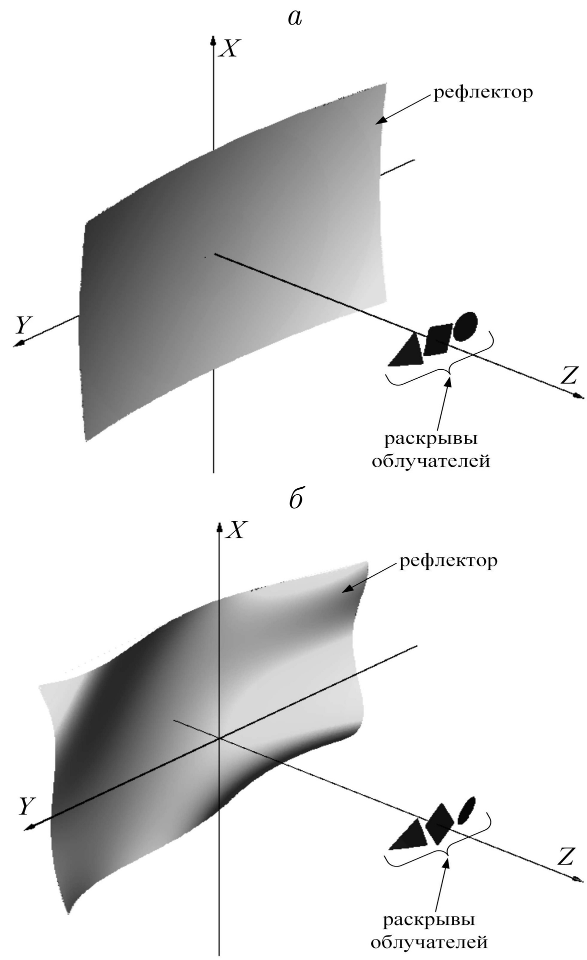

Рис. 4. Геометрия АМЛЗА до (*а*) и после (*б*) адаптации.

H-плоскости для угла отклонения $\theta = 0°$. Адаптивная антенна принимает сигнал $\varsigma(t)$ с информационной скоростью 512 кБит/с и модуляцией QPSK при воздействии в H-плоскости трех некоррелированных помеховых сигналов $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, $\eta_3(t)$ в соответствующих углах отклонения $\theta_1 = -10°$, $\theta_2 = -5°$, $\theta_3 = 8°$. Предполагается, что облучатели подключены к прямоугольным волноводам с шириной 0,7λ и высотой 0,4λ (для моделируемой задачи граница раскрыва волновода – L_m). Исходное положение координат центров раскрывов облучателей выбрано по критерию максимальной концентрации геометрооптических лучей [8] с подбором соответствующих амплитудно-фазовых распределений токов возбуждения [30] для заданного направления прихода сигнала $\varsigma(t)$. Число деформирующих стержней K выбрано равным 25 при определении положения их воздействия на отражающую поверхность рефлектора по правилам из [19].

На рис. 4 представлены геометрии АМЛЗА: исходная и реализованная после решения задачи адаптивного приема. На рис. 5 отражены реализуемая

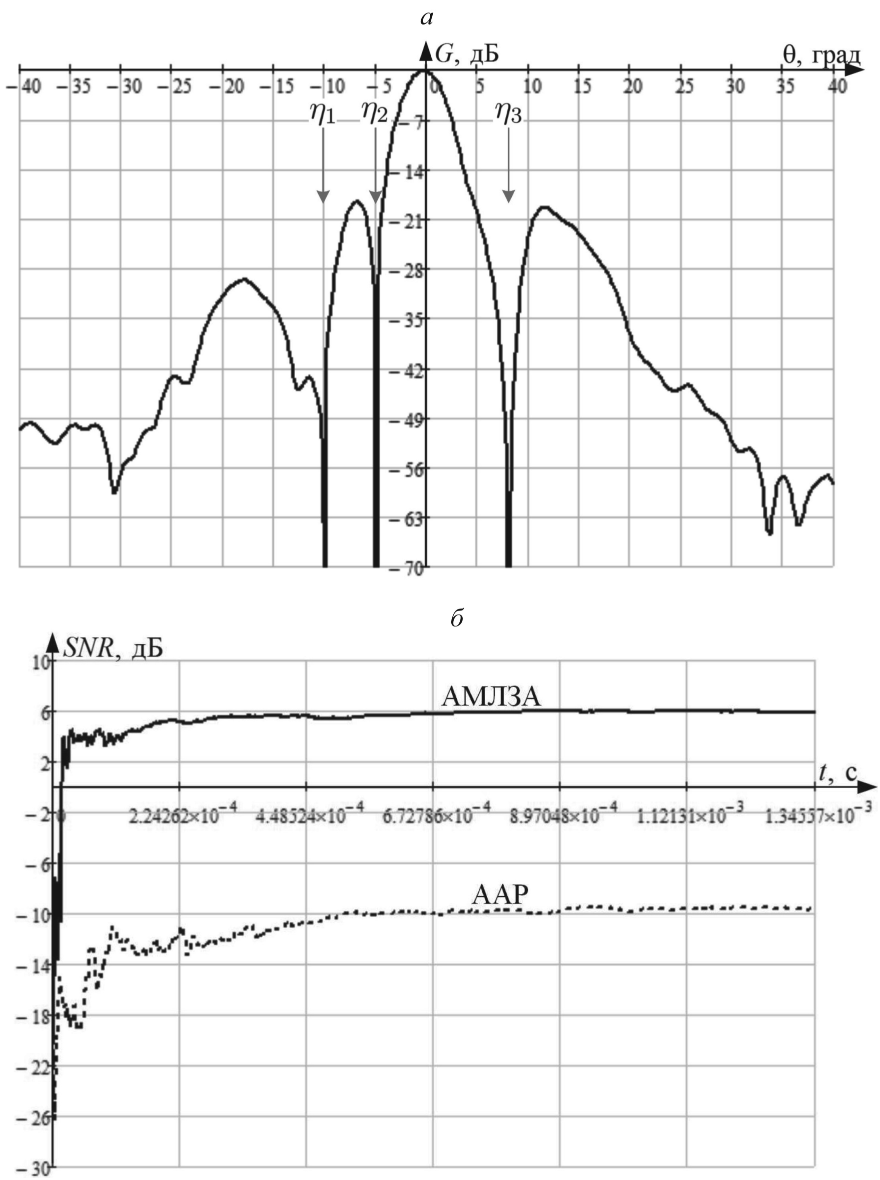

Рис. 5. ДН АМЛЗА после адаптации (*а*) и временная зависимость *SNR* (*б*).

средняя ДН [31] при адаптивном приеме и временная зависимость отношения сигнал/(шум плюс помеха) *SNR* при адаптации. Для определения предпочтительности применения АМЛЗА график временной зависимости *SNR* (рис. 5,*б*) построен в сравнении с ААР, состоящей из трех элементов и формирующей в направлении приема сигнала $\varsigma(t)$ аналогичный АМЛЗА коэффициент усиления. Адаптивный прием сигнала ААР (рис. 5,*б*) реализован рекурсивным алгоритмом адаптации [32] при оценке ковариационной матрицы посредством калмановской фильтрации по критерию максимума *SNR* [6].

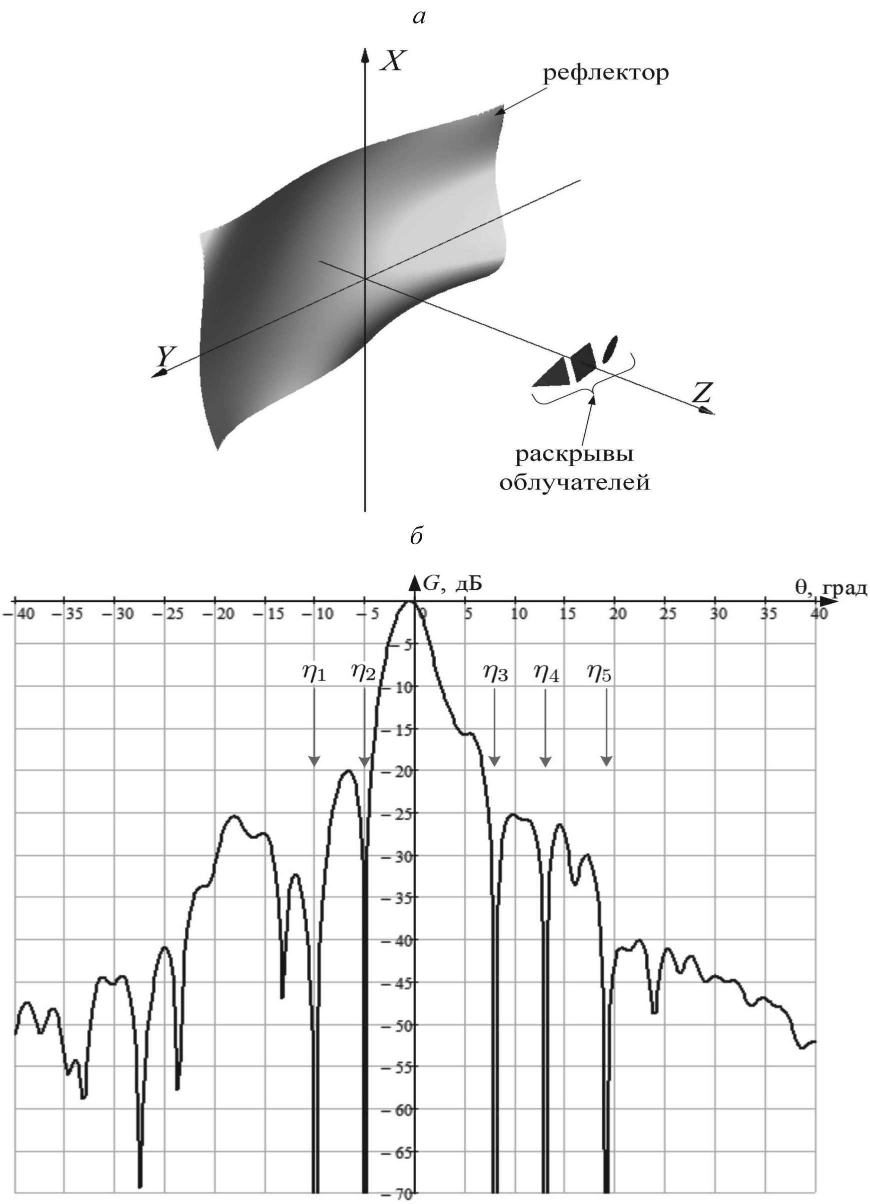

Рис. 6. Геометрия АМЛЗА (a) и реализуемая средняя ДН ($б$) после адаптации.

Для заданной конструкции АМЛЗА оптимальное соотношение SNR формируется на 150–200-м такте работы рекурсивного алгоритма ($t \approx 1,21 \cdot 10^{-4}$ с, см. рис. 5,$б$), реализуя в направлениях $\theta_1 = -10°$, $\theta_2 = -5°$, $\theta_3 = 8°$ прихода помех $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, $\eta_3(t)$ нули ДН (рис. 5,a). В случае включения в адаптивную модель дополнительных двух некоррелированных помеховых сигналов $\eta_4(t)$, $\eta_5(t)$ в соответствующих углах отклонения $\theta_4 = 13°$, $\theta_5 = 19°$ геометрия АМЛЗА после адаптации и реализуемая средняя ДН примут вид, представленный на рис. 6.

Полученные результаты моделирования (рис. 4–6) на наглядном примере определяют предпочтительность использования АМЛЗА в сравнении с ААР по потенциальной возможности адаптации к условиям сигнально-помеховой обстановки при исходной эквивалентности интегральных характеристик направленности сравниваемых антенн.

7. Заключение

Полученные в работе соотношения (13),(18),(19) с учетом принципа максимума Понтрягина [23] задают обобщенную постановку задачи оптимального управления АМЛЗА, определяя в качестве состояния антенной системы распределение нормированного значения плотности потока энергии в раскрывах облучателей (13). Уравнение состояния (13) определено в приближении барицентрического метода [13, 19] аппроксимацией (9) при сведении стохастического дифференциального уравнения ФПК (4) к начально-краевой задаче (5). Для сформированной постановки задачи оптимального управления определена способность подавления помеховых сигналов АМЛЗА, равная $MK - 1$, где M – число облучателей, K – число деформирующих отражающую поверхность рефлектора устройств деформации. Полученные решения, подкрепленные результатами математического моделирования (рис. 4–6), определяют предпочтительность применения в современных системах беспроводной связи АМЛЗА. Для реализации эффективных алгоритмов оптимального управления АМЛЗА предлагается использовать аналитические и численные методы решения внешней и внутренней задач электродинамики для многолучевых зеркальных антенн, разработанные авторами [9, 11–14, 19, 28] с последующим возможным развитием предложенного решения в направлении применения тестовых сигналов второго типа [6] (априорной известности структуры передаваемого сигнала) при соответствующем выборе вместо критерия МОП (12) других критериев адаптивных антенн (МСКО, МСШП, ММВС, МСПП [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сосулин Ю.Г., Костров В.В.* Оценочно-корреляционно-компенсационная обработка сигналов на фоне помех // Радиотехника. 2006. № 9(51). С. 1027–1065.
2. *Сосулин Ю.Г., Костров В.В., Паршин Ю.Н.* Оценочно-корреляционная обработка сигналов и компенсация помех. М.: Радиотехника, 2014.
3. *Щесняк С.С., Попов М.П.* Адаптивные антенны. СПб.: Изд-во ВКИКА им. А.Ф. Можайского, 1995.
4. *Weiner M.M.* Adaptive antennas and receivers. Boca Raton; London: CRC Taylor & Francis, 2006.
5. *Ada Poon, Robert W. Brodersen, David Tse.* Degrees of Freedom in Multiple-Antenna Channels: A Signal Space Approach // IEEE Transact. Inform. Theory. V. 51(2). March 2005. P. 523–536.
6. Пистолькорс А.А., Литвинов О.С. Введение в теорию адаптивных антенн. М.: Наука, 1991.
7. *Madec P-Y.* Overview of deformable mirror technologies for adaptive optics and astronomy // Adaptiv. Optics Syst. III, Ellerbroek, Marchetti, Veran Eds, Proc. SPIE V. 8447. 2012.

8. *Arkhipov N.S., Velikikh A.S., Karpov A.V., Polyanskii I.S.* An Algorithm for Generating the Cluster Groups of Hybrid Mirror Antenna Radiators // Telecommun. Radio Engineer. 2013. No. 72(2). P. 147–160.
9. *Сомов А.М., Полянский И.С., Степанов Д.Е.* Синтез отражающих поверхностей антенной системы зеркального типа с использованием барицентрического подхода при параметризации рефлектора // Антенны. 2015. № 8. С. 11–19.
10. *Архипов Н.С., Захаров И.С., Чаплыгин И.А.* Представление гибридных зеркальных антенн в виде пространственных и угловых фильтров // Телекоммуникации. 2000. № 3. С. 29–37.
11. *Архипов Н.С., Полянский И.С., Сомов А.М.* Анализ и структурно-параметрический синтез зеркальных антенн: под ред. А.М. Сомова. М.: Горячая линия – Телеком, 2017.
12. *Сомов А.М., Архипов Н.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е.* Расчет диаграммы направленности зеркальных антенн в приближении методов физической оптики и физической теории дифракции // Тр. НИИР. 2015. № 2. С. 43–53.
13. *Полянский И.С.* Векторный барицентрический метод в вычислительной электродинамике // Тр. СПИИРАН. 2017. № 2(51). С. 206–222.
14. *Полянский И.С., Пехов Ю.С.* Барицентрический метод в решении сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн // Тр. СПИИРАН. 2017. № 5(54). С. 244–262.
15. *Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г.* Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М.: ИПРЖР, 1996.
16. *Colton D., Kress R.* Integral equation methods in scattering theory. Philadelphia: SIAM, 2013.
17. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем: Уч. пос. для вузов. М.: Радио и связь, 2004.
18. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. М.: Изд-во МАИ, 2012.
19. *Полянский И.С.* Барицентрический метод в задаче оптимального управления формой отражающей поверхности зеркальной антенны // Мат. моделирование. 2017. Т. 29. № 11. С. 140–150.
20. *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. 4-е изд., испр. и доп. СПб.: Изд-во политехн. ун-та, 2010.
21. *Полянский И.С.* Барицентрические координаты Пуассона-Римана // Тр. СПИИРАН. 2016. № 6(49). С. 32–48.
22. *Klebanov L., Rachev S.T., Fabozzi F.* Robust and Non-Robust Models in Statistics. N.Y.: Nova Scientific Publishers, 2009.
23. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1968.
24. *Блюмин С.Л., Погодаев А.К.* Рекуррентно-итерационные алгоритмы адаптивной идентификации нелинейных динамических сосредоточенных систем // АиТ. 2003. № 10. С. 80–87.

    Blumin S.L., Pogodaev A.K. Recursive Iterative Algorithms for Adaptive Identification of Nonlinear Concentrated Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 10. P. 1583–1588.
25. *Полянский И.С., Патронов Д.Ю.* Максимально правдоподобная оценка дисперсионно-ковариационной матрицы // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 1. URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=8516

26. *Olemskoy I.V., Eremin A.S., Kovrizhnykh N.A.* Embedded methods of order six for special systems of ordinary differential equations // Appl. Math. Sci. 2017. V. 11. No. 1. P. 31–38.

27. *Kreinin G.N., Misyurin S.Yu.* Choice of the law for a position control system // J. Machin. Manufact. Reliabilit. 2012. V. 41. No. 4. P. 331–336.

28. *Полянский И.С., Степнов Д.Е., Фролов М.М.* Гибридный генетический метод с градиентным обучением и прогнозированием для решения задач глобальной оптимизации многоэкстремальных функций // Вестн. БГТУ. 2014. № 3(43). С. 138–146.

29. *Kreinin G.V., Misyurin S.Yu.* A systematic approach to synthesis of a drive system // J. Machin. Manufactur. Reliabilit. 2011. V. 40. No. 6. P. 507–511.

30. *Архипов Н.С., Полянский И.С., Сахончик В.Д.* Алгоритм формирования характеристики излучения многолучевой гибридной зеркальной антенны // Тр. НИИР. 2012. С. 68–78.

31. *Шифрин Я.С.* Вопросы статистической теории антенн. М.: Сов. радио, 1970.

32. *Джиган В.И.* Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы. М.: Техносфера, 2013.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 28.03.2018

После доработки 04.06.2018

Принята к публикации 08.11.2018