

© 2019 г. Б.М. МИЛЛЕР, д-р.физ.-мат.наук (bmiller@iitp.ru)
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва;
Университет Монаш, Мельбурн, Виктория, Австралия),
Е.Я. РУБИНОВИЧ, д-р. техн. наук (rubinvch@ipu.rssi.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ УДАРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ НА ПРИМЕРЕ ПАРАДОКСА ПЕНЛЕВЕ ПРИ “КОСОМ” ПАДЕНИИ СТЕРЖНЯ¹

Рассматривается система, относящаяся к известным проблемам Пенлеве (Painlevé), для решения которой используется предложенный авторами метод *вскрытия пространственно-временных сингулярностей*. Этот метод позволяет однозначно решить проблему определения скоростей тела после удара о поверхность с сухим трением, т.е. разрешить ситуацию, в которой традиционные подходы либо дают неоднозначный ответ, либо приводят к неразрешимой системе соотношений (парадокс Пенлеве).

Ключевые слова: ударные взаимодействия при сухом трении, проблема Пенлеве.

DOI: 10.1134/S0005231019100052

1. Введение

Систематическое изучение систем автоматического управления с импульсными воздействиями связано с работами Я.З. Цыпкина, выполненными в 40–60 гг. XX в. [1–3]. В действительности, такие системы возникли еще на заре становления теории автоматического регулирования как прерывистые и релейные регуляторы паровых машин, однако развитие адекватной теории таких систем началось с 1948 г., когда Я.З. Цыпкин начал разрабатывать единый подход к описанию дискретных систем на основе дискретного преобразования Лапласа (Z -преобразования), что позволило создать цельный математический аппарат, подобный операторному методу описания непрерывных систем. Таким образом, для дискретных систем появились стандартные понятия передаточной функции, частотной характеристики и им подобные, и удалось обобщить классические критерии устойчивости Найквиста и Михайлова на случай дискретных систем. Полученные на этом этапе результаты были подытожены в монографии Я.З. Цыпкина [1], вышедшей в 1951 г. [4].

Дальнейшее развитие теории импульсных систем шло по пути разработки частотных методов исследования и постепенного понимания необходимости описания импульсных воздействий в терминах теории обобщенных функций [5]. Еще более сложные проблемы были связаны с управлением динамическими системами, где импульсные воздействия возникали в результате

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 16-08-01285 и 16-08-01076).

применения управлений, вызывающих кратковременное изменение состояния, причем такие системы имели широкие области приложений, включая робототехнику, космические аппараты, экономику и распределение природных ресурсов [6]. Оказалось, что описание импульсного воздействия в нелинейной динамической системе является далеко не тривиальным, поскольку использование, казалось бы, естественного описания в терминах обобщенных функций требует определенной осторожности, так как приводит к отсутствию оптимального управления [7] и невозможности описания оптимального решения в обычных терминах [8–10]. Эта проблема была решена с помощью так называемого *метода разрывной замены времени* [11], идея которого следовала из метода разделения движений, описанного В.И. Гурманом в [12, 13]. Плодотворность этого метода подтверждается многочисленными последующими публикациями, в которых развивались методы оптимизации систем с управлениями-мерами, позволившие установить существование решений [14, 15] и получить условия оптимальности [16, 17] в различных задачах экономики и квантовой механики с фазовыми ограничениями [18] и необходимые условия оптимальности, полученные аналогичным методом введения пространственно-временного управления [19, 20]. Таким образом, в теории импульсного управления, особенно в публикациях последних лет, проблема описания импульсного воздействия разрешается методом вскрытия сингулярности, основанным на разрывной замене времени [8, 9], когда быстрое (практически мгновенное) изменение части фазовых координат растягивается в конечный промежуток времени и динамика системы на этом промежутке описывается вспомогательной системой “медленного” движения. Эта ситуация выглядит, с первого взгляда, аналогичной механическому удару, при котором скорости тел изменяются практически мгновенно, по сравнению с движениями до и после удара. При этом сам удар часто описывают в терминах *закона восстановления*, связывающего скорости до и после удара, что при описании динамики движения “в целом” аналогично введению δ -функций в правую часть системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику системы [21]. Именно поэтому аккуратное описание удара требует отдельного представления непосредственной фазы контакта [22] с учетом закона взаимодействия и свойств контактирующих тел [23]. Формально это выглядит как растяжение момента удара в некоторый отрезок, на котором динамика системы описывается другими уравнениями “быстрого движения” аналогично описанию импульсных воздействий. Однако непосредственное применение техники замены времени к анализу систем с ударами затруднительно, так как при ударе часть фазовых координат, ответственных за величину реакции опоры, остается практически неизменной, поскольку деформации, отвечающие за реакцию системы на удар, весьма малы, в то время как скорости изменяются значительно. В большинстве случаев, известных еще из школьной физики, для определения скоростей тел после удара достаточно воспользоваться одной из традиционных моделей удара: упругий или полностью неупругий и далее применить законы сохранения энергии, импульса или момента импульса. Развитие техники разрывной замены времени было предложено в [24, 25], где было показано, что в этом случае разрывная динамика может быть описана с помощью *пространственно-*

временной сингулярной замены переменных, что особенно важно для описания динамики управляемого удара [26]. Необходимо отметить, что одновременная сингулярная замена пространственных и временных переменных, хотя и родственна методу разделения движений [27], широко применяемому в задачах с ударами, но позволяет рассматривать более общие случаи, связанные с различными условиями окончания ударной (сингулярной) фазы движения. Общий подход, предложенный в [24], гораздо ближе к методам, основанным на генетической теории удара или методологии штрафных функций (penalization) [28], когда модель абсолютно твердого тела сначала заменяется моделью деформируемого тела, но с большим коэффициентом жесткости, который затем устремляется к бесконечности, чтобы в пределе снова вернуться к модели абсолютно твердого тела. Этот подход, как выяснилось, позволяет преодолеть проблемы неоднозначности и невозможности определения решения, возникающие при использовании модели абсолютно жесткого тела при наличии сухого трения [29, 30]. Родственный подход — это специальные схемы численного анализа (time-stepping), в которых для преодоления проблем сингулярности движения в окрестности точек удара применяется переменный шаг интегрирования уравнений динамики [31, 32]. Тем не менее общая проблема описания движения систем с ударами весьма сложна и общие теоремы существования и единственности решений были получены лишь в последние годы [33]. Применение метода пенализации к задаче о падающем стержне было впервые предпринято в публикации [34], которая была ориентирована на получение явных результатов и поэтому ограничивалась случаем абсолютно упругого удара и случаем, когда в процессе удара не происходит остановки скольжения стержня. С точки зрения исследования парадоксальных ситуаций (задача Пенлеве) этот случай не очень интересен, так как полностью описывается классическими подходами. Более интересные результаты отмечены в публикации [35], в которой динамика стержня в режиме контакта с поверхностью описывается с помощью методологии комплиментарного подхода (linear complementary problem (LCP)) и теории систем с разрывной правой частью и где показано, что с помощью этого подхода можно всегда решить задачу определения скоростей после удара при коэффициенте трения, меньшем $4/3 \approx 1,33$, а при некоторых углах падения стержня область применимости комплиментарного подхода можно немного расширить до $8/(3\sqrt{3}) \approx 1,53$. Интересный и вполне заверченный анализ этой задачи дан в монографии [36], где указывается на необходимость изменения модели для получения результатов при всех значениях коэффициента трения. В [37, 38] данная проблема была решена с помощью метода сингулярных пространственно-временных преобразований в частном случае “прямого” падения стержня без бокового вращения и отсутствия поперечных скоростей. Было доказано, что предельное движение, при коэффициенте жесткости, стремящемся к бесконечности, полностью описывается вспомогательной системой “быстрого движения”, которая является предельной для движений с конечным, но достаточно большим коэффициентом жесткости. Были показаны эффекты резонансного поглощения кинетической энергии стержня и подскока без удара.

допущение его податливости. Таким образом, например, в [39] принимается полиномиальная зависимость силы реакции опоры от глубины проникновения [27]. Однако определение параметров этой модели представляет собой отдельную проблему. В [38] используется модель вязко-упругой силы, причем предполагается, что модель абсолютно жесткого тела получается при переходе к пределу по коэффициенту жесткости, стремящемуся к бесконечности. Отметим, что вывод условий восстановления, т.е. определения связи скоростей до и после удара, в общем виде не представляется возможным, так как скорости в момент разрыва контакта можно определить лишь численно как решения дифференциального уравнения “быстрого” движения. В данной статье используется аналогичный подход, но для случая “косого” удара.

2.1. Уравнения движения в обобщенных координатах

В качестве обобщенных координат выбираем координаты центра масс стержня, два угла наклона и их производные (рис. 1)

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathbf{X}_p &= [x_{10}, x_{20}, x_{30}, \psi, \theta]^\top, \\ \mathbf{X}_v &= \dot{\mathbf{X}}_p = [\dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \dot{x}_{30}, \dot{\psi}, \dot{\theta}]^\top. \end{aligned}$$

Положим

$$\mathbf{X}_v = [v_1, v_2, v_3, \dot{\psi}, \dot{\theta}]^\top,$$

тогда уравнения динамики стержня имеют вид

$$(2) \quad \dot{\mathbf{X}}_v = Q \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l\dot{\psi}^2 \sin \psi \cos^3 \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \psi \cos \theta \\ l\dot{\psi}^2 \cos \psi \cos^3 \theta + l\dot{\theta}^2 \cos \psi \cos \theta \\ L\dot{\psi}^2 \sin \theta + l\dot{\theta}^2 \sin \theta - g \\ \frac{2\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta}{\cos \theta} \\ -\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix},$$

матрица Q равна:

$$(3) \quad Q = \begin{bmatrix} 1 + 3 \cos^2 \psi + 3 \sin^2 \psi \sin^2 \theta & 3 \sin \psi \cos \psi \cos^2 \theta & 3 \sin \psi \sin \theta \cos \theta \\ 3 \sin \psi \cos \psi \cos^2 \theta & 1 + 3 \sin^2 \psi + 3 \cos^2 \psi \sin^2 \theta & -3 \cos \psi \sin \theta \cos \theta \\ 3 \sin \psi \sin \theta \cos \theta & -3 \cos \psi \sin \theta \cos \theta & 1 + 3 \cos^2 \theta \\ \frac{3 \cos \psi}{l \cos \theta} & \frac{3 \sin \psi}{l \cos \theta} & 0 \\ -\frac{3}{l} \sin \psi \sin \theta & \frac{3}{l} \cos \psi \sin \theta & -\frac{3}{l} \cos \theta \end{bmatrix}.$$

В уравнениях (2) и (3) зависимость от времени t опущена, F_1, F_2 – компоненты силы трения, F_3 – нормальная реакция опоры. Таким образом,

$$(4) \quad F_{\text{тр}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = -kF_3 \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, & \text{если } v_1^2 + v_2^2 \neq 0, \\ \leq k|F_3|, & \text{если } v_1^2 + v_2^2 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что сила трения не может быть определена из соотношений (4) при $v_1^2 + v_2^2 = 0$, т.е. при “стопорении” нижнего конца стержня. Далее, в подразделе 3.3 показано, как сила трения определяется из условия равновесия стержня с помощью численного решения.

Сила нормальной реакции

$$(5) \quad F_3 = -\mu x_{30} - 2\mu^{1/2} \delta \dot{x}_{30},$$

где μ – коэффициент жесткости, а $\delta \in [0, 1]$ – коэффициент вязкости.

Замечание 1. Для получения модели абсолютно жесткого тела коэффициент μ устремляется к бесконечности. Цель – описать предельное движение при $\mu \rightarrow \infty$, что соответствует модели абсолютно твердого тела. Отличие от традиционного комплементарного подхода – допущение о деформируемости поверхности.

2.2. Замена переменных: сингулярное пространственно-временное преобразование

Из анализа уравнений движения следует, что глубина проникновения стержня внутрь запрещенной области и время его пребывания там имеют порядок $\mu^{-1/2}$, поэтому следующая замена переменных растягивает временной интервал и область взаимодействия в масштаб порядка единицы:

$$(6) \quad \begin{aligned} t^\mu(s) &= \tau + \frac{1}{\sqrt{\mu}} s, \quad s \geq 0, \\ \mathbf{Y}_p^\mu(s) &= \mathbf{X}_p(\tau) + \sqrt{\mu} [\mathbf{X}_p(t^\mu(s)) - \mathbf{X}_p(\tau)], \\ \mathbf{Y}_v^\mu(s) &= \mathbf{X}_v(t^\mu(s)), \end{aligned}$$

где τ – момент начала сингулярной фазы движения (попадания на границу одностороннего ограничения).

Предложение 1. На интервале $s \in [0, S^*]$, где S^* – момент выхода из “запрещенной области”, существуют пределы:

$$(7) \quad \lim_{\mu \uparrow \infty} \mathbf{Y}_p^\mu(s) = \bar{\mathbf{Y}}_p(s), \quad \lim_{\mu \uparrow \infty} \mathbf{Y}_v^\mu(s) = \bar{\mathbf{Y}}_v(s),$$

удовлетворяющие системе уравнений “быстрого движения”.

Идея доказательства повторяет результат из [24] и состоит из следующих этапов: проверяется репульсивный характер ограничения и устанавливается равномерная по $\mu \uparrow \infty$ сходимости последовательности решений $(\mathbf{Y}_p^\mu(s), \mathbf{Y}_v^\mu(s))$ на интервале $s \in [0, S^*]$, откуда следует требуемый результат.

2.3. Уравнения “быстрого движения”

Предложение 2. Система уравнений “быстрого движения” имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{p}}(s) &= \bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{v}}(s), \\ (8) \quad \dot{\bar{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{v}}(s) &= -Q(\bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{p}}(0)) \begin{pmatrix} \frac{\bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{v}}^1}{\sqrt{(\bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{v}}^1)^2 + (\bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{v}}^2)^2}} \\ \frac{\bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{v}}^2}{\sqrt{(\bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{v}}^1)^2 + (\bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{v}}^2)^2}} \\ 1 \end{pmatrix} (-\bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{p}}^3 - 2\delta\bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{v}}^3)\mathbf{I}\{s \leq S^*\}, \end{aligned}$$

где

$$S^* = \inf \left\{ s : \bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{p}}^3(s) + 2\delta\bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{v}}^3(s) < 0 \right\}, \quad \bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{p}}(\mathbf{0}) = \mathbf{X}_{\mathbf{p}}(\tau), \quad \bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{v}}(\mathbf{0}) = \bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{v}}(\tau).$$

Доказательство этого факта для случая плоского удара приведено в [37, 38], для “косого” удара доказательство проводится аналогично.

Замечание 2. Система уравнений (8) имеет единственное решение и описывает фазу сингулярного движения при больших μ , что подтверждается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\mathbf{p}}(t) &\approx \mathbf{X}_{\mathbf{p}}(\tau) + \frac{\bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{p}}(\sqrt{\mu}(t - \tau)) - \mathbf{X}_{\mathbf{p}}(\tau)}{\sqrt{\mu}}, \\ \mathbf{X}_{\mathbf{v}}(t) &\approx \bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{v}}(\sqrt{\mu}(t - \tau)). \end{aligned}$$

Другими словами, “быстрое” решение позволяет приближенно описать все решения системы (2) при достаточно больших μ .

2.4. Уравнения для “скачка” скорости

Значения координат, линейных и угловых скоростей стержня после удара описываются соотношениями:

$$(9) \quad \lim_{\mu \uparrow \infty} \mathbf{X}_{\mathbf{p}}(\tau) = \mathbf{X}_{\mathbf{p}}(\tau-), \quad \lim_{\mu \uparrow \infty} \mathbf{X}_{\mathbf{v}}(\tau) = \bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{v}}(S^*),$$

где $\bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{v}}(s)$ – решение системы уравнений “быстрого” движения.

Доказательство. Идея доказательства повторяет в основном плоский случай [37, 38]:

- Совокупность решений системы имеет равномерно ограниченную по μ вариацию. Поэтому существует подпоследовательность, сходящаяся поточечно к пределу, удовлетворяющему системе (8);

- Правая часть системы (8) обладает свойством

$$\langle \dot{\bar{Y}}'_v - \dot{\bar{Y}}''_v, \bar{Y}'_v - \bar{Y}''_v \rangle \leq 0$$

для любых \bar{Y}'_v, \bar{Y}''_v . Это свойство позволяет заменить традиционное условие Липшица, которое используется для оценки квадрата разности скоростей двух предполагаемых решений.

Таким образом, на интервале $s \in [0, S^*]$ последовательность решений $(Y_p^\mu(s), Y_v^\mu(s))$ сходится к решению системы уравнений “быстрого” движения, которое можно определить численно и тем самым охарактеризовать поведение предельного движения, соответствующего модели абсолютно жесткого тела. Никаких ограничений на значение коэффициента трения данный подход не накладывает, и поэтому не возникает и “парадокса”.

3. Результаты численного моделирования

Особенность “косого” удара состоит в том, что при движении нижнего конца стержня может происходить его остановка, при этом вращение сохраняется. В модели деформируемой поверхности при соударении нижний конец стержня углубляется, происходит сжатие, которое затем разряжается путем выталкивания стержня. Момент завершения взаимодействия соответствует моменту обращения в нуль реакции опоры, после которого движение стержня происходит по инерции и уже под действием силы тяжести. Скорости стержня в момент размыкания контакта и определяют закон восстановления. При моделировании на первом этапе определяется профиль реакции опоры и момент обращения его в нуль. Это время различно для различных значений коэффициента трения. Кроме того, при численном решении уравнений “быстрого” движения (8) при “стопорении” нижнего конца, т.е. при обращении в нуль переменных \bar{Y}_v^1, \bar{Y}_v^2 , правая часть системы (8) не определена, хотя при численном решении эти переменные отличны от нуля, но происходит частое переключение знака силы, которое выглядит как “скользящий” режим, известный в теории автоматического управления [40]. Значение силы трения при “стопорении” стержня можно определить методом эквивалентного управления, приравняв в системе уравнений (8) производные переменных \bar{Y}_v^1, \bar{Y}_v^2 нулю.

3.1. Начальные условия

В момент начала удара принимаем

$$\begin{aligned} \bar{Y}_p &= [0, 0, 0, 0, \pi/3], \\ \bar{Y}_v &= [0,05; -0,05; -0,04; 4,0; 4,0]. \end{aligned}$$

Численный анализ производим для двух значений коэффициента трения: “малый” $k = 0,5$ и “большой” $k = 1,7$.

3.2. Малый коэффициент трения

Вычисление профиля силы реакции опоры показано на рис. 2.

Таким образом, время контакта равно $S^* = 1,865$. Профили скоростей (см. рис. 3) показывают, что “стопорения” не происходит, стержень просто тормозится.

Аналогично уменьшается угловая скорость вращения по углу θ (рис. 4).

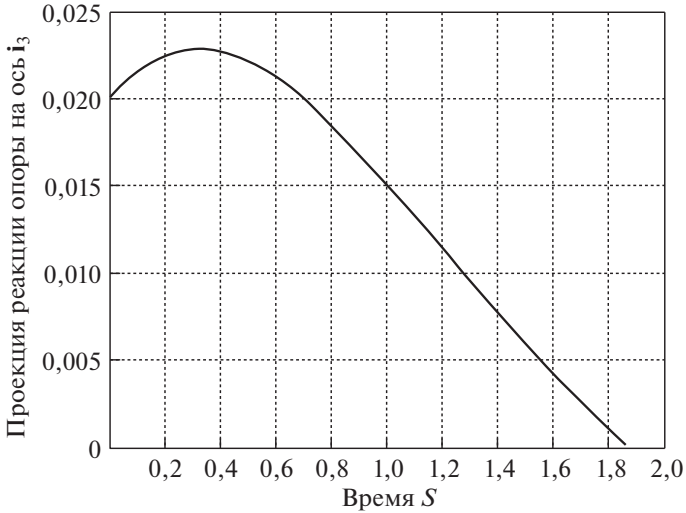


Рис. 2. Реакция опоры (обращается в нуль при $S^* = 1,865$).

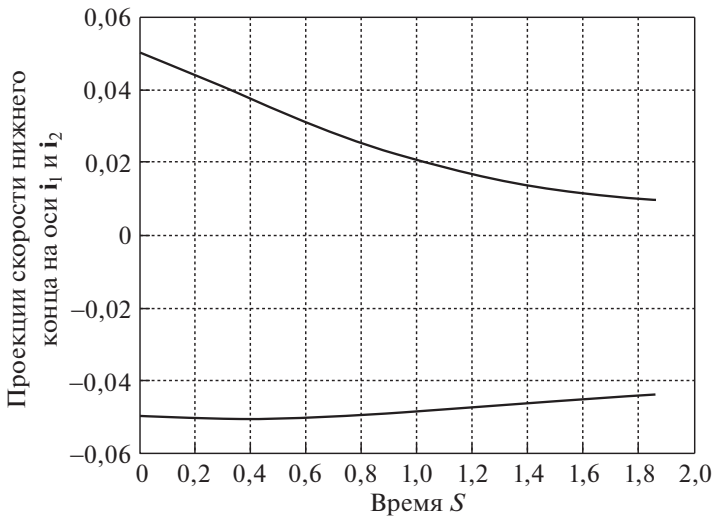


Рис. 3. Профиль скоростей по осям i_1, i_2 .

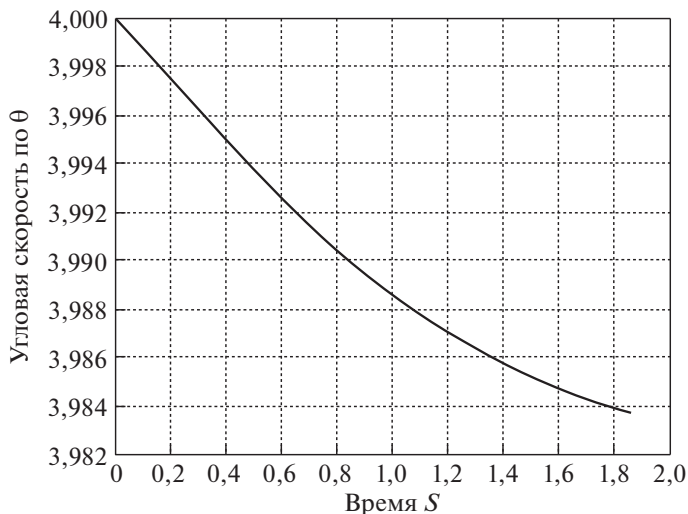


Рис. 4. Профиль угловой скорости вращения по θ .

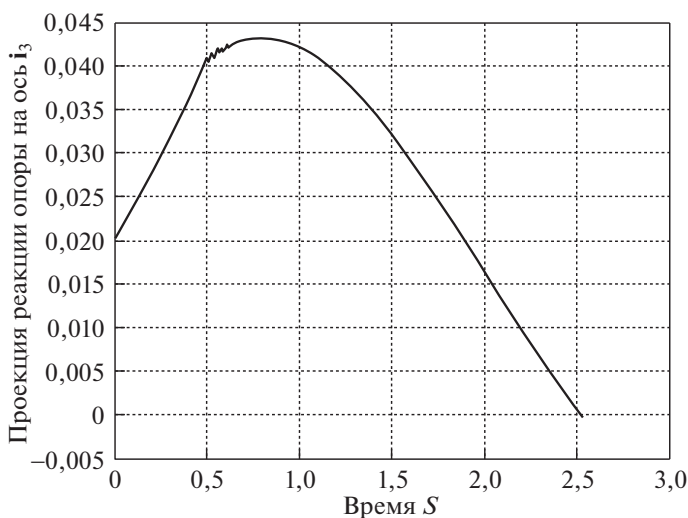


Рис. 5. Профиль реакции опоры (обращается в нуль при $S^* = 2,53$). В момент $S = 0,5$ происходит “стопорение” стержня, это можно увидеть по результатам численной процедуры, что проявляется в виде небольших зубцов на графике.

3.3. Большой коэффициент трения

Вычисление профиля силы реакции опоры показано на рис. 5.

Таким образом, время контакта равно $S^* = 2,53$. Профили скоростей (см. рис. 6), показывают, что момент “стопорения” равен $S = 0,5$.

На графике рис. 7 показано смещение нижнего конца стержня, некоторая асимметрия возникает из-за начального вращения по углу φ .

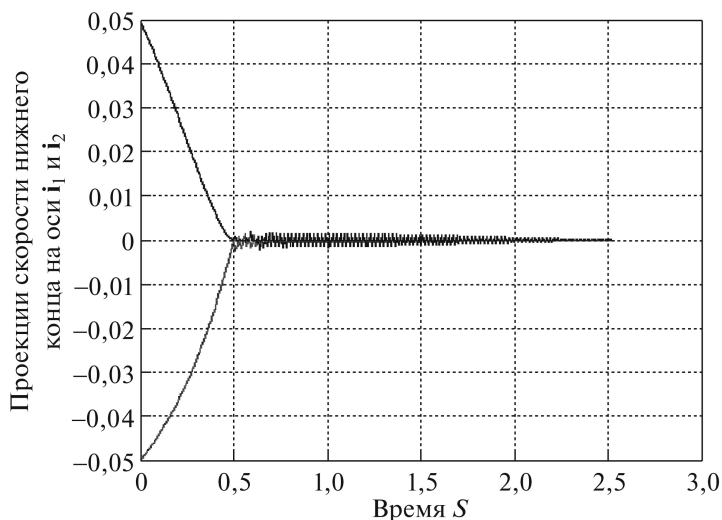


Рис. 6. Профили скоростей по осям $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$. После момента “стопорения” численная процедура показывает наличие “скользящего” режима.

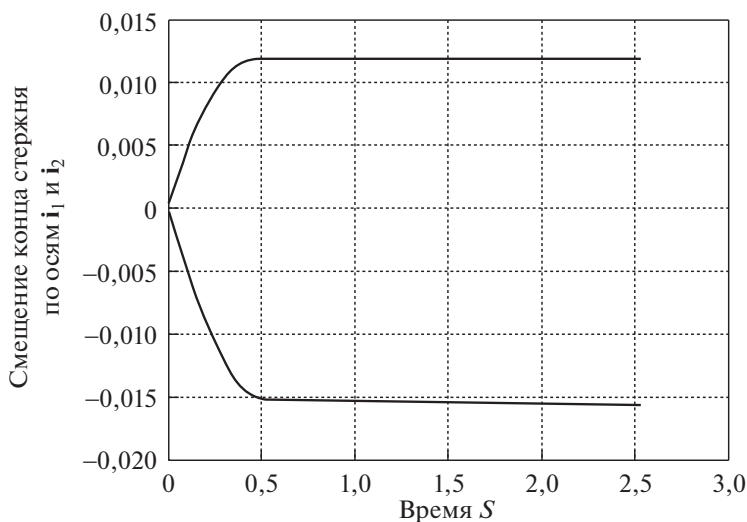


Рис. 7. Смещение нижнего конца стержня по осям $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$.

Угловая скорость вращения по углу θ обнаруживает наличие “стопорения” резким изменением знака углового ускорения в момент $S = 0,5$.

Этот эффект хорошо просматривается на рис. 8 в момент “стопорения” $S = 0,5$. Также можно сравнить теоретическое и найденное из численного решения значение силы трения. Для этого вычисляется интеграл от силы трения по оси \mathbf{i}_2 , соответствующий график представлен на рис. 9.

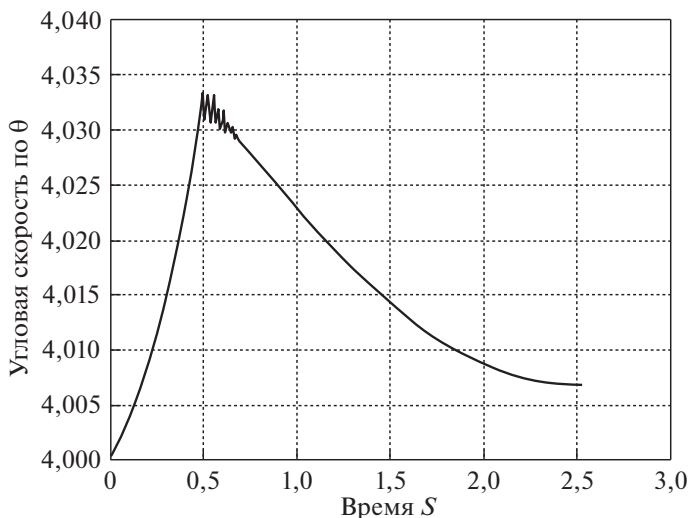


Рис. 8. Профиль угловой скорости вращения по θ при “большом” коэффициенте трения.

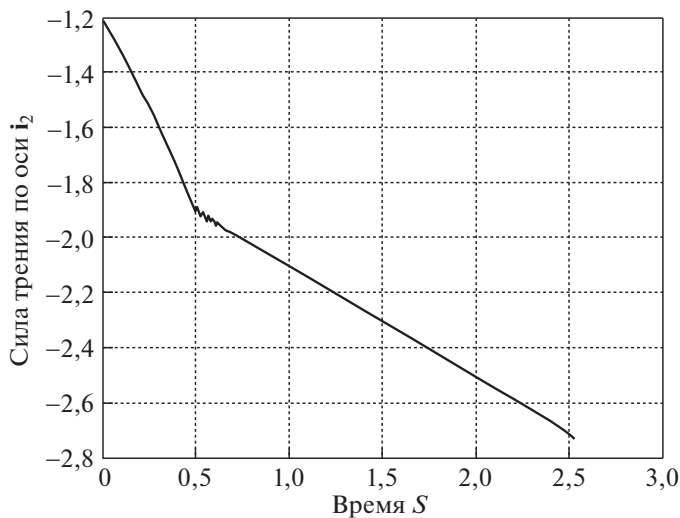


Рис. 9. Профиль интеграла силы трения по оси i_2 .

Из графика находим наклон второй половины, соответствующей режиму “стопорения”, равный $\approx -0,42$, теоретическое значение из условия $\dot{\mathbf{Y}}_{\mathbf{v}}^2 = 0$ дает значение наклона графика

$$-\frac{3 \sin \theta \cos \theta}{k(1 + 3 \cos^2 \theta)} \approx -0,437,$$

что можно считать неплохим соответствием.

4. Заключение

В данной статье показано, что импульсные воздействия, возникающие вследствие ударов в механических системах, требуют весьма аккуратных моделей для описания результатов такого взаимодействия. Метод пространственно-временных сингулярных преобразований позволяет “вскрывать” такие сингулярности, но часто требует применения численных методов. Многие авторы [27] считали, что для определения импульсной силы, возникающей при ударе, нужен закон взаимодействия и точное знание коэффициентов жесткости и вязкости. Однако предложенный подход, который гарантирует существование единственного решения при достаточно больших значениях жесткости и сходимостью к единственному решению при стремлении жесткости к бесконечности, позволяет однозначно определить скорости после удара и согласуется с экспериментальными результатами, демонстрирующими зависимость закона восстановления от угла падения стержня [38]. Отметим, что в публикациях, использующих другое описание взаимодействия стержня с поверхностью, например с точки зрения гибридных систем [35] закон Герца или полиномиальную зависимость [27, 39], парадокс Пенлеве не устраняется при больших коэффициентах трения, в то время как предложенный подход свободен от этого недостатка и позволяет определить скорости после удара при любом коэффициенте трения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыпкин Я.З.* Переходные и установившиеся процессы в импульсных системах. М.: Госэнергоиздат, 1951.
2. *Цыпкин Я.З.* Теория импульсных систем. М.: Физматгиз, 1958.
3. *Цыпкин Я.З.* Теория линейных импульсных систем. М.: Физматгиз, 1963.
4. *Поляк Б.Т.* Развитие теории автоматического управления // Проблемы управления. 2009. Спец. выпуск. № 3.1. С. 13–18.
5. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем / Пер. с румын. М.: Мир, 1971.
6. *Цыпкин Я.З., Попков Ю.С.* Теория нелинейных импульсных систем. М.: Наука, 1973.
7. *Rishel R.W.* An Extended Pontriagin Principle for Control Systems whose Control Laws Contain Measures // J. SIAM. Ser. A. Control. 1965. V. 3. No. 2. P. 191–205.
8. *Miller B.M., Rubinovitch E.Ya.* Impulsive Control in Continuous and Discrete-Continuous Systems. N.Y.: Kluwer Acad./Plenum Publishres, 2003.
9. *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005.
10. *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями и ударными воздействиями. М.: ЛЕНАНД/URSS, 2019.
11. *Миллер Б.М.* Метод разрывной замены времени в задачах оптимального управления импульсными и дискретно-непрерывными системами // АиТ. 1993. № 12. С. 3–32.
Miller B.M. Method of Discontinuous Time Change in Problems of Control for Impulse and Discrete-Continuous Systems // Autom. Remote Control. 1993. V. 54. No. 12. P. 1727–1750.

12. *Гурман В.И.* Об оптимальных процессах с неограниченными производными // *АиТ.* 1972. № 12. С. 14–21.
Gurman V.I. On Optimal Processes With Unbounded Derivatives // *Autom. Remote Control.* 1972. V. 33. No. 12. P. 1924–1930.
13. *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Динамические системы с разрывными решениями и задачи с неограниченными производными // *Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика.* 2017. Т. 19. С. 136–149.
14. *Завалишчин С.Т., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы: Модели и приложения. М.: Наука, 1991.
15. *Zavalishchin S.T., Seseikin A.N.* Dynamic Impulse Systems. Theory and Applications. The Netherlands, Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1997.
16. *Миллер Б.М.* Условие оптимальности в задаче управления системой, описываемой дифференциальным уравнением с мерой // *АиТ.* 1982. № 6. С. 60–72.
Miller B.M. An Optimality Condition in Control of a System which is Described by a Differential Equation with a Measure // *Autom. Remote Control.* 1982. V. 43. No. 6. P. 752–761.
17. *Миллер Б.М.* Условия оптимальности в задачах обобщенного управления. I, II // *АиТ.* 1992. № 3. С. 362–370; 1992. № 4. С. 505–513.
Miller B.M. Conditions for Optimality in Generalized Control Problems. I. Necessary Conditions for Optimality // *Autom. Remote Control.* 1992. V. 53. No. 3. P. 362–370.
Miller B.M. Optimality Conditions in Generalized Control Problems. II. Sufficient Conditions of Optimality // *Autom. Remote Control.* 1992. V. 53. No. 4. P. 505–513.
18. *Дыхта В.А., Самсонок О.Н.* Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000.
19. *Bressan A., Rampazzo F.* On Differential Systems with Quadratic Impulses and Their Applications to Lagrangian Mechanics // *SIAM J. Control Optim.* 1993. V. 31. P. 1206–1220.
20. *Bressan A., Rampazzo F.* Impulsive Control Systems without Commutativity Assumptions // *J. Optim. Theory Appl.* 1994. V. 81. No. 3. P. 435–457.
21. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механического удара. М.: Наука, 1977.
22. *Козлов В., Трешев Д.* Биллиарды. (Генетическое введение в динамику систем с ударами). М.: Изд-во МГУ, 1991.
23. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. М.: Междунар. программа образования, 1997.
24. *Bentsman J., Miller B.M.* Dynamical Systems with Active Singularities of Elastic Type: A Modeling and Controller Synthesis Framework // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2007. V. 52. No. 1. P. 39–55.
25. *Миллер Б.М.* Управляемые системы с ударными воздействиями // *Соврем. мат. Фундамент. направл.* 2011. Т. 42. С. 166–178.
26. *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярной пространственно-временной замены // *АиТ.* 2013. № 12. С. 56–103.
Miller B.M., Rubinovich E.Ya. Discontinuous Solutions in the Optimal Control Problems and their Representation by Singular Space-Time Transformations // *Autom. Remote Control.* 2013. V. 74. No. 12. P. 1969–2006.
27. *Stronge W.J.* Rigid Body Collisions with Friction // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1990. V. 431. P. 168–181.

28. *Paoli L., Schatzman M.* Mouvement à un nombre fini de degrés de liberté avec contraintes unilatérales: cas avec perte d'énergie // *Math. Modelling and Numerical Analysis*. 1993. No. 27. P. 673–717.
29. *Painlevé P.* Leçons sur le Frottement. Paris: Hermann, 1895. / Пер. Пенлеве П. Лекции о трении. М.: ГиТТЛ, 1954.
30. *Самсонов В.А.* Динамика тормозного башмака и “удар, вызванный трением” // *Прикл. математика и механика*. 2005. Т. 69. № 6. С. 912–921.
31. *Stewart D.E.* Convergence of a Time-Stepping Scheme for Rigid-Body Dynamics and Resolution of Painlevé's Problem // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1998. V. 145. P. 215–260.
32. *Stewart D.E.* Rigid-Body Dynamics with Friction and Impact // *SIAM Rev.* 2000. V. 42. No. 1. P. 3–39.
33. *Ballard P., Basseville S.* Existence and Uniqueness for Dynamical Unilateral Contact with Coulomb Friction: a Model Problem // *Math. Model. Numer. Anal.* 2005. V. 39. No. 1. P. 59–77.
34. *Schatzman M.* Penalty Approximation of Painlevé Problem // *Adv. Mech. Math. Nonsmooth mechanics and analysis*. N.Y.: Springer, 2006. V. 12. P. 129–143.
35. *Génot F., Brogliato B.* New Results on Painlevé Paradoxes // *Eur. J. Mech. A/Solids*. 1999. V. 18. No. 18. P. 653–678.
36. *Pfeifer F., Glocker C.* Multi-Body Dynamics with Unilateral Constraints. N.Y.: Wiley, 1996.
37. *Miller B.M., Rubinovich E.Ya., Bentsman J.* Spatiotemporal Singular Transformation in Dynamical Systems with Impacts and its Use in Obtaining Generalized Solution of Painlevé Problem // *Preprints 18th IFAC World Congr. Milano (Italy)*. August 28–September 2. 2011. P. 3463–3473.
38. *Miller B.M., Rubinovich E.Ya., Bentsman J.* Singular Space-time Transformations. Toward one Method for Solving the Painlevé Problem // *J. Math. Sci.* 2016. V. 219. No. 2. P. 208–219.
39. *Zhao ea. Z.* The Painlevé Paradox Studied at a 3D Slender Rod // *Multibody Syst. Dyn.* 2008. V. 19. P. 323–343.
40. *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиньм.

Поступила в редакцию 19.07.2018

После доработки 11.10.2018

Принята к публикации 08.11.2018