Автоматика и телемеханика, № 10, 2019

© 2019 г. М. ВАЙЧЮЛИС, канд. физ. наук (marijus.vaiciulis@mii.vu.lt)
(Вильнюсский университет),
Н.М. МАРКОВИЧ, д-р физ.-мат. наук (nat.markovich@gmail.com, markovic@ipu.rssi.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

КЛАСС СЕМИПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ТЯЖЕСТИ ХВОСТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ[1]

Предлагается новый класс семипараметрических оценок хвостового индекса, основанный на довольно общем классе семипараметрических статистик. Доказывается асимптотическая нормальность предлагаемых оценок. Проводится их сравнение с несколькими ранее предложенными оценками хвостового индекса посредством асимптотической среднеквадратической ошибки. Для вычисления оценок предлагается алгоритм, который применяется к нескольким последовательностям реальных данных.

Ключевые слова: хвостовой индекс, оценка Хилла, нормальное распределение, асимптотическая средне-квадратическая ошибка.

DOI: 10.1134/S0005231019100039

1. Введение

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – выборка независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных чисел (сл.в.) с неизвестной функцией распределения (ф.р.) $F(x)$. В статье формулируются предположения авторов в терминах квантильной функции U, связанной с F, которая определяется как

$$U(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leqslant 1, \\ \inf\{x: \ F(x) \geqslant 1 - (1/t)\}, & t > 1. \end{cases}$$

А именно предполагается, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^{\gamma} \tag{1}$$

для всех $x > 0$ и некоторого $\gamma > 0$. Напомним, что любая неотрицательная функция U, удовлетворяющая соотношению (1) с $\gamma \in \mathbb{R}$, принадлежит классу функций с регулярно меняющимся правым хвостом, т.е. $U \in RV_{\gamma}$. В теории экстремальных величин параметр $\gamma > 0$ называется хвостовым индексом. Он показывает тяжесть правого хвоста распределения. Во многих областях,

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Маркович Н.М. Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 19-01-00090).

таких как метереология, гидрология, климатология, экология, телекоммуникации, страхование и финансы, распределения с функцией U, удовлетворяющей (1), рекомендованы как реалистичные модели исследуемых данных. Поэтому задача оценивания хвостового индекса распределения привлекает много внимания последние годы. Большая часть предлагаемых в публикациях оценок хвостового индекса основана на порядковых статистиках $X_{1,n} \leqslant \leqslant X_{2,n} \leqslant \ldots \leqslant X_{n,n}$ наблюдений $X_1, \ldots, X_n$, см. обзор в [1].

Несколько семипараметрических оценок хвостового индекса можно записать, используя статистики, предложенные в [2]:

$$G_n(k,r,v) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} g_{r,v}\left(\frac{X_{n-i,n}}{X_{n-k,n}}\right), \quad g_{r,v}(x) := x^r \ln^v(x), \tag{2}$$

где $r \in \mathbb{R}$, $v > -1$. Например, оценку Хилла [3] $\gamma_n^{(H)}(k) = G_n(k,0,1)$ или оценку отношения моментов $\hat{\gamma}_n^{(mr)}(k) = G_n(k,0,2)\left(2G_n(k,0,1)\right)^{-1}$, которая была предложена в [4]. Отметим, что статистики $G_n(k,r,v)$ являются частным случаям статистик, введенных в [5].

В настоящей статье предлагается новый класс семипараметрических оценок хвостового индекса γ относительно параметра r, определяемых как

$$\hat{\gamma}_n(k,r) = \begin{cases} \left(G_n(k,r,0) - 1 - r\cdot G_n(k,0,1)\right)\left(r\left(G_n(k,r,0)-1\right)\right)^{-1}, & r \neq 0, \\ \hat{\gamma}_n^{(mr)}(k), & r = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Параметризованная оценка $\hat{\gamma}_n(k,r)$, как и статистики $G_n(k,r,v)$, зависит от двух параметров: от числа наибольших порядковых статистик $1 \leqslant k \leqslant \leqslant n-1$, используемых в оценке, и от параметра настройки (регуляризации) r. Существует непрерывность в отношении r в (3), поскольку выполнено $\lim_{r\to 0}\hat{\gamma}_n(k,r) = \hat{\gamma}_n^{(mr)}(k)$. Более того, $\lim_{r\to -\infty}\hat{\gamma}_n(k,r) = \gamma_n^{(H)}(k)$. В этой связи класс оценок $\hat{\gamma}_n(k,r)$ обобщает две классические оценки. Отметим, что оценки $\hat{\gamma}_n(k,r)$, так же как и статистики $G_n(k,r,v)$, являются инвариантными относительно масштаба, т.е. они не меняются при замене наблюдений $X_1, \ldots, X_n$ на $cX_1, \ldots, cX_n$, где $c > 0$.

Цели статьи следующие: (a) исследовать асимптотические свойства, включая слабую сходимость и асимптотическую нормальность новых оценок; (b) сравнить предлагаемые оценки с некоторыми другими оценками хвостового индекса; (c) предложить алгоритм для адаптивного оценивания γ по выборке с помощью новых оценок и применить этот алгоритм к нескольким выборкам реальных данных.

Содержание статьи следующее. В разделе 2 формулируются основные асимптотические результаты. Кроме того, используя ту же методологию, что и в [6], проводится сравнение параметризованной оценки $\hat{\gamma}_n(k,r)$ с другими параметризованными оценками хвостового индекса. В разделе 3 обсуждаются некоторые вопросы, относящиеся к практическому применению введенной оценки. В разделе 4 содержатся выводы. В Приложении приводятся доказательства основных результатов.

2. Основные результаты

Перед формулировкой результатов введем несколько обозначений. Пусть $\xrightarrow{\text{p}}$ обозначает сходимость по вероятности, $\xrightarrow{\text{d}}$ – сходимость по распределению, а $\stackrel{\text{d}}{=}$ – равенство по распределению.

Первый результат непосредственно вытекает из теоремы 1.1 в [2].

Т е о р е м а 1. *Предположим, что $X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения F такой, что ее функция квантилей U удовлетворяет условию* (1). *Пусть $\gamma r < 1$. Пусть последовательность $k = k_n$ такова, что*

$$k_n \to \infty, \qquad n/k_n \to \infty, \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Тогда $\hat{\gamma}_n(k, r) \xrightarrow{\text{p}} \gamma$, $n \to \infty$.

Чтобы доказать асимптотическую нормальность любой оценки параметра $\gamma > 0$ одного предположения (1) недостаточно. А именно, нужна дополнительная информация о скорости сходимости $U(tx)/U(t)$ к x^γ, см. гл. 2.3 в [7]. Поэтому предположим, что существует измеримая функция $A(t)$, не меняющая знак при больших t, не равная нулю и такая, что $A(t) \to 0$ при $t \to \infty$ так, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)/U(t) - x^\gamma}{A(t)} = f_\rho(x), \quad f_\rho(x) = \frac{x^\rho - 1}{\rho} \tag{5}$$

для каждого $x > 0$, где $\rho < 0$ называется параметром второго порядка.

Главным результатом статьи является следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Предположим, что $X_1, \ldots, X_n$ – н.о.р. сл.в. с ф.р. F, функция квантилей которой U удовлетворяет условию* (5). *Пусть $\gamma r < 1/2$. Пусть последовательность $k = k_n$ удовлетворяет условиям* (4) *и*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{k} A\left(\frac{n}{k}\right) = \mu \tag{6}$$

с конечным μ.

Тогда

$$\sqrt{k}\left(\hat{\gamma}_n(k, r) - \gamma\right) \xrightarrow{\text{d}} \mathcal{N}\left(\mu\nu(r), \gamma^2\sigma^2(r)\right), \quad n \to \infty, \tag{7}$$

где $\mathcal{N}(\cdot, \cdot)$ обозначает нормальное распределение и

$$\nu(r) = \frac{1 - \gamma r}{(1-\rho)(1 - \gamma r - \rho)}, \quad \sigma^2(r) = \frac{2(1 - \gamma r)}{1 - 2\gamma r}. \tag{8}$$

Напомним, что асимптотическая среднеквадратичная ошибка для $\hat{\gamma}_n(k, r)$ определяется соотношением

$$\mathrm{E}\left(\hat{\gamma}_n(k, r) - \gamma\right)^2 \sim A^2\left(\frac{n}{k}\right)\nu^2(r) + \frac{\gamma^2\sigma^2(r)}{k}, \quad n \to \infty, \tag{9}$$

где последовательность целых чисел $k = k_n$ удовлетворяет (4). Пусть $\mu \neq 0$ в (6). Приведенная в [8] (см. также [9]) двухступенчатая процедура позволяет минимизировать правую часть (9) по $k = k_n$ и r. Применив эту процедуру, получаем, что $r^* = \rho/\gamma$ является оптимальным выбором параметра r, в то время как оптимальный выбор $k_n^*(r^*)$ для последовательности $k = k_n$ удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$k_n^*(r^*) \sim \left(\frac{\gamma^2\sigma^2(r^*)}{\nu^2(r^*)}\right)^{1/(1-2\rho)} \cdot \frac{n}{a^{\leftarrow}(1/n)}, \quad n \to \infty. \tag{10}$$

Здесь $a^{\leftarrow}$ обозначает функцию, обратную к функции a, которая определяется так:

$$A^2(t) \sim \int\limits_t^\infty a(x)dx, \quad t \to \infty. \tag{11}$$

Теперь сравним $\hat{\gamma}_n(k, r)$ с несколькими параметризованными оценками:

$$\hat{\gamma}_n^{(1)}(k,r) = \begin{cases} \left(G_n(k,r,0) - 1\right) / \left(rG_n(k,r,0)\right), & r \neq 0, \\ \gamma_n^{(H)}(k), & r = 0, \end{cases}$$

$$\hat{\gamma}_n^{(2)}(k,r) = \left(G_n(k,0,r)/\Gamma(r+1)\right)^{1/r},$$

$$\hat{\gamma}_n^{(3)}(k,r) = \frac{2G_n(k,r,1)}{2rG_n(k,r,1) + 1 + \sqrt{4rG_n(k,r,1)+1}},$$

$$\hat{\gamma}_n^{(4)}(k,r) = \begin{cases} (rG_n(k,r,1) - G_n(k,r,0) + 1)(r^2G_n(k,r,1))^{-1}, & r \neq 0, \\ \gamma_n^{(mr)}(k), & r = 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(\cdot)$ обозначает гамма-функцию. Параметризованная оценка $\hat{\gamma}_n^{(1)}(k,r)$ введена независимо в [8–10]. Она совпадает с оценкой Хилла [3] при $r = 1$. Параметризованная оценка $\hat{\gamma}_n^{(2)}(k,r)$ введена в [11]. Следует отметить, что класс оценок $\hat{\gamma}_n^{(2)}(k,r)$ обобщает оценку Хилла $\hat{\gamma}_n^{(2)}(k,1)$ и оценку $\hat{\gamma}_n^{(2)}(k,2)$, приведенную в [12]. Параметризованные оценки $\hat{\gamma}_n^{(\ell)}(k,r)$, $\ell = 3, 4$, были представлены в [2]. Оценка $\hat{\gamma}_n^{(3)}(k,0)$ совпадает с оценкой Хилла [3], в то время как оценка $\hat{\gamma}_n^{(4)}(k,0)$ – с оценкой отношения моментов.

В следующей теореме собраны результаты об асимптотической нормальности оценок $\hat{\gamma}_n^{(\ell)}(k,r)$, $\ell = 1, 2, 3, 4$. Соответствующие доказательства можно найти в [8] (см. также [9, 10]), [2, 11].

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 (ограничение $\gamma r < 1/2$ для $\hat{\gamma}_n^{(2)}(k,r)$ не требуется).*

Тогда

$$\sqrt{k}\left(\hat{\gamma}_n^{(\ell)}(k,r) - \gamma\right) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{N}\left(\mu\nu_\ell(r), \gamma^2\sigma_\ell^2(r)\right), \quad n \to \infty, \ \ell = 1,2,3,4,$$

где

$$\nu_1(r) = \frac{1-\gamma r}{1-\gamma r-\rho}, \quad \sigma_1^2(r) = \frac{(1-\gamma r)^2}{1-2\gamma r},$$

$$\nu_2(r) = \frac{1-(1-\rho)^r}{r\rho(1-\rho)^r}, \quad \sigma_2^2(r) = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\Gamma(2r+1)}{\Gamma^2(r+1)}-1\right),$$

$$\nu_3(r) = \frac{(1-\gamma r)(1-\rho-\gamma^2 r^2)}{(1+\gamma r)(1-\rho-\gamma r)^2}, \quad \sigma_3^2(r) = \frac{(1-\gamma r)^2(1-2\gamma r+2\gamma^4 r^4)}{(1+\gamma r)^2(1-2\gamma r)^3},$$

$$\nu_4(r) = \frac{(1-\gamma r)^2}{(1-\rho-\gamma r)^2}, \quad \sigma_4^2(r) = \frac{2(1-\gamma r)^4}{(1-2\gamma r)^3}.$$

Более того,

$$r_1^* = \gamma^{-1}\left(2-\rho+\sqrt{(2-\rho)^2-2}\right)^{-1}, \quad r_3^* = 2\rho\gamma^{-1}\left(2-\rho+\sqrt{(2-\rho)^2-4\rho}\right)^{-1}$$

— оптимальные значения параметра r для параметризованных оценок $\hat{\gamma}_n^{(1)}(k,r)$ и $\hat{\gamma}_n^{(3)}(k,r)$ соответственно. В то же время решение r_2^* уравнения

$$\frac{d}{dr}\left((\nu_2(r))^2\left(\sigma_2^2(r)\right)^{-2\rho}\right) = 0$$

является оптимальным значением параметра r для $\hat{\gamma}_n^{(2)}(k,r)$, а $r_4^* = R^*/\gamma$ – оптимальным значением параметра r для $\hat{\gamma}_n^{(4)}(k,r)$, где R^* – решение уравнения

$$\frac{d}{dR}\left((\nu_4(R/\gamma))^2\left(\sigma_4^2(R/\gamma)\right)^{-2\rho}\right) = 0.$$

Пусть $k_{n,\ell}^*(r_\ell^*)$, $\ell = 1,2,3,4$, обозначает последовательности, удовлетворяющие соотношению (10), где величины $\nu(r^*)$ и $\sigma^2(r^*)$ заменены на $\nu_\ell(r_\ell^*)$ и $\sigma_\ell^2(r_\ell^*)$ соответственно. Следуя [6], будем считать, что оценка $\hat{\gamma}_n\left(k_n^*(r^*), r^*\right)$ превосходит оценку $\hat{\gamma}_n^{(\ell)}\left(k_{n,\ell}^*(r_\ell^*), r_\ell^*\right)$ на луче $\{(\gamma,\rho)\colon \rho=\rho_0,\ \gamma>0\}$, если $\psi_\ell(\rho_0) > 1$, где

$$\psi_\ell(\rho) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{E}\left(\hat{\gamma}_n^{(\ell)}\left(k_{n,\ell}^*(r_\ell^*), r_\ell^*\right)-\gamma\right)^2}{\mathrm{E}\left(\hat{\gamma}_n\left(k_n^*(r^*), r^*\right)-\gamma\right)^2}.$$

Легко проверить, что

$$\psi_\ell(\rho) = \left(\frac{\nu_\ell^2(r_\ell^*)}{\nu^2(r^*)}\left(\frac{\sigma_\ell^2(r_\ell^*)}{\sigma^2(r^*)}\right)^{-2\rho}\right)^{1/(1-2\rho)}. \tag{12}$$

Предполагаем, что оценка $\hat{\gamma}_n(k_n^*(r^*), r^*)$ превосходит оценки $\hat{\gamma}_n^{(\ell)}(k_{n,\ell}^*(r_\ell^*), r_\ell^*)$, $\ell = 1,2,3,4$, в области $\{(\gamma,\rho)\colon \rho<0,\ \gamma>0\}$, но доказать неравенства $\psi_\ell(\rho)>1$,

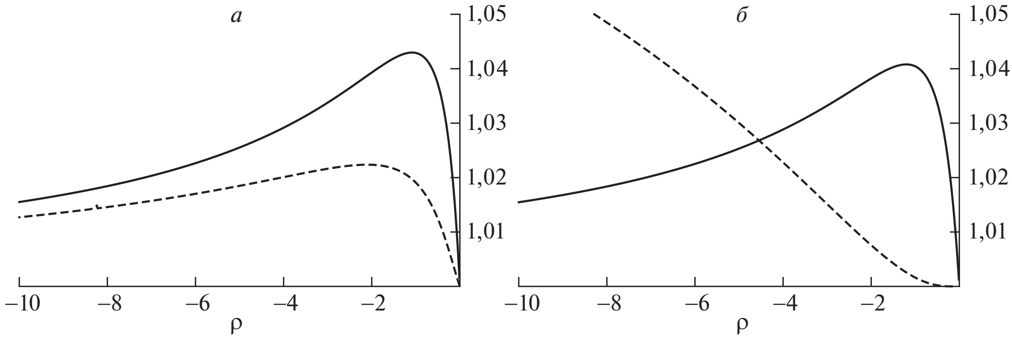

Рис. 1. *а* – Графики функций $\psi_1(\rho)$ (сплошная линия) и $\psi_2(\rho)$ (точечная линия); *б* – $\psi_3(\rho)$ (сплошная линия), $\psi_4(\rho)$ (штриховая линия).

$\ell = 1,2,3,4,$ для всех $\rho < 0$ представляется серьезной проблемой. Поэтому здесь приводим лишь графики функций $\psi_\ell(\rho)$, $\ell = 1,2$, на рис. 1,*а* и $\psi_\ell(\rho)$, $\ell = 3,4$, – на рис. 1,*б* соответственно. Отсюда можно заключить, что $\psi_\ell(\rho) > 1$, $\ell = 1,2,3,4$, для $-10 \leqslant \rho < 0$, т.е. оценка $\hat\gamma_n(k_n^*(r^*), r^*)$ превосходит оценки $\hat\gamma_n^{(\ell)}(k_{n,\ell}^*(r_\ell^*), r_\ell^*)$, $\ell = 1,2,3,4$, в области $\{(\gamma,\rho):\ -10 \leqslant \rho < 0,\ \gamma > 0\}$.

Во введении было замечено, что класс оценок $\hat\gamma_n\,(k_n(r), r)$ обобщает две классические оценки: оценку отношения моментов $\gamma_n^{(mr)}(k)$ и оценку Хилла $\gamma_n^{(H)}(k)$. Поэтому сравним предложенную оценку $\hat\gamma_n\,(k_n^*(r^*), r^*)$ с этими оценками (при оптимальном выборе последовательности $k = k_n$ для каждой). Как и в (12), определим

$$\psi^{(0)}(\rho) = \left(\frac{\nu^2(0)}{\nu^2(r^*)}\left(\frac{\sigma^2(0)}{\sigma^2(r^*)}\right)^{-2\rho}\right)^{1/(1-2\rho)}, \tag{13}$$

$$\psi^{(-\infty)}(\rho) = \left(\frac{\nu^2(-\infty)}{\nu^2(r^*)}\left(\frac{\sigma^2(-\infty)}{\sigma^2(r^*)}\right)^{-2\rho}\right)^{1/(1-2\rho)},$$

где $\nu(-\infty) = \lim_{r\to-\infty}\nu^2(r)$ и $\sigma^2(-\infty) = \lim_{r\to-\infty}\sigma^2(r)$. Подставляя параметры нормального закона (8) и $r^* = \rho/\gamma$ в (13), получим

$$\psi^{(0)}(\rho) = \left(\frac{(1-2\rho)^{2-2\rho}}{(1-\rho)^{4-2\rho}}\right)^{1/(1-2\rho)},$$

$$\psi^{(-\infty)}(\rho) = \left(\frac{2^{-2\rho}(1-2\rho)^{2+2\rho}}{(1-\rho)^{2+2\rho}}\right)^{1/(1-2\rho)}.$$

Легко проверить, что выполнено $\psi^{(0)}(\rho) \to 1$, $\psi^{(-\infty)}(\rho) \to 1$, $\rho \uparrow 0$ и $\psi^{(0)}(\rho) \to 2$, $\psi^{(-\infty)}(\rho) \to 1$, $\rho \to -\infty$. Более того, выполнены неравенства

$$\psi^{(0)}(\rho) > 1, \quad \psi^{(-\infty)}(\rho) > 1 \tag{14}$$

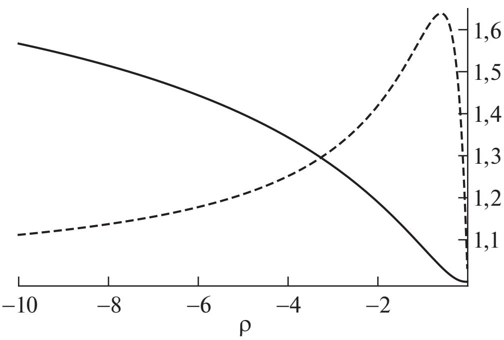

Рис. 2. Графики функций $\psi^{(0)}(\rho)$ (сплошная линия), $\psi^{(-\infty)}(\rho)$ (штриховая линия).

для всех $\rho < 0$. Доказательство неравенств (14) приведено в разделе 4. Неравенства (14) позволяют заключить, что оценка $\hat{\gamma}_n(k_n^*(r^*), r^*)$ превосходит оценки отношения моментов и Хилла на всей области параметров $\{(\gamma, \rho) : \rho < 0,\ \gamma > 0\}$. Для наглядности приведем графики функций $\psi^{(0)}(\rho)$ и $\psi^{(-\infty)}(\rho)$, $-10 \leqslant \rho < 0$, на рис. 2.

3. Предлагаемый алгоритм и примеры его применения

Как правило, в приложениях используется более ограничительное, чем (5), условие. А именно предполагается, что функция квантилей U принадлежит классу Холла (см. [13, 14]), т.е.

$$U(t) = Ct^{\gamma}\left(1 + \frac{A(t)}{\rho}\left(1 + o(1)\right)\right), \quad t \to \infty, \tag{15}$$

где $C > 0$, $\beta \neq 0$, $\rho < 0$ и $A(t) = \gamma\beta t^{\rho}$. Используя (11), находим $a^{\leftarrow}(t) = \left(-2\rho\gamma^2\beta^2\right)^{1/(1-2\rho)} t^{1/(2\rho-1)}$. Теперь, используя правую часть (10), можно построить оценки для $k_n^*(0)$ и $k_n^*(r^*)$:

$$\tilde{k}_n^* = \left[\left(\frac{(1-\hat{\rho}_n)^4}{-\hat{\rho}_n\hat{\beta}_n^2 n^{2\hat{\rho}_n}}\right)^{1/(1-2\hat{\rho}_n)}\right],$$

$$\hat{k}_n^* = \left[\left(\frac{(1-\hat{\rho}_n)(1-2\hat{\rho}_n)}{-\hat{\rho}_n\hat{\beta}_n^2 n^{2\hat{\rho}_n}}\right)^{1/(1-2\hat{\rho}_n)}\right],$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Оценим параметр ρ с помощью оценки $\hat{\rho}_n = \hat{\rho}_n(k)$, предложенной в [15]. Оценка $\hat{\rho}_n(k)$ задается как

$$\hat{\rho}_n(k) = -3\left|\frac{G_n(k,0,1) - 2\left(G_n(k,0,2)/2\right)^{1/2} + \left(G_n(k,0,3)/6\right)^{1/3}}{G_n(k,0,1) - 4\left(G_n(k,0,2)/2\right)^{1/2} + 3\left(G_n(k,0,3)/6\right)^{1/3}}\right|, \tag{16}$$

где статистики $G_n(k, r, v)$ определены в (2).

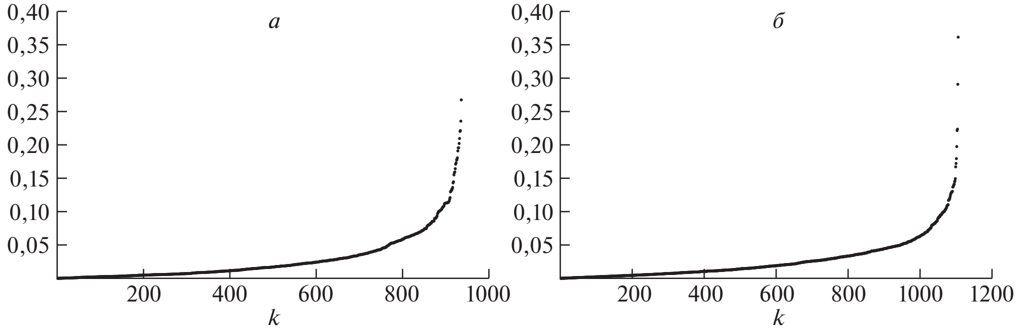

Рис. 3. *а* – График $\{(k, R^-_{k,n_1}),\ 1 \leqslant k \leqslant n_1\}$; *б* – график $\{(k, R^+_{k,n_2}),\ 1 \leqslant k \leqslant n_2\}$.

Чтобы оценить параметр β, используем оценку $\hat\beta_n = \hat\beta_n(k, \hat\rho_n)$, которая введена в [16] и определяется как

$$(17)\qquad \hat\beta_n(k,\rho) = \left(\frac{k}{n}\right)^{\rho} \frac{\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{k}{n}\right)^{-\rho}\right)\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}U_i\right) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{k}{n}\right)^{-\rho}U_i}{\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{k}{n}\right)^{-\rho}\right)\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{k}{n}\right)^{-\rho}U_i\right) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{k}{n}\right)^{-2\rho}U_i},$$

где $U_i = i\ln\left(X_{n-i+1,n}/X_{n-i,n}\right)$. Применяя оценки (16), (17), использовали $k = [n^{0{,}995}]$. Такой выбор последовательности $k = k_n$ рекомендуется в [17], см. также [15].

Теперь приступим к описанию алгоритма для адаптивного оценивания γ. Напомним, что $r^* = \rho/\gamma$ является оптимальным значением параметра r для $\hat\gamma_n\left(k_n^*(r^*), r^*\right)$. Поэтому, чтобы оценить r^*, нужна не только оценка параметра ρ, но и предварительная оценка хвостового индекса γ. Для этого включаем классическую оценку $\hat\gamma_n(k,0)$ в предлагаемый алгоритм.

Алгоритм 1.

1. Вычислить оценки $\hat\rho_n$ и $\hat\beta_n$, используя (16) и (17) соответственно.
2. Вычислить оценку $\tilde k_n^*$, используя (16).
3. Вычислить предварительную оценку $\hat\gamma_n\left(\tilde k_n^*, 0\right)$.
4. Вычислить $\hat r^* = \hat\rho_n/\hat\gamma_n\left(\tilde k_n^*, 0\right)$.
5. Вычислить оценку $\hat k_n^*$, используя (16).
6. Вычислить $\hat\gamma_n\left(\hat k_n^*, \hat r^*\right)$.

Опишем применение приведенного алгоритма к нескольким наборам реальных данных.

i. Проанализируем ежедневные цены отношения Биткоин/Доллар США (Bitcoin/USD) с размером выборки $n = 2043$ в период с 28 апреля 2013 г. до 30 ноября 2018 г. Пусть $R_t = \ln(x_t/x_{t-1})$, $2 \leqslant t \leqslant n$, обозначает так называемые лог-возвраты (the log-returns) заданного временно́го ряда X_t, $1 \leqslant t \leqslant n$. Оценим левый хвост $F(-x)$, $x > 0$, и правый хвост $1 - F(x)$, $x > 0$, отдельно. Пусть $R^-_{1,n_1} \leqslant \ldots \leqslant R^-_{n_1,n_1}$, $n_1 = 936$, обозначают порядковые статисти-

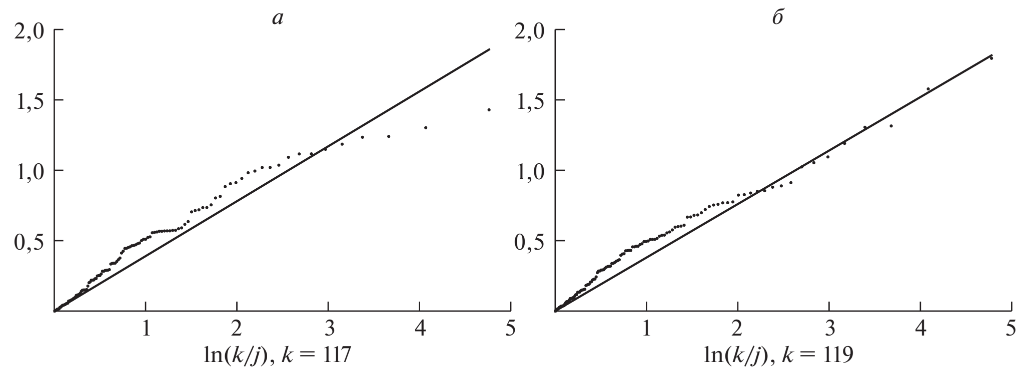

Рис. 4. a – График $S_{n_1}(R^-;\hat{k}^*_{n_1}+1)$ с линией $(x,\hat{\gamma}_{n_1}(\hat{k}^*_{n_1},\hat{r}^*)x)$, $б$ – $S_{n_2}(R^+;\hat{k}^*_{n_2}+1)$ с линией $(x,\hat{\gamma}_{n_2}(\hat{k}^*_{n_2},\hat{r}^*)x)$.

ки абсолютных величин отрицательных лог-возвратов, а $R^+_{1,n_2}\leqslant\ldots\leqslant R^+_{n_2,n_2}$, $n_2=1106$, – порядковые статистики положительных лог-возвратов. Графики $\left\{\left(k,R^-_{k,n_1}\right),\ 1\leqslant k\leqslant n_1\right\}$ и $\left\{\left(k,R^+_{k,n_2}\right),\ 1\leqslant k\leqslant n_2\right\}$ довольно близки, см. рис. 3.

Представленный алгоритм дает следующие оценки: $\hat{\gamma}_{n_1}(\hat{k}^*_{n_1},\hat{r}^*)=0{,}39$ ($\hat{r}^*=-1{,}90,\ \hat{k}^*_{n_1}=116$) и $\hat{\gamma}_{n_2}(\hat{k}^*_{n_2},\hat{r}^*)=0{,}38$ ($\hat{r}^*=-1{,}78,\ \hat{k}^*_{n_2}=118$). Чтобы продемонстрировать, насколько хорошо полученные оценки параметра γ приближают данные, используем предложение 4.1 из [18]. Оно утверждает в предположениях теоремы 1, что

$$S_n\left(X;k\right)=\left\{\left(-\ln\left(\frac{j}{k}\right),\ln\left(\frac{X_{n+1-j,n}}{X_{n+1-k,n}}\right)\right),\ 1\leqslant j\leqslant k\right\}\tag{18}$$

сходится по вероятности к множеству $\{(x,\gamma x),\ 0\leqslant x<\infty\}$. На рис. 4,$a$ показан график $S_{n_1}\left(R^-;\hat{k}^*_{n_1}+1\right)$ и линия $\left(x,\hat{\gamma}_{n_1}\left(\hat{k}^*_{n_1},\hat{r}^*\right)x\right)$. В (18) выбрано $k=\hat{k}^*_{n_1}+1$, поскольку отношения $R^-_{n_1-i,n_1}/R^-_{n_1-k,n_1}$, $0\leqslant i\leqslant k-1=\hat{k}^*_{n_1}$, были использованы для вычисления оценки $\hat{\gamma}_{n_1}\left(\hat{k}^*_{n_1},\hat{r}^*\right)$. Можно заметить, что линия $\left(x,\hat{\gamma}_{n_1}\left(\hat{k}^*_{n_1},\hat{r}^*\right)x\right)$ отражает график $S_{n_1}\left(R^-;\hat{k}^*_{n_1}+1\right)$ довольно хорошо. Аналогичное заключение можно сделать, анализируя положительные лог-возвраты, см. рис. 4,$б$. Стоит отметить, что полученные оценки не противоречат стилизованному факту финансовой доходности: распределение лог-возвратов принадлежит классу $RV_{-1/\gamma}$ (или эквивалентно $U\in RV_\gamma$) с хвостовым индексом $0{,}2<\gamma<0{,}5$ для многих изученных наборов данных.

ii. Оценим хвостовой индекс γ распределения временны́х промежутков (the inter-arrivals) между появлениями пакетов информации в потоках TCP (Transmision Control Protocol). Используем трассировки (traces), содержащие измерения одночасового трафика, передаваемого на большие расстояния, между Digital Equipment Corporation и остальным миром с 8 марта 1995 г. (см. http://ita.ee.lbl.gov/html/contrib/dec-pkt.html). Данные включают $n_3=$

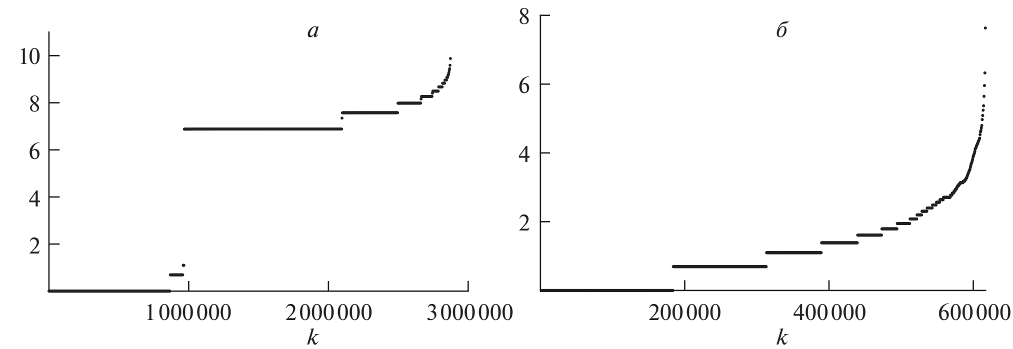

Рис. 5. a – График $\{k, \ln\left(X_{k,n_j}\right), 1 \leqslant k \leqslant n_j\}$ для временны́х промежутков между появлениями пакетов ($j = 3$); *б* – график для числа входящих связей (in-degrees) узлов сети ($j = 4$).

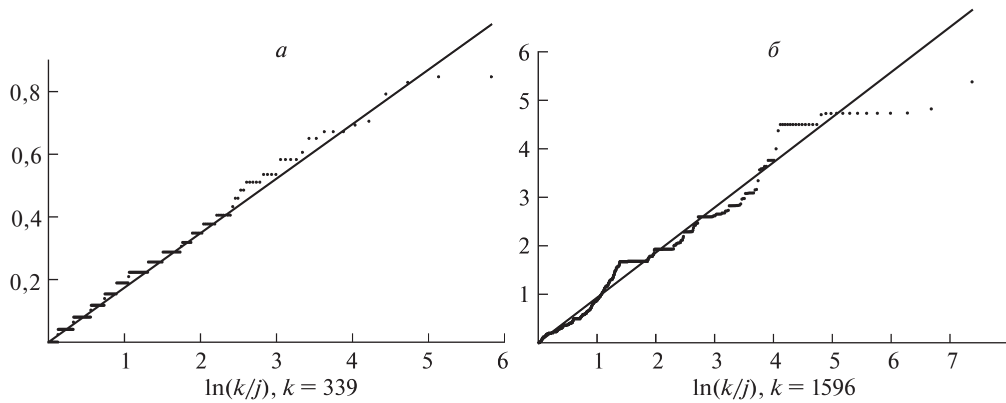

Рис. 6. a – График $S_{n_j}\left(X; \hat{k}^*_{n_j} + 1\right)$ с линией $\left(x, \hat{\gamma}_{n_j}\left(\hat{k}^*_{n_j} x, \hat{r}^*\right)\right.$ для временны́х промежутков между появлениями пакетов ($j = 3$); *б* – график числа входящих связей (in-degrees) для узлов ($j = 4$).

$= 2873588$ временны́х промежутков между появлениями пакетов, см. рис. 5,a, где представлена зависимость $\{k, \ln\left(X_{k,n_3}\right), 1 \leqslant k \leqslant n_3\}$.

Применяя предложенный алгоритм, получим оценку $\hat{\gamma}_{n_3}\left(\hat{k}^*_{n_3}, \hat{r}^*\right) = 0{,}17$ ($\hat{r}^* = -1{,}2$; $\hat{k}^*_{n_3} = 338$). Линия $\left(x, \hat{\gamma}_{n_3}\left(\hat{k}^*_{n_3}, \hat{r}^*\right) x\right)$ хорошо соответствует графику $S_{n_3}\left(X; \hat{k}^*_{n_3} + 1\right)$, см. рис. 6,$a$. Оценка оптимального выбора $k^*_{n_3}$ составляет только $0{,}011\,\%$ от n_3, что несколько странно. Следует отметить, что те же данные временны́х промежутков между пакетами были рассмотрены в [19]. В [19] было найдено, что $3\,\%$ от наибольшей порядковой статистики хорошо описываются распределением Парето с $\gamma = 1{,}05$. К сожалению, авторы не нашли объяснения, как было оценено γ в [19]. Анализ трафика, полученного при TCP соединениях, содержится в [20]. Применяя технику QQ-графика, в [20] было замечено, что распределение временны́х промежутков между пакетами принадлежит классу распределений $RV_{-1/\gamma}$ с $\gamma = 0{,}57$.

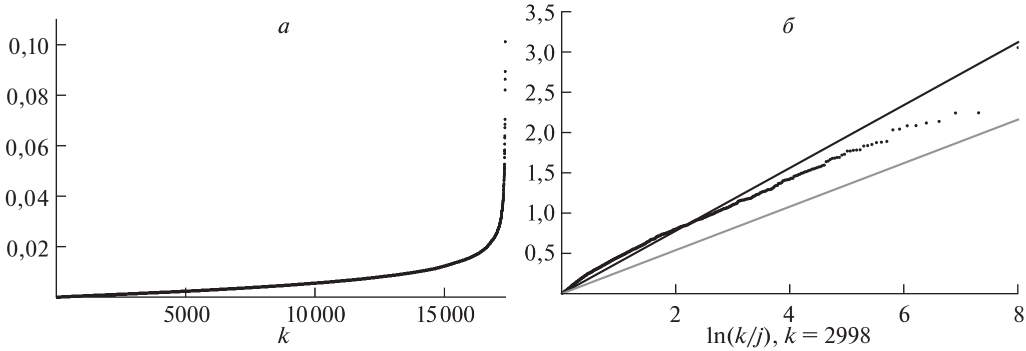

Рис. 7. Графики для лог-возвратов индекса S&P 500.

iii. Многие авторы (см., например, [21] и библиографию в ней) согласны с тем, что распределение числа входящих связей (in-degrees) узлов принадлежит классу RV_γ с $\gamma = 0{,}91$. Здесь используем данные Беркли–Стенфорд (Berkley–Stanford data) [22] с числом Веб страниц $n_4 = 617094$, см. рис. 5,*б*. Найдено, что $\hat{\gamma}_{n_4}\left(\hat{k}^*_{n_4}, \hat{r}^*\right) = 0{,}93$ ($\hat{r}^* = -0{,}32$, $\hat{k}^*_{n_3} = 1595$). Таким образом, полученная в статье оценка γ согласуется с результатами статьи [21]. На рис. 6,*б* показан график $S_{n_4}\left(X; \hat{k}^*_{n_4} + 1\right)$ и линия $\left(x, \hat{\gamma}_{n_4}\left(\hat{k}^*_{n_4}, \hat{r}^*\right) x\right)$ как показатель хорошей точности полученной в статье оценки хвостового индекса γ.

iv. Исследуем еще один набор лог-возвратов. Известные данные индекса S&P 500 взяты из https://finance.yahoo.com. За период 1950/01/03–2018/12/21 этот набор данных содержит $n_5 = 17356$ абсолютных величин лог-возвратов $\tilde{R}_k = |R_k|$, см. рис. 7,*а* для графика $\left\{k, \ln\left(\tilde{R}_{k,n_5}\right), 1 \leqslant k \leqslant n_5\right\}$. Предложенный в статье алгоритм дает оценку $\hat{\gamma}_{n_5}\left(\hat{k}^*_{n_5}, \hat{r}^*\right) = 0{,}39$ ($\hat{r}^* = 4{,}61$, $\hat{k}^*_{n_5} = 2997$). В статистической литературе нет единого мнения о тяжести хвоста для распределения набора $\tilde{R}_k$, $1 \leqslant k \leqslant n_5$. Например, в [23], используя оценку Хилла и выбирая значение, соответствующее интервалу постоянства графика зависимости оценки Хилла от числа наибольших порядковых статистик k, получена оценка $\hat{\gamma}_{n_5} = 0{,}27$, а в статье [24] показано, что исследуемый набор лог-возвратов состоит из трех подвыборок, для которых оценки хвостового индекса следующие: $\hat{\gamma} = 0{,}22$, $\hat{\gamma} = 0{,}28$, $\hat{\gamma} = 0{,}21$. На рис. 7,*б* представлен график $S_{n_5}\left(\tilde{R}; \hat{k}^*_{n_5} + 1\right)$, где линия $\left(x, x\hat{\gamma}_{n_5}\left(\hat{k}^*_{n_5}, \hat{r}^*\right)\right)$ показана черным цветом, а соответствующая оценка Хилла $(x, x\hat{\gamma}_{n_5})$ – серым цветом. Таким образом, полученная в статье оценка лучше приближает данные, чем оценка Хилла.

4. Заключение

В статье предложен новый класс семипараметрических оценок хвостового индекса. Этот класс получен путем использования параметризованных статистик $G_n(k, r)$.

Доказаны слабая сходимость и асимптотическая нормальность введенных оценок при классических условиях на функцию квантилей U и последовательность $k = k_n$, а также при дополнительном условии на параметр настройки r. Теорема 2 является главным результатом статьи. Имея асимптотическую нормальность, становится возможным (i) сравнить оценки $\hat{\gamma}_n(k, r)$ с другими асимптотически нормально распределенными оценками хвостового индекса; (ii) построить оценки оптимального выбора последовательности $k = k_n$ и параметра настройки r. В разделе 3 продемонстрировано, что параметризованная оценка $\hat{\gamma}_n(k, r)$ превосходит классические оценки отношения моментов $\hat{\gamma}_n^{(mr)}(k)$ и Хилла $\hat{\gamma}_n^{(H)}(k)$ (при соответствующем оптимальном выборе последовательности $k = k_n$ и параметра настройки r) в области изменения параметров $\{(\gamma, \rho) : \ \rho < 0, \gamma > 0\}$. Доминирование предложенного в настоящей статье нового класса оценок над некоторыми недавно полученными оценками позволяет надеяться на полезность предложенных оценок в оценивании хвостового индекса.

Основываясь на $r^* = \rho/\gamma$ и соотношении (10), построены оценки оптимального выбора параметра настройки r и последовательности $k = k_n$. Предложенный алгоритм для оценивания γ является адаптивной процедурой. Можно заметить, что предложенный алгоритм детализирует классическую оценку отношения моментов $\hat{\gamma}_n^{(mr)}(k)$. Очевидно, что сначала оцениваются $\hat{\gamma}_n\left(\tilde{k}_n^*, 0\right)$ (шаг 3 в алгоритме), а после оценивания r^* считается оценка $\hat{\gamma}_n\left(\hat{k}_n^*, \hat{r}^*\right)$ (шаг 6 в алгоритме). Предложенный алгоритм легко реализуем. Его работоспособность продемонстрирована на нескольких наборах реальных данных.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. По теореме 1.1 из [2] имеем, что

$$G_n(k, r, v) \xrightarrow{\text{p}} \frac{\gamma^v \Gamma(1+v)}{(1-\gamma r)^{1+v}}, \quad n \to \infty. \tag{П.1}$$

Остается применить теорему о непрерывном отображении (the continuous mapping theorem) ([25]; теорема 12.5.1 (iv) в [26]).

Доказательство теоремы 2. Случай $r = 0$ исследован в [6], и поэтому в статье нужно рассмотреть только случай $\gamma r < 1/2$, $r \neq 0$.

Имеем $\hat{\gamma}_n(k, r) - \gamma = S_n(k, r) / \left(G_n(k, r, 0) - 1\right)$, где

$$S_n(k, r) = \frac{(1-\gamma r)\left(G_n(k, r, 0) - 1\right)}{r} - G_n(k, 0, 1).$$

Имея в виду (П.1), отношение (7) будет доказано, если показать, что

$$\sqrt{k} S_n(k, r) \xrightarrow{\text{d}} \mathcal{N}\left(\frac{\gamma r \mu}{(1-\rho)(1-\gamma r-\rho)}, \frac{2\gamma^4 r^2}{(1-\gamma r)(1-2\gamma r)}\right), \quad n \to \infty. \tag{П.2}$$

Пусть $Y_1, \dots, Y_n$ – н.о.р. сл.в. с хвостовой функцией $\mathbb{P}(Y_1 > x) = 1/x$, $x \geqslant 1$. Заметим, что $U(Y_i) \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Это дает, что

$$S_n(k,r) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\left\{(1-\gamma r) f_r\left(\frac{U\left(Y_{n-i,n}\right)}{U\left(Y_{n-k,n}\right)}\right) - \ln\left(\frac{U\left(Y_{n-i,n}\right)}{U\left(Y_{n-k,n}\right)}\right)\right\},$$

где $f_r(x) = r^{-1}\left(x^r - 1\right)$, $x \geqslant 1$, – та же, что в (5), функция.

В [8] получены следующие неравенства. Для функции $\tilde{A}(t)$ такой, что $\tilde{A}(t) \sim A(t)$ при $t \to \infty$, при любых $\varepsilon > 0$ и $0 < \delta < \min\{1-\gamma r-\rho, 1-\rho\}$ существует $t_0 = t_0(\varepsilon, \delta)$, что для $t > t_0$ и $x > 1$ выполнено неравенство

$$\left|f_r\left(\frac{U(tx)}{U(t)}\right) - f_r\left(x^\gamma\right) - \tilde{A}(t)x^{\gamma r} f_\rho(x)\right| \leqslant \varepsilon\left|\tilde{A}(t)\right| x^{\gamma r+\rho+\delta}. \tag{П.3}$$

Неравенство (П.3) выполнено также для случая $r = 0$, см. например, с. 74 в [7]. Таким образом, из (П.3) получим, что

$$\begin{aligned}&\left|(1-\gamma r) f_r\left(\frac{U(tx)}{U(t)}\right) - \ln\left(\frac{U(tx)}{U(t)}\right) - (1-\gamma r) f_r\left(x^\gamma\right) + \ln\left(x^\gamma\right) - \right.\\ &\left. - \tilde{A}(t) f_\rho(x)\left((1-\gamma r)x^{\gamma r} - 1\right)\right| \leqslant \varepsilon\left|\tilde{A}(t)\right| x^{\rho+\delta}\left(x^{\gamma r}+1\right).\end{aligned} \tag{П.4}$$

По лемме 3.2.1 из [7] в предположении $k = o(n)$ имеем, что $Y_{n-k,n} \to \infty$ почти наверное. Подставляя $x = Y_{n-i,n}/Y_{n-k,n}$ и $t = Y_{n-k,n}$ в (П.4) и производя суммирование по $i = 0, 1, \dots, k-1$, получим

$$\left|S_n(k,r) - S_n^{(1)}(k,r) - \tilde{A}\left(Y_{n-k,n}\right) S_n^{(2)}(k,r)\right| \leqslant \varepsilon\left|\tilde{A}\left(Y_{n-k,n}\right)\right| S_n^{(3)}(k,r), \tag{П.5}$$

где

$$S_n^{(1)}(k,r) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\left\{(1-\gamma r) f_r\left(\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right)^\gamma\right) - \ln\left(\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right)^\gamma\right)\right\},$$

$$S_n^{(2)}(k,r) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} f_\rho\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right)\left\{(1-\gamma r)\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right)^{\gamma r} - 1\right\},$$

$$S_n^{(3)}(k,r) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right)^{\rho+\delta}\left\{\left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}\right)^{\gamma r} + 1\right\}.$$

Далее, отношение (П.2) следует из

$$\sqrt{k} S_n^{(1)}(k,r) \stackrel{\mathrm{d}}{\to} \mathcal{N}\left(0, \frac{2\gamma^4 r^2}{(1-\gamma r)(1-2\gamma r)}\right), \tag{П.6}$$

$$\sqrt{k}\tilde{A}\left(Y_{n-k,n}\right) S_n^{(2)}(k,r) \stackrel{\mathrm{p}}{\to} \frac{\gamma r \mu}{(1-\rho)(1-\gamma r-\rho)}, \tag{П.7}$$

$$\sqrt{k}\left|\tilde{A}\left(Y_{n-k,n}\right)\right| S_n^{(3)}(k,r) \stackrel{\mathrm{p}}{\to} \frac{|\mu|}{1-\gamma r-\rho-\delta} + \frac{|\mu|}{1-\rho-\delta}, \tag{П.8}$$

при $n \to \infty$.

Пусть $Z_1, \ldots, Z_n$ – н.о.р. сл.в. с хвостовой функцией $\mathbb{P}(Z_1 > x) = 1/x$, $x \geqslant 1$. По представлению Реньи (Rényi) имеем для фиксированного $k < n$:

$$\text{(П.9)} \qquad \left(\frac{Y_{n-i,n}}{Y_{n-k,n}}, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1 \right) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left(Z_{k-i,k}, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1 \right).$$

Используя (П.9), получим, что

$$\text{(П.10)} \qquad S_n^{(1)}(k,r) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ (1-\gamma r) f_r\left(Z_i^\gamma\right) - \ln\left(Z_i^\gamma\right) \right\}.$$

Слагаемые в правой части (П.10) – н.о.р. сл.в. с нулевым средним. Более того, в предположении $\gamma r < 1/2$ получим равенство

$$\operatorname{Var}\left\{ (1-\gamma r) f_r\left(Z_1^\gamma\right) - \ln\left(Z_1^\gamma\right) \right\} = \frac{2\gamma^4 r^2}{(1-\gamma r)(1-2\gamma r)}.$$

Тогда, применяя центральную предельную теорему Линдеберга – Леви (Lindeberg – Lévy), получим соотношение (П.6).

Применяя (П.9) еще раз, имеем

$$\text{(П.11)} \qquad S_n^{(2)}(k,r) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} f_\rho\left(Z_i\right) \left\{ (1-\gamma r) Z_i^{\gamma r} - 1 \right\}.$$

Правая часть (П.11) представляет собой сумму н.о.р. сл.в. с

$$\mathbb{E}\left\{ f_\rho\left(Z_1^\gamma\right) \left\{ (1-\gamma r) Z_1^{\gamma r} - 1 \right\} \right\} = \frac{\gamma r}{(1-\rho)(1-\gamma r-\rho)}.$$

Из слабого закона больших чисел Хинчина следует соотношение

$$S_n^{(2)}(k,r) \xrightarrow{\mathrm{p}} \frac{\gamma r}{(1-\rho)(1-\gamma r-\rho)}, \qquad n \to \infty.$$

Последнее соотношение и $\tilde{A}(t) \sim A(t)$, $t \to \infty$, вместе с предположением (6) и фактом, что $\tilde{A}\left(Y_{n-k,n}\right) / \tilde{A}\left(n/k\right) \xrightarrow{\mathrm{p}} 1$, $n \to \infty$, дают (П.7). Доказательство последнего соотношения может быть найдено на с. 75 в [7].

Доказательство (П.8) подобно доказательству (П.7), поэтому опускаем его.

Доказательство. Приведем доказательство неравенств (14).

Начнем с неравенства $\psi^{(0)}(\rho) > 1$. Достаточно доказать, что $(1-2\rho)^{1-\rho} > (1-\rho)^{2-\rho}$ для $\rho < 0$ или, эквивалентно, $b(\rho) > 0$, где $b(\rho) = (1-\rho)\ln(1-2\rho) - (2-\rho)\ln(1-\rho)$. Имеем

$$\frac{db(\rho)}{d\rho} = \frac{-\rho}{(1-\rho)(1-2\rho)} - \ln\left(1 + \frac{-\rho}{1-\rho}\right).$$

Используя неравенство $\ln(1+x) \geqslant x/(x+1)$, $x > -1$ (см., например, с. 67 в [27]) с $x = -\rho/(1-\rho)$, получим

$$\frac{db(\rho)}{d\rho} \leqslant \frac{-\rho^2}{(1-\rho)(1-2\rho)} < 0$$

для $\rho < 0$. Отсюда следует, что функция $b(\rho)$ строго убывает на интервале $(-\infty, 0)$. Это вместе с $b(0) = 0$ доказывает, что $b(\rho) > 0$, $\rho < 0$.

Для проверки неравенства $\psi^{(-\infty)}(\rho) > 1$ достаточно его переписать в виде

$$\left(\left(\frac{2-2\rho}{1-2\rho}\right)^{-2\rho}\left(\frac{1-2\rho}{1-\rho}\right)^{2}\right)^{1/(1-2\rho)} > 1$$

и заметить, что $(2-2\rho)/(1-2\rho) > 1$ и $(1-2\rho)/(1-\rho) > 1$ при $\rho < 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gomes M.I., Guillou A.* Extreme Value Theory and Statistics of Univariate Extremes: A Review // Int. Stat. Rev. 2015. No. 83. P. 263–292.
2. *Paulauskas V., Vaičiulis M.* Several New Tail Index Estimators // Ann. Inst. Stat. Math. 2017. No. 69. P. 461-487.
3. *Hill B.M.* A Simple General Approach to Inference about the Tail of a Distribution // Ann. Stat. 1975. No. 3. P. 1163–1174.
4. *Danielsson J., Jansen D.W., de Vries C.G.* The Method of Moments Ratio Estimator for the Tail Shape Parameter // Commun. Stat. Theory. 1986. No. 25. P. 711–720.
5. *Segers J.* Residual Estimators // J. Stat. Plan. Inf. 2001. No. 98. P. 15–27.
6. *De Haan L., Peng L.* Comparison of Tail Index Estimators // Stat. Nederl. 1998. No. 52. P. 60–70.
7. *De Haan L., Ferreira A.* Extreme Value Theory: An Introduction, N.Y.: Springer, 2006.
8. *Paulauskas V., Vaičiulis M.* On the Improvement of Hill and Some Other Estimators // Lith. Math. J. 2013. No. 53. P. 336-355.
9. *Brilhante F., Gomes M.I., Pestana D.* A Simple Generalization of the Hill Estimator // Comput. Stat. Data Anal. 2013. No. 57. P. 518–535.
10. *Beran J., Schell D., Stehlik M.* The Harmonic Moment Tail Index Estimator: Asymptotic Distribution and Robustness // Ann. Inst. Stat. Math. 2014. No. 66. P. 193–220.
11. *Gomes M.I., Martins M.J.* Eficient Alternatives to the Hill Estimator // Proc. Workshop V.E.L.A. Extreme Values and Additive Laws. C.E.A.U.L. Ed. 1999. No. 9. P. 40–43.
12. *Gomes M.I., Martins M.J., Neves M.* Alternatives to a Semi-parametric Estimator of Parameters of Rare Events – the Jackknife Methodology // Extremes. 2000. No. 3. P. 207–229.
13. *Hall P., Welsh A.H.* Adaptive Estimates of Parameters of Regular Variation // Ann. Statist. 1985. No. 13. P. 331–341.
14. *Hall P.* On Some Simple Estimates of an Exponent of Regular Variation // J. Royal Statist. Soc. B. 1982. No. 44. P. 37–42.

15. *Fraga Alves M.I., Gomes M.I., de Haan L.* A New Class of Semi-parametric Estimators of the Second Order Parameter // Portugaliae Mathematica. 2003. No. 60. P. 193–214.
16. *Gomes M.I., Martins M.J.* Asymptotically Unbiased Estimators of the Tail Index Based on External Estimation of the Second Order Parameter // Extremes. 2002. No. 5. P. 5–31.
17. *Caeiro F., Gomes M.I.* Minimum-variance Reduced-bias Tail Index and High Quantile Estimation // Revstat. 2008. No. 6. P. 1–20.
18. *Das B., Resnick S.* QQ Plots, Random Sets and Data from a Heavy Tailed Distribution // Stochast. Models. 2008. No. 24. P. 103–132.
19. *Paxson V., Floyd S.* Wide-area Traffic: the Failure of Poisson Modeling // IEEE/ACM Trans. Networking. 1995. No. 3. P. 226-244.
20. *Guo L., Crovella M., Matta I.* TCP Congestion Control and Heavy Tails, Technical Report BUCS-2000-017, Computer Science Department. Boston University, 2000.
21. *Volkovich Y.V., Litvak N.* Asymptotic Analysis for Personalized Web Search // Adv. Appl. Prob. 2010. No. 42 (2). P. 577–604.
22. *Leskovec J., Krevl A.* SNAP Datasets: Stanford Large Network Dataset Collection. 2014.
23. *Mikosch T.V.* Modeling dependence and tails of financial time series. H.C.O.-Tryk, Kobenhavns Univ. 2002. P. 1-75.
24. *Galbraith J.W.* Circuit Breakers and the Tail Index of Equity Returns // J. Financ. Economet. 2004. No. 2(1). P. 109–129.
25. *Resnick S.I.* Heavy-Tail Phenomena. Probabilistic and Statistical Modeling. N.Y.: Springer, 2006.
26. *Whitt W.* Stochastic-Process Limits. An Introduction to Stochastic-Process Limits and their Application to Queues. N.Y.: Springer, 2002.
27. *Mitrinović D.S.* Elementary Inequalities. P. Noordhoff Ltd, Groningen, 1964.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 19.07.2018

После доработки 02.10.2018

Принята к публикации 08.11.2018