Автоматика и телемеханика, № 10, 2019

**© 2019 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
П.С. ЩЕРБАКОВ, д-р физ.-мат. наук (cavour118@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН,
Москва)**

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ: II. РОБАСТНЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ[1]

Классическая задача синтеза линейно-квадратичного регулятора рассматривается в робастных постановках, когда матрица системы и/или начальные условия известны неточно. Рассмотрено несколько подходов, при которых квадратичный функционал минимизируется против наихудших неопределенностей. Отыскание такого регулятора осуществляется сведением матричного неравенства Риккати с неопределенностью к одному линейному матричному неравенству. Обсуждаются свойста решения, проводится сравнение с ранее известными подходами.

Ключевые слова: линейно-квадратичный регулятор, неопределенность, робастность, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.1134/S0005231019100064

1. Введение

Необходимость учета неопределенности в модели систем при синтезе регуляторов всегда была в центре внимания исследователей на всех этапах развития теории управления; сама идея обратной связи возникла именно как средство борьбы с неопределенностью. Регулятор, работоспособный в условиях неопределенности, называется робастным. Имеется очень много постановок задач робастности: при параметрической и частотной неопределенностях, внешних возмущениях и др. В начале 80-х годов прошлого столетия, после появления знаменитой публикации В.Л. Харитонова [1], вопросы *параметрической* робастности привлекли исключительное внимание специалистов по управлению и вызвали шквал работ в этой области. В нашей стране энтузиастом и пионером этого направления исследований становится Яков Залманович Цыпкин; около 50 его публикаций по робастности систем управления, первые из которых [2–4] датируются 1990-м г., собрали огромное количество ссылок. Именно Яков Залманович сформулировал требование "робастизации" теории управления, которое успешно воплощалось в жизнь в последующие десятилетия.

Во второй половине 90-х гг. теория параметрической робастности систем управления приобретает черты сложившегося направления теории управления, включающего в себя новые постановки задач и использование совершенно иных подходов (например, таких, как линейные матричные неравенства,

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00140).

вероятностные методы и др.), а развитие вычислительной техники позволяет в настоящее время решать задачи существенно более высоких размерностей. Тем не менее данная область остается живой и развивающейся дисциплиной, результаты которой находят многочисленные применения на практике, а некоторые вопросы требуют дальнейшего изучения.

В настоящей статье авторы продолжают эту линию исследований, обращаясь к классической задаче о линейно-квадратичном регуляторе (LQR), но в робастной постановке, когда матрицы системы известны с точностью до аддитивного возмущения, ограниченного по норме; в этой ситуации ищется регулятор, который минимизирует квадратичный функционал против наихудшей допустимой неопределенности. Второй естественный источник неопределенности — начальные условия, которые, как правило, тоже известны лишь с точностью до некоторой области и которые также должны учитываться при синтезе регулятора.

Работа является непосредственным продолжением публикации [5], в которой рассматривалась задача LQR без неопределенности в матрицах системы, а ее решение находилось с помощью аппарата линейных матричных неравенств (LMI) [6]. Этот подход обладает большой гибкостью, сопровождается удобными вычислительными средствами и, как будет показано далее, весьма удобен при решении робастных постановок задачи. По-видимому, впервые LMI-формулировка линейно-квадратичной задачи была предложена в [7], а связь между LQR-задачей и техникой линейных матричных неравенств была четко сформулирована в [6]. Большой вклад в изучение линейно-квадратичной задачи и ее LMI-решения внесли отечественные исследователи Д.В. Баландин и М.М. Коган, см., например, [8, 9].

В публикациях имеются результаты по синтезу робастного регулятора для задачи LQR с неопределенностью; первыми из них, по-видимому, являются [10, 11]. Эта тематика привлекала внимание исследователей и в дальнейшем; например, отметим обзор [12]; небольшой обзор по данной проблематике приведен в [5]. Более свежие результаты относятся к синтезу робастного регулятора при ограничении на управление [13], на случай наличия неопределенности в матрице синтезируемого регулятора [14] (так называемая проблема нехрупкости) и др.; см. также [15]. Отдельно отметим публикацию [8], в которой решается проблема робастности линейно-квадратичного регулятора по отношению к начальным условиям.

В настоящей статье некоторые из имеющихся результатов обобщаются по следующим направлениям. Приводится “явная” численная процедура отыскания решения робастной LQR-задачи на основе линейных матричных неравенств, приводятся формулировки, в которых синтезируемый робастный регулятор не зависит от начальных условий и доказывается инвариантность полученного решения к преобразованиям координат. Принципиально новыми представляются формулировки в теоремах 6 и 7, приводящие к робастным регуляторам, обладающим указанными привлекательными свойствами.

Также обсуждаются некоторые альтернативные формулировки и подходы к решению и демонстрируются их недостатки. Часть результатов представляет собой непосредственную “робастизацию” — перенесение результатов из неробастной постановки на случай наличия неопределенности. Рассматривается простейшая постановка задачи в рамках статической линейной обратной связи по состоянию, без привлечения более гибких инструментов, таких как, например, динамический регулятор по выходу.

2. Линейно-квадратичная задача без неопределенности

Для полноты изложения напомним постановку задачи о линейно-квадратичном регуляторе без неопределенности, приведем ее классическое решение и совпадающее с ним решение, получаемое с использованием линейных матричных неравенств.

Рассматривается система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ и $u \in \mathbb{R}^m$ — состояние и управление, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, пара (A, B) управляема, а начальное условие x_0 фиксировано, но произвольно.

В простейшей форме задача LQR заключается в синтезе управления в форме линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \qquad K \in \mathbb{R}^{m\times n}, \tag{2}$$

которое минимизирует следующий квадратичный критерий качества:

$$J = \int_0^\infty (x^\top Rx + u^\top Su)\, dt, \tag{3}$$

где $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — заданные положительно определенные весовые матрицы (так что $J \geqslant 0$).

Для того чтобы функционал J был конечен, необходимо и достаточно, чтобы система (1), замкнутая обратной связью (2), была устойчива. Управляемость пары (A, B) гарантирует существование стабилизирующих обратных связей.

Классический метод решения (например, см. [16]) основан на рассмотрении *алгебраического уравнения Риккати*

$$A^\top Q + QA - QBS^{-1}B^\top Q + R = 0 \tag{4}$$

относительно матрицы $Q \succ 0$. При этом оптимальный регулятор дается выражением

$$K_{\mathrm{ric}} = -S^{-1}B^\top Q_{\mathrm{ric}}, \tag{5}$$

а минимальное значение функционала (3) равно

$$J_{\mathrm{ric}} = x_0^\top Q_{\mathrm{ric}} x_0,$$

где Q_{ric} — положительно определенное решение уравнения (4). Такое решение существует и единственно в предположении об управляемости системы и невырожденности весовых матриц; при этом форма

$$V(x) = x^\top Q_{\mathrm{ric}} x$$

является квадратичной функцией Ляпунова для замкнутой системы.

Принципиально важно, что в полученном решении от начальных условий зависит лишь значение функционала, но не сам оптимальный регулятор K_{ric} (и матрица Q_{ric}).

В дальнейшем будем рассматривать модификацию задачи, когда в матрицах системы присутствует неопределенность. В этом случае получить решение через уравнение Риккати уже не удастся — для каждой реализовавшейся допустимой неопределенности следует решать свое уравнение Риккати. Поэтому встанем на позиции робастности и будем строить регулятор, *робастно стабилизирующий* систему против всех допустимых неопределенностей и минимизирующий некоторый схожий с (3) функционал. Для этого воспользуемся подходом, основанным на *линейных матричных неравенствах*.

Напомним следующий результат, позволяющий находить оптимальный регулятор (5) через решение задачи полуопределенного программирования (SDP); он восходит к [6] и был подробно обсужден в [5].

Теорема 1. *Пусть P_{lmi} — решение задачи SDP*

$$\gamma \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top - BS^{-1}B^\top & P \\ P & -R^{-1} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где минимизация проводится по матричной переменной $P = P^\top$ и скалярной переменной γ.

Тогда регулятор (2) *с матрицей*

$$K_{\mathrm{lmi}} = -S^{-1}B^\top P_{\mathrm{lmi}}^{-1}$$

стабилизирует систему (1), *квадратичная форма $V(x) = x^\top P_{\mathrm{lmi}}^{-1} x$ является функцией Ляпунова для замкнутой системы, а величина $x_0^\top P_{\mathrm{lmi}}^{-1} x_0$ определяет минимальное значение функционала* (3) *на решениях замкнутой системы.*

Как видно из формулировки теоремы 1, LMI-регулятор *зависит от начальных условий*. Таким образом, при их изменении задачу приходится решать заново; более того, примеры показывают, что отличие таким образом получаемого x_0-зависимого регулятора от Риккати-регулятора (5) может быть довольно существенным. Следующий результат позволяет получить в рамках LMI-подхода регулятор, не зависящий от начальных условий и совпадающий с Риккати-решением.

Теорема 2 [5]. *Пусть P_{ric} — решение задачи полуопределенного программирования*

$$\operatorname{tr} Z \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top - BS^{-1}B^\top & P \\ P & -R^{-1} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad \begin{pmatrix} Z & I \\ I & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным $P = P^\top$ и $Z = Z^\top$.

Тогда

$$Q_{\mathrm{ric}} = P_{\mathrm{ric}}^{-1}, \qquad K_{\mathrm{ric}} = -S^{-1}B^\top P_{\mathrm{ric}}^{-1},$$

где Q_{ric} и K_{ric} определены в (4) *и* (5) *через решение уравнения Риккати.*

Численное решение оптимизационных задач как из теорем 1 и 2, так и из всех теорем, приведенных далее в тексте, может быть эффективно получено с помощью имеющихся специализированных пакетов в среде Matlab, например, `cvx` [17].

Ключевым в теоремах 1 и 2 является первое ограничение. Оно представляет собой *неравенство* Риккати, соответствующее уравнению (4), но записанное в форме *линейного матричного неравенства* относительно матричной переменной $P = Q^{-1}$. Любому положительно определенному решению P этого неравенства соответствует регулятор по состоянию, стабилизирующий систему. Во всех приводимых далее робастных формулировках задачи LQR это неравенство будет записано для матриц, содержащих неопределенность, и переписано в удобной эквивалентной форме с помощью так называемой леммы Питерсена. На решениях неравенства Риккати и вспомогательных LMI будет минимизироваться та или иная линейная целевая функция, приводящая к тому или иному робастному решению задачи.

3. Ограниченная по норме неопределенность

3.1. Общая постановка задачи

Пусть в матрице системы присутствует неопределенность:

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bu, \qquad x(0) = x_0, \tag{7}$$

где F и H — постоянные матрицы соответствующих размерностей, а матричная неопределенность Δ ограничена в спектральной (или фробениусовой) норме:

$$\|\Delta\| \leqslant \delta. \tag{8}$$

Такого рода неопределенность часто рассматривается в задачах робастной устойчивости матриц [15].

Требуется найти управление в форме линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \tag{9}$$

которое робастно стабилизирует систему (7) против всех неопределенностей (8) и минимизирует некоторый интегральный критерий качества, аналогичный (3), вид которого уточним далее.

В отличие от неробастной постановки, где конечность оптимизируемого функционала обеспечивалась существованием стабилизирующего регулятора, здесь необходимо гарантировать *робастную стабилизацию*. Везде далее под оптимизацией функционала будет пониматься отыскание его минимума в более узком классе *квадратично стабилизирующих регуляторов*, поскольку построение просто стабилизирующей обратной связи для семейства систем является существенно более трудной задачей. Поскольку наличие общей функции Ляпунова у семейства замкнутых систем лишь достаточно для их робастной устойчивости, то ограничимся отысканием верхней оценки для функционала. Таким образом, оптимальность будем обеспечивать лишь на множестве робастно *квадратично* стабилизирущих регуляторов, не оговаривая это в соответствующих утверждениях.

3.2. Радиус квадратичной стабилизируемости

Ясно, что робастная стабилизация (в том числе и квадратичная), вообще говоря, возможна не при любом уровне неопределенности Δ. Введем в рассмотрение *радиус робастной квадратичной стабилизируемости* $\delta_{\max}$ — максимальное значение величины δ, при которой все еще существует такое K, которое стабилизирует систему робастно квадратично при всех $\|\Delta\| < \delta$: [2]

$$\delta_{\max}^{\mathrm{st}} = \sup\Big\{\delta\colon\ \big(A + F\Delta H + BK\big)P + P\big(A + F\Delta H + BK\big)^\top \prec 0 \\ \text{при некотором } P \succ 0,\ \text{регуляторе } K \text{ и всех } \|\Delta\| \leqslant \delta\Big\}.$$

Отыскание этой величины может быть эффективно осуществлено через решение задачи SDP.

Теорема 3 [15]. *Пусть $\widehat{\delta}$ — решение задачи полуопределенного программирования*

$$\delta \longrightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \delta FF^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0,$$

[2] Интересно заметить, что радиус квадратичной стабилизируемости может не быть конечным, см. примеры в [15].

относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times n}$ *и скалярной переменной* δ. *Тогда радиус квадратичной стабилизируемости системы* (7)–(9) *равен* $\delta_{\max}^{\mathrm{st}} = \sqrt{\widehat{\delta}}$.

Без потери общности считаем, что $\delta < \delta_{\max}^{\mathrm{st}}$ (в противном случае робастная квадратичная стабилизация невозможна), и далее полагаем, что $\|\Delta\| \leqslant 1$, а матрица F в (7) соответствующим образом отмасштабирована: $F \to \sqrt{\delta}\, F$.

3.3. Применение леммы Питерсена

Для неопределенной системы (7), (8) неравенство Риккати

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top - BS^{-1}B^\top & P \\ P & -R^{-1} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \tag{10}$$

принимает вид

$$\begin{pmatrix} (A + F\Delta H)P + P(A + F\Delta H)^\top - BS^{-1}B^\top & P \\ P & -R^{-1} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \tag{11}$$

выполнение которого при всех допустимых $\|\Delta\| \leqslant 1$ и некотором $P \succ 0$ гарантирует существование регулятора вида (9), стабилизирующего систему робастно квадратично.

Представим (11) в виде

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top - BS^{-1}B^\top & P \\ P & -R^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} HP & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} PH^\top \\ 0 \end{pmatrix} \Delta^\top \begin{pmatrix} F^\top & 0 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Воспользовавшись леммой Питерсена [18, 19], заключаем, что полученное матричное неравенство выполняется при всех допустимых значениях матричной неопределенности $\|\Delta\| \leqslant 1$ тогда и только тогда, когда существуют число ε и матрица $P \succ 0$ такие, что

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top - BS^{-1}B^\top + \varepsilon FF^\top & P & PH^\top \\ * & -R^{-1} & 0 \\ * & * & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0. \tag{12}$$

Это означает, что соответствующий регулятор $K = -S^{-1}B^\top P^{-1}$ робастно стабилизирует систему (7). Неравенство (12) называем робастным аналогом (6).

Замечание. Обратим внимание, что неравенству (12) можно придать эквивалентную форму

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top - BS^{-1}B^\top + \varepsilon FF^\top & PR & PH^\top \\ * & -R & 0 \\ * & * & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

при этом можно рассматривать *положительно полуопределенные* весовые матрицы R.

4. Робастные формулировки линейно-квадратичной задачи

С учетом изложенного, теперь будем рассматривать различные робастные постановки задачи LQR и давать их решения. Прежде всего для каждой из них важно сформировать свой функционал качества; начнем с простейшей постановки.

4.1. Решение, зависящее от начальных условий

Считаем, что начальное условие x_0 задано. Тогда за критерий качества стабилизирующего регулятора естественно принять

$$J = \max_{\|\Delta\| \leqslant 1} \int\limits_0^\infty (x^\top R x + u^\top S u)\, dt, \tag{13}$$

характеризующий "потери" при наихудшей реализовавшейся неопределенности Δ.

Заменяя в теореме 1 неравенство (6) на (12), немедленно приходим к ее робастному аналогу.

Теорема 4. *Пусть P_{lmi} — решение задачи полуопределенного программирования*

$$\gamma \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top - BS^{-1}B^\top + \varepsilon FF^\top & P & PH^\top \\ * & -R^{-1} & 0 \\ * & * & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad \begin{pmatrix} \gamma & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где минимизация проводится по матричной переменной $P = P^\top$ и скалярным переменным γ и ε.

Тогда регулятор (9) *с матрицей*

$$K_{\mathrm{lmi}} = -S^{-1}B^\top P_{\mathrm{lmi}}^{-1}$$

робастно стабилизирует систему (7), *квадратичная форма $V(x) = x^\top P_{\mathrm{lmi}}^{-1} x$ является общей функцией Ляпунова для замкнутой системы при всех неопределенностях* (8), *а минимальное значение функционала* (13) *на решениях системы* (7) *равно $x_0^\top P_{\mathrm{lmi}}^{-1} x_0$.*

Этот результат немедленно получается из неробастной формулировки в [5]. Среди "естественных" свойств полученного регулятора отметим его переход в свою неробастную (номинальную) версию при уменьшении до нуля уровня возмущения Δ.

Хотя полученный регулятор (квадратично) робастно оптимален против всех допустимых неопределенностей, он, как и в неробастной постановке, зависит от начальных условий и либо должен пересчитываться для иных x_0, либо может давать для них очень низкое качество, см. обсуждение и примеры в [5].

4.2. “Дважды робастная” постановка

Попробуем избавиться от зависимости от начальных условий, встав на позиции робастности не только по отношению к неопределенности в матрице системы, но и в начальных условиях.

Для этого, считая без ограничения общности, что начальное условие x_0 лежит в единичном евклидовом шаре, в качестве функционала качества примем

$$J = \max_{\|x_0\|\leqslant 1} \max_{\|\Delta\|\leqslant 1} \int\limits_0^\infty (x^\top Rx + u^\top Su)\, dt. \tag{14}$$

В неробастном случае такая естественная постановка — против наихудших начальных условий из единичного шара — впервые была предложена в [8].

Поскольку требование $\|x_0\| \leqslant 1$ эквивалентно

$$x_0 x_0^\top \preccurlyeq I, \tag{15}$$

то потребуем, чтобы (15) влекло выполнение целевого неравенства

$$x_0{}^\top P^{-1} x_0 \leqslant \gamma$$

при минимальном значении параметра γ. Это условие эквивалентно выполнению

$$I \succcurlyeq (\gamma P)^{-1},$$

или относительно (подлежащей максимизации) вспомогательной переменной $t \doteq 1/\gamma$ — условию

$$P \succcurlyeq tI.$$

Итак, приходим к следующему утверждению, которое является робастным аналогом теоремы 3 из [5].

Т е о р е м а 5. *Пусть P_{rob} — решение задачи полуопределенного программирования*

$$t \longrightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top - BS^{-1}B^\top + \varepsilon FF^\top & P & PH^\top \\ * & -R^{-1} & 0 \\ * & * & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succcurlyeq tI,$$

где минимизация проводится по матричной переменной $P = P^\top$ и скалярным переменным t и ε.

Тогда регулятор (9) *с матрицей*

$$K_{\text{rob}} = -S^{-1}B^\top P_{\text{rob}}^{-1}$$

робастно стабилизирует систему (7) *и доставляет минимум функционалу* (14) *на решениях системы* (7).

Заключаем, что минимальное значение функционала (14) равно

$$J_{\rm opt} = \max_{\|x\|\leqslant 1} x^\top P_{\rm rob}^{-1} x = \|P_{\rm rob}^{-1}\|,$$

и оно достигается на единичном собственном векторе, соответствующем максимальному собственному значению матрицы $P_{\rm rob}^{-1}$.

Таким образом, регулятор $K_{\rm rob}$ "дважды робастен": и против возмущений в матрице, и против начальных условий. Однако, будучи рассчитанным на "наихудшее" начальное условие, такой регулятор может давать сильно консервативные оценки функционала при других x_0, см. обсуждение и примеры в [5]. Кроме того, при уменьшении уровня неопределенности Δ до нуля он *не переходит* в свою неробастную форму из-за присутствия неравенства $P \succcurlyeq tI$. Наконец, как увидим далее, управление $u = K_{\rm rob}x$ неинвариантно к линейным преобразованиям координат, тогда как это свойство представляется очень привлекательным, см. обсуждение далее.

4.3. Усреднение по начальным условиям

Чтобы смягчить условие робастности по начальным условиям, используем идею усреднения по x_0, считая, что x_0 — случайная величина, равномерно распределенная по поверхности единичного шара. При отсутствии неопределенности Δ эта идея, восходящая к [20], использовалась в [5], приводя к теореме 2. В этой теореме минимизировалась величина $\mathsf{E}(x_0^\top P^{-1}x_0) = \frac{1}{n}\operatorname{tr} P^{-1}$ по всем $P \succ 0$, удовлетворяющим (6).

Следуя той же логике, при наличии неопределенности вместо функционала (14) будем рассматривать функционал

$$J = \mathsf{E} \max_{\|\Delta\|\leqslant 1} \int_0^\infty (x^\top Rx + u^\top Su)\, dt. \tag{16}$$

В робастном (по Δ) варианте, заменяя в теореме 2 неравенство (6) на (12), приходим к следующему результату.

Т е о р е м а 6. *Пусть $P_{\rm avr}$ — решение задачи полуопределенного программирования*

$$\operatorname{tr} Z \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top - BS^{-1}B^\top + \varepsilon FF^\top & P & PH^\top \\ * & -R^{-1} & 0 \\ * & * & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad \begin{pmatrix} Z & I \\ I & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным $P = P^\top$ и $Z = Z^\top$ и скалярной переменной ε.

Тогда регулятор (9) *с матрицей*

$$K_{\rm avr} = -S^{-1}B^\top P_{\rm avr}^{-1}$$

робастно стабилизирует систему (7), *квадратичная форма* $V(x) = x^\top P_{\rm avr}^{-1}x$ *является общей функцией Ляпунова для замкнутой системы при всех неопределенностях* (8), *а минимальное значение функционала* (16) *на решениях системы* (7) *равно* $\frac{1}{n}\operatorname{tr} P_{\rm avr}^{-1}$.

Полученный регулятор переходит в свою неробастную версию при $\|\Delta\| \to \to 0$, и, как увидим далее, соответствующее управление инвариантно к линейной замене координат.

4.4. Еще одна робастная формулировка

Предложим еще один способ “починить” найденный в подразделе 4.2 регулятор $K_{\rm rob}$, который в равной мере противостоит как всем допустимым неопределенностям, так и всем начальным условиям из единичного шара. Фактически, при его отыскании единичный шар $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ помещается внутрь эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1}x \leqslant 1\},$$

задаваемого матрицей P (которая удовлетворяет LMI (12)), и максимизируется его радиус. При такой постановке все начальные точки x_0 равноправны.

Поступим по-другому — откажемся от равноправия начальных точек и будем внутрь эллипсоида помещать не шар, а “неробастный” эллипсоид с матрицей $P_{\rm ric}$, вычисляемой согласно теореме 2 и характеризующей поведение *номинальной системы*. Таким образом, в теореме 5 второе ограничение заменим на

$$P \succcurlyeq tP_{\rm ric}$$

и получим следующий результат.

Теорема 7. *Пусть* $P_{\rm inv}$ — *решение задачи полуопределенного программирования*

$$t \longrightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top - BS^{-1}B^\top + \varepsilon FF^\top & P & PH^\top \\ * & -R^{-1} & 0 \\ * & * & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succcurlyeq tP_{\rm ric},$$

где минимизация проводится по матричной переменной $P = P^\top$ *и скалярным переменным* t *и* ε.

Тогда регулятор с матрицей

$$K_{\rm inv} = -S^{-1}B^\top P_{\rm inv}^{-1}$$

робастно стабилизирует систему (7), *доставляя функционалу* (14) *значение* $\|P_{\rm inv}^{-1}\|$.

Вполне понятно, что регулятор K_{inv} будет давать несколько худшее значение функционала (14) по сравнению с K_{rob}. Однако соответствующее управление также не зависит от преобразования координат; покажем это.

5. Инвариантность к преобразованию фазовых координат

Решив тем или иным из описанных выше способов LQR-задачу, естественно ожидать, что найденное оптимальное управление u_{opt}, формально зависящее от фазовых координат, не изменится при их линейном преобразовании. Так ли это?

Сначала рассмотрим неробастный случай. Напомним, что решение соответствующей LQR-задачи предоставляется теоремой 1 (x_0-зависимое решение) и теоремой 2 (это решение совпадает с Riccati-решением и не зависит от начальных условий).

При переходе к новым фазовым координатам путем невырожденного преобразования

$$x = T\widetilde{x} \tag{17}$$

система (1) примет вид

$$\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{A}\widetilde{x} + \widetilde{B}u, \qquad \widetilde{x}(0) = \widetilde{x}_0, \tag{18}$$

где u — какое-то управление, а

$$\widetilde{A} = T^{-1}AT, \qquad \widetilde{B} = T^{-1}B, \qquad \widetilde{x}_0 = T^{-1}x_0.$$

При этом очевидным образом преобразуется и весовая матрица R:

$$\widetilde{R} = T^{\top}RT.$$

Далее, для системы (18) неравенство (10) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}\widetilde{P} + \widetilde{P}\widetilde{A}^{\top} - \widetilde{B}S^{-1}\widetilde{B}^{\top} & \widetilde{P} \\ \widetilde{P} & -\widetilde{R}^{-1} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

или

$$\begin{pmatrix} T^{-1}AT\widetilde{P} + \widetilde{P}T^{\top}A^{\top}T^{\top -1} - T^{-1}BS^{-1}B^{\top}T^{\top -1} & \widetilde{P} \\ \widetilde{P} & -T^{-1}R^{-1}T^{\top -1} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Домножив полученное неравенство слева на матрицу $\operatorname{diag}\left\{T \quad T\right\}$ и справа на матрицу $\operatorname{diag}\left\{T^{\top} \quad T^{\top}\right\}$, приходим к соотношению

$$\begin{pmatrix} AT\widetilde{P}T^{\top} + T\widetilde{P}T^{\top}A^{\top} - BS^{-1}B^{\top} & T\widetilde{P}T^{\top} \\ T\widetilde{P}T^{\top} & -R^{-1} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0. \tag{19}$$

Из полученного соотношения вытекает, что LMI (10) для системы (1) выполняется при некотором P тогда и только тогда, когда оно выполняется для системы (18) при

$$\widetilde{P} = T^{-1}P(T^{\top})^{-1}. \tag{20}$$

При этом

$$\widetilde{K} = -S^{-1}\widetilde{B}^{\top}\widetilde{P}^{-1} = -S^{-1}B^{\top}T^{\top^{-1}}T^{\top}P^{-1}T = -S^{-1}B^{\top}P^{-1}T = KT$$

и

$$\widetilde{x}_0^{\top}\widetilde{P}^{-1}\widetilde{x}_0 = x_0^{\top}T^{\top^{-1}}T^{\top}P^{-1}TT^{-1}x_0 = x_0P^{-1}x_0.$$

Следовательно, решение задачи из теоремы 1 будет давать то же значение для функционала J, и при этом

$$\widetilde{u} \doteq \widetilde{K}\widetilde{x} = KTT^{-1}x = Kx = u.$$

Таким образом, управление в LQR-задаче, предоставляемое теоремой 1, инвариантно относительно линейных преобразований фазовых координат.

Этим же свойством в силу (20) обладают и решения, получаемые в соответствии с теоремой 2 (обратим внимание, что второе LMI-ограничение в оптимизационной задаче из теоремы 2 для системы (1) выполняется при некотором P тогда и только тогда, когда оно выполняется для системы (18) при условии (20)).

Перейдем к робастной постановке задачи. При преобразовании (17) система (7) примет вид

$$\dot{\widetilde{x}} = (\widetilde{A} + \widetilde{F}\Delta\widetilde{H})\widetilde{x} + \widetilde{B}u, \qquad \widetilde{x}(0) = \widetilde{x}_0, \tag{21}$$

где матрицы $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ – те же, что и в неробастном случае, а

$$\widetilde{F} = T^{-1}F, \qquad \widetilde{H} = HT.$$

Нетрудно видеть, что и в этом случае, если P — решение линейного матричного неравенства (12) для исходной системы, то для преобразованной системы (21) ему будет удовлетворять матрица (20). Дословно повторяя приведенные выше рассуждения, убеждаемся в инвариантности управления, предоставляемого теоремой 4, относительно линейных преобразований фазовых координат.

Аналогичным образом легко показать инвариантность управления, даваемого теоремой 6.

Теперь рассмотрим формулировки теоремы 5 и ее "обновленной" версии — теоремы 7. Первая из них предполагает максимизацию шара, помещенного в эллипсоид с матрицей P. При переходе к новым координатам соответствующее условие $\widetilde{P} \succcurlyeq tI$ в исходных фазовых переменных будет иметь вид

$$P \succcurlyeq tTT^{\top}.$$

Геометрически это означает, что внутрь эллипсоида с матрицей P помещается уже не шар, а некий эллипсоид, зависящий от матрицы T линейного преобразования (и подлежащий максимизации). Таким образом, это условие не инвариантно относительно замены координат, и поэтому такой подход приводит к потере инвариантности оптимального управления.

Второй из предлагаемых подходов (теорема 7), в отличие от рассмотренного выше "сферического", свободен от этого недостатка. В самом деле, условие $P \succcurlyeq tP_{\mathrm{ric}}$ инвариантно относительно линейных преобразований координат, поскольку матрицы P и P_{ric} преобразуются "синхронно":

$$\widetilde{P} \succcurlyeq t\widetilde{P}_{\mathrm{ric}}$$

эквивалентно

$$T^{-1}PT^{\top-1} \succcurlyeq tT^{-1}P_{\mathrm{ric}}T^{\top-1},$$

т.е.

$$P \succcurlyeq tP_{\mathrm{ric}}.$$

Итак, лишь при подходах, предоставляемых теоремами 6 и 7, получаем управление: а) инвариантное относительное линейных преобразований фазовых координат, и б) не зависящее от начальной точки x_0.

6. Моделирование

Из изложенного следует, что из всех предложенных регуляторов, робастных к возмущениям в матрице системы, "перспективными" являются те, которые предоставляются теоремами 6 и 7. Формально такие регуляторы несравнимы, так как оптимизируют разные критерии; тем не менее, проведем численный эксперимент, основанный на "здравом смысле", а именно: для систем, замкнутых регуляторами K_{avr} и K_{inv}, будем случайно генерировать начальные условия и матричную неопределенность и сравнивать значение критерия (3) для каждой реализовавшейся системы без неопределенности.

В качестве численного примера рассмотрим уже изучавшуюся в первой части настоящей статьи (см. [5]) систему HE3 из библиотеки $COMPl_eib$ [21]. Она имеет физическое происхождение, описывая линеаризованную модель динамики вертолета Bell 201A-1 с восемью состояниями и четырьмя управлениями. В целях экономии места численные значения матриц не приводятся; они могут быть найдены в [21] или в [5].

Итак, имеем систему (7) с соответствующими матрицами из HE3 [21]. Для простоты положим матрицы F, H в описании неопределенности единичными, как и весовые матрицы R, S в функционале (3). Теорема 3 дает $\delta_{\max}^{\mathrm{st}} = 0{,}4293$ в качестве радиуса квадратичной стабилизируемости; зададим уровень неопределенности $\delta = 0{,}5\delta_{\max}^{\mathrm{st}}$ и отмасштабируем матрицу F, как описано в подразделе 3.2. Применяя теоремы 6 и 7 (во втором случае предварительно вычислив матрицу P_{ric} для номинальной системы), получаем регуляторы K_{avr} и K_{inv} и соответствующие устойчивые замкнутые системы вида $\dot{x} = Ax$

с матрицами $A_{\rm avr} = A + BK_{\rm avr}$ и $A_{\rm inv} = A + BK_{\rm inv}$. Отметим, что регуляторы значительно различаются:

$$K_{\rm avr} = \begin{pmatrix} -1{,}7480 & 12{,}2237 & 3{,}1609 & -0{,}1018 & -0{,}1010 & -0{,}8759 & 8{,}6800 & -1{,}0742 \\ -17{,}5487 & -1{,}5843 & 50{,}6250 & -2{,}1931 & 1{,}2001 & -0{,}4471 & 169{,}4253 & -15{,}9611 \\ 2{,}4958 & -0{,}3716 & -1{,}5772 & -11{,}3201 & -19{,}7139 & -7{,}4171 & -20{,}9467 & -77{,}7225 \\ -0{,}0849 & 0{,}9821 & 3{,}2791 & -7{,}2089 & -5{,}5924 & 8{,}9587 & 4{,}4428 & -29{,}6456 \end{pmatrix},$$

$$K_{\rm inv} = \begin{pmatrix} -1{,}7625 & 8{,}3937 & 5{,}2542 & -0{,}0626 & -0{,}0590 & -0{,}9951 & 14{,}7034 & -1{,}3580 \\ -31{,}8986 & -1{,}4810 & 124{,}4712 & -4{,}6138 & 5{,}7284 & 0{,}2433 & 406{,}2243 & -29{,}5940 \\ 4{,}5303 & -0{,}2872 & -9{,}8906 & -8{,}1329 & -19{,}1855 & -6{,}9424 & -51{,}7030 & -63{,}5409 \\ -0{,}4900 & 0{,}7269 & 6{,}4580 & -5{,}2043 & -4{,}3559 & 7{,}6171 & 12{,}2136 & -24{,}9439 \end{pmatrix}.$$

Далее, сгенерируем $M = 1000$ начальных условий $x_0^i \in \mathbb{R}^8$, равномерно распределенных на единичной сфере в евклидовой норме, и для каждого из них $N = 10000$ неопределенностей $\Delta^{ij} \in \mathbb{R}^{8\times 8}$, равномерно распределенных на единичной сфере во фробениусовой норме. Для каждой пары (x_0^i, Δ^{ij}) с помощью леммы Беллмана вычислим значение $J_{\rm avr}^{ij}$ функционала (3) для системы

$$\dot{x} = (A_{\rm avr} + \Delta^{ij})x, \quad x_0 = x_0^i,$$

и составим $(M \times N)$-матрицу $J_{\rm avr}$. Проделав то же самое для системы с матрицей $A_{\rm inv}$, получаем матрицу $J_{\rm inv}$. Сравним эти две матрицы по нескольким признакам.

Наихудшее значение критерия:

$$\max_{i,j} J_{\rm avr} = 2,6760 \cdot 10^3, \qquad \max_{i,j} J_{\rm inv} = 5{,}4840 \cdot 10^3.$$

Среднее значение критерия:

$$\frac{1}{MN}\sum_{i,j} J_{\rm avr}^{ij} = 0{,}6482 \cdot 10^3, \qquad \frac{1}{MN}\sum_{i,j} J_{\rm inv}^{ij} = 1{,}2459 \cdot 10^3.$$

Процент событий $\{J_{\rm avr}^{ij} < J_{\rm inv}^{ij}\}$: 88,04 %.

Процент событий $\{\max_i J_{\rm avr}^{ij} < \max_i J_{\rm inv}^{ij}\}$: 88 %.

Процент событий $\{\frac{1}{N}\sum_j J_{\rm avr}^{ij} < \frac{1}{N}\sum_j J_{\rm inv}^{ij}\}$: 88 %.

Проведенный эксперимент свидетельствует о значительном преимуществе регулятора $K_{\rm avr}$ *для данной системы* по всем показателям. Однако более подробный анализ матриц $J_{\rm avr}$ и $J_{\rm inv}$ показывает, что существуют начальные условия, для которых наблюдается обратный результат. Кроме того, размеры выборки (M, N) для задачи данной размерности невелики, чтобы считать полученные результаты достаточно весомыми. Наконец, аналогичные эксперименты для случайно сгенерированных маломерных пар (A, B) нередко демонстрировали преимущество регулятора $K_{\rm inv}$.

Отметим также, что в соответствии с теоретическими результатами с уменьшением уровня неопределенности Δ регуляторы $K_{\rm avr}$ и $K_{\rm inv}$ совпадают.

7. Заключение

В статье приведены робастные формулировки задачи о линейно-квадратичном регуляторе при наличии ограниченной по норме неопределенности в матрице системы и кратко обсуждены их достоинства и недостатки. Результаты немедленно обобщаются на случай дискретного времени и на наличие неопределенности в матрице B.

Дальнейшие исследования предполагают изучение возможностей иных регуляторов (например, динамических), а также проведение численных экспериментов, в которых, во-первых, явно демонстрируются эти недостатки, и, во-вторых, сравнивается качество регуляторов K_{avr} и K_{inv} (как между собой, так и с "дважды робастным" регулятором K_{rob}). В частности, интересно проанализировать взаимное расположение эллипсоидов $\mathcal{E}_{\mathrm{avr}} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x^\top P_{\mathrm{avr}}^{-1} x \leqslant 1\}$ и $\mathcal{E}_{\mathrm{inv}} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x^\top P_{\mathrm{inv}}^{-1} x \leqslant 1\}$ в духе публикации [22].

Наконец, возможно развитие подхода, при котором системные неопределенности предполагаются случайными (наравне с начальными условиями), и регулятор строится, исходя из минимизации среднего значения по совокупности системных неопределенностей и начальных условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Харитонов В.Л.* Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифф. уравнения. 1978. Т. 1. № 11. С. 2086–2088.

2. *Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т.* Частотные критерии робастной модальности линейных дискретных систем // Автоматика АН УССР. 1990. № 4. С. 3–9.

3. *Цыпкин Я.З.* Робастные адаптивные системы управления // ДАН СССР. 1990. Т. 315. № 6. С. 1314–1317.

4. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Частотные критериии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // АиТ. 1990. № 9. С. 45–54.

   Polyak B.T., Tsypkin Ya.Z. Frequency Domain Criteria for Robust Stability and Aperiodicity of Linear Systems // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 9. P. 1192–1201.

5. *Хлебников М.В., Щербаков П.С., Честнов В.Н.* Задача линейно–квадратичного управления. I. Новое решение // АиТ. 2015. № 12. С. 65–79.

   Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S., Chestnov V.N. Linear-Quadratic Regulator. I. A New Solution // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 12. P. 2143–2155.

6. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

7. *Willems J.S.* Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation // IEEE TAC. 1971. V. 16. No. 6. P. 621–634.

8. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез оптимальных линейно-квадратичных законов управления на основе линейных матричных неравенств // АиТ. 2007. № 3. С. 3–18.

   Balandin D.V., Kogan M.M. Synthesis of Linear Quadratic Control Laws on Basis of Linear Matrix Inequalities // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 371–385.

9. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
10. *Petersen I.R., McFarlane D.C.* Optimal Guaranteed Cost Control and Filtering for Uncertain Linear Systems // IEEE TAC. 1994. V. 39. No. 9. P. 1971–1977.
11. *Douglas J., Athans M.* Robust Linear Quadratic Designs with Real Parameter Uncertainty // IEEE TAC. 1994. V. 39. No. 1. P. 107–111.
12. *Bernhard P.* Survey of Linear Quadratic Robust Control // Macroeconomic Dynamics. 2002. No. 6. P. 19–39.
13. *Yu L., Han Q.-L., Sun M.-X.* Optimal Guaranteed Cost Control of Linear Uncertain Systems with Input Constraints // Int. J. Contr. Autom. Syst. 2005. V. 3. No. 3. P. 397–402.
14. *Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Синтез оптимальной обратной связи при ограниченном управлении // АиТ. 2014. № 2. С. 177–192.

    Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Optimal Feedback Design under Bounded Control // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 2. P. 320–332.
15. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
16. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Linear Optimal Control. N.Y.: Prentice-Hall, 1971.
17. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming (web page and software), URL `http://stanford.edu/~boyd/cvx`
18. *Petersen I.R.* A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems // Syst. Control Lett. 1987. V. 8. P. 351–357.
19. *Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Лемма Питерсена о матричной неопределенности и ее обобщения // АиТ. 2008. № 11. С. 125–139.

    Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Petersen's Lemma on Matrix Uncertainty and Its Generalization // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 11. P. 1932–1945.
20. *Levine W.S., Athans M.* On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems // IEEE TAC. 1970. V. 46. No. 9. P. 1420–1426.
21. *Leibfritz F., Lipinski W.* Description of the Benchmark Examples in COMPleib 1.0. Technical report. University of Trier, 2003. URL `http://www.complib.de`
22. *Хлебников М.В.* Сравнение квадратичных критериев качества: эллипсоидальный подход // Стохастическая оптимизация в информатике. 2014. Т. 10. № 1. С. 145–156.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 19.07.2018

После доработки 14.09.2018

Принята к публикации 08.11.2018