

© 2019 г. В.Н. ЧЕСТНОВ, д-р техн. наук (vnchest@rambler.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СИНТЕЗ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ ПО ИНЖЕНЕРНЫМ КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА НА ОСНОВЕ $H_\infty$ -ОПТИМИЗАЦИИ<sup>1</sup>

Решается задача синтеза регуляторов по выходу многомерных систем, гарантирующих заданные либо достижимые: ошибки регулирования, радиус запасов устойчивости и время регулирования при действии полигармонических внешних возмущений с неизвестными амплитудами (с ограничением их суммы), частотами и неограниченным числом гармоник. Подход к решению опирается на специальным образом сконструированную стандартную задачу  $H_\infty$ -оптимизации и новое правило выбора весовой матрицы по заданной точности. Впервые дана физическая интерпретация радиуса запасов устойчивости многомерных систем на языке годографов Найквиста отдельных контуров, разомкнутых на выходе объекта. Доказана связь свойства абсолютной устойчивости замкнутой системы и радиуса запасов устойчивости. Рассмотрен пример синтеза для взаимосвязанного электропривода.

*Ключевые слова:* ограниченные внешние возмущения, ошибки регулирования, время регулирования, радиус запасов устойчивости, абсолютная устойчивость.

DOI: 10.1134/S0005231019100076

### 1. Введение

В реальных условиях работы автоматических систем всегда присутствуют нелинейности, неизбежны отклонения параметров объекта от расчетных, имеется немоделируемая динамика и действуют ограниченные внешние возмущения. Классическая теория управления одномерными (SISO) объектами [1], в основу которой положены инженерные требования к точности, запасам устойчивости (по модулю и фазе) и времени регулирования, на физически ясном языке частотных характеристик разомкнутой системы (знаменитый метод ЛАЧХ) показала свою удивительную практическую эффективность на протяжении последних 70 лет. В многомерном (MIMO) случае подобный подход к синтезу регуляторов еще находится в стадии формирования, хотя его начало пришлось на ранние 60-е гг. 20-го в., сразу после создания теории  $LQ$ -оптимизации, которая гарантированно обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой многомерной системы.

Для MIMO систем известен общий подход к анализу на основе сингулярных значений частотных передаточных матриц [2] (см. также [3–6]), который

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-01067). Посвящается памяти безвременно ушедшего друга Ю.В. Садомцева.

в рамках рассматриваемой в статье задачи имеет чисто качественный характер. В настоящее время в теории управления прочное место заняли такие техники, как  $H_2$ ,  $H_\infty$ ,  $l_1$  и  $\mu$ -синтез [3–7]. Эти подходы весьма косвенно учитывают инженерные требования, напрямую преобладавшие в классической теории автоматического управления [1]. Помимо этого, в [8] на SISO примерах продемонстрировано, что регуляторы по выходу, построенные на основе этих современных техник, могут привести к системам с малыми запасами устойчивости по фазе и модулю, что недопустимо на практике. В настоящей статье для определения близости замкнутой системы к неустойчивости используется понятие радиуса запасов устойчивости [9], которое прямо указывает на близость годографа Найквиста к критической точке  $(-1, j0)$ , нежели запасы по фазе и модулю, а именно: система имеет радиус запасов устойчивости  $r$ , если годограф Найквиста разомкнутой системы не пересекает круга максимального радиуса  $r$  с центром в критической точке  $(-1, j0)$ . Чем меньше  $r$ , тем ближе замкнутая система к неустойчивости. Более подробно это понятие обсуждалось в SISO и MIMO случаях в [10–12] (см. также раздел 4 настоящей статьи). Надо сказать, что радиус запасов устойчивости — более адекватная характеристика близости системы к неустойчивости, нежели запасы устойчивости по фазе и модулю. Действительно, умозрительно можно изобразить множество годографов Найквиста, обладающих превосходными запасами устойчивости по фазе и модулю, однако сколь угодно близко подходящих к критической точке  $(-1, j0)$ , т.е. имеющих сколь угодно малый радиус запасов устойчивости. Реальный пример такой ситуации в системе с наблюдателем состояния приведен в [13]. Необходимо отметить, что в методе ЛАЧХ, упоминавшимся ранее как эталон классического метода синтеза, такая ситуация просто невозможна по внутренней сути метода (в окрестности критической точки  $(-1, j0)$  всегда есть конечная область в виде криволинейной трапеции, определяемая запасами по фазе и модулю, которую годограф Найквиста не пересекает [1]). Практика автоматического управления на протяжении более семи десятилетий показала эффективность такой оценки робастности замкнутой системы по отношению к конечным отклонениям коэффициентов передаточной функции разомкнутой системы от номинальных.

В мировых научных публикациях, насколько известно автору, приоритет в постановке (в рамках теории  $LQ$ - и  $H_\infty$ -оптимизации) и решении отдельных задач этой весьма непростой проблемы принадлежит А.Г. Александрову [14] и его ученикам. В частности, Ю.В. Садомцев в [15] впервые в мире рассмотрел фундаментальный вопрос теории управления о принципиальной регулируемости заданного выхода системы при подавлении ступенчатых и стохастических внешних возмущений, а также задачу обеспечения радиуса запасов устойчивости регулятором пониженного порядка на основе  $LQG$ -оптимизации в непрерывном и дискретном случаях. Отметим также публикации [13–17] в качестве сильно мотивирующих на исследования подобного рода.

Первой публикацией в рамках  $H_\infty$ -теории, посвященной задаче обеспечения заданной точности при полигармонических внешних возмущениях с конечным и известным числом гармоник, была совместная статья автора, с, увы, ушедшим учителем А.Г. Александровым [18]. В публикациях автора

[11, 12] строились  $H_\infty$ -регуляторы, где требования к радиусу запасов устойчивости выражались обеспечением необходимой  $H_\infty$ -нормы матрицы чувствительности по физическому выходу/входу объекта.  $H_\infty$ -регуляторы, построенные исходя из требований к точности и радиусу запасов устойчивости, получены в [19], а того же типа, но обеспечивающие радиус запасов устойчивости и заданную степень устойчивости предложены в [20]. Публикация автора [21] посвящена построению  $H_\infty$ -регуляторов по заданной точности и степени устойчивости. Таким образом, разработана теория синтеза  $H_\infty$ -регуляторов одновременно только по двум из трех инженерных требований к качеству — при полигармонических внешних возмущениях с конечным и известным числом гармоник. Поэтому цель настоящей статьи — объединить эти инженерные показатели (ошибки регулирования, время регулирования и радиус запасов устойчивости) в едином методе синтеза (при действии полигармонических внешних возмущений с неизвестными амплитудами (с ограничением их суммы), частотами и уже неограниченным числом гармоник), что частично и определяет научную новизну статьи. Надо сказать, что техника  $H_\infty$ -теории оказалась очень естественным и удобным инструментом при решении таких задач: а именно регуляторы, построенные в [11, 12, 21] без учета требований к времени регулирования (степени устойчивости), имеют необходимый и достаточный характер при обеспечении соответственно радиуса запасов устойчивости и требуемой точности. Причем требования к точности выражены *аналитическими соотношениями для выбора весовых коэффициентов критерия оптимизации*.

Поскольку сам факт возможной реализации регулятора на практике во многом определяется значением радиуса запасов устойчивости, который он гарантирует, требования к радиусу обязательно должны включаться в перечень показателей качества замкнутой системы. Отсутствие такого требования в показателях качества зачастую ведет к практической неработоспособности регуляторов, построенных на основе современных техник, что ярко продемонстрировала публикация [8]. В этой связи чрезвычайно поучителен пример синтеза из [21], где регулятор строился только на основе требований к точности. Непосредственная проверка показывает, что радиус запасов устойчивости при размыкании замкнутой системы по входам и выходам объекта весьма мал ( $r \approx 0,016$ ), за исключением главной регулируемой переменной (где  $r \approx 0,818$ ), по которой (по остальным аналогично) и получился эталонный монотонный переходный процесс при ступенчатом изменении внешнего возмущения (нагрузки), хотя найденный регулятор непригоден к практической реализации. Таким образом, по переходным процессам, вообще говоря, нельзя судить о степени робастности замкнутой МИМО системы.

Это делает весьма актуальным в научном и практическом смыслах разработку процедур синтеза регуляторов (при ограниченных внешних возмущениях), в которых бы обеспечивались заданные либо достижимые: ошибки регулирования, время регулирования и радиус запасов устойчивости. Необходимо отметить противоречивость этих требований [19–29], известную еще в классической теории и практике управления SISO объектами, а также потенциальную неединственность регулятора. Например, в SISO случае в [26, 27] для этой цели используется модальное управление, а в [18–23] в МИМО слу-

чае применяется  $H_\infty$ -подход. Некоторые результаты представленной работы анонсировались ранее в публикациях [22–24], где, однако, не было соответствующих доказательств.

В отличие от публикаций [18, 19, 21–23], где рассматриваются внешние возмущения, ограниченные по мощности, с известным числом гармоник, в представленной статье исследуется случай векторного внешнего возмущения (в отличие от [25–27], где возмущение — скаляр) с бесконечным числом гармоник, каждая компонента которого — абсолютно сходящийся ряд. Последнее позволило получить результаты по гарантированной точности, не зависящие от числа гармоник ограниченного полигармонического внешнего возмущения. Главное отличие (при изменении характера ограниченности внешнего возмущения при решении проблемы точности) настоящей статьи от упомянутых публикаций состоит в новом математически строгом правиле выбора весовых коэффициентов диагональной матрицы, взвешивающей компоненты вектора физически регулируемых переменных объекта в задаче  $H_\infty$ -оптимизации, к которой и сводится синтез регулятора по измеряемому выходу. Нельзя не отметить, что метод инвариантных эллипсоидов [17], снявший серьезнейшую проблему реализуемости и высокого порядка  $L_1$  ( $l_1$ )-регуляторов, обеспечивающих наименьшие ошибки регулирования, не гарантирует, вообще говоря, наличия у системы приемлемого в практических приложениях радиуса запасов устойчивости как, впрочем, и  $L_1$  ( $l_1$ )-подход. В настоящей статье обеспечивается только заданная точность (а не максимально возможная), что не приводит к неоправданному росту коэффициентов регулятора (что часто и ведет к весьма малому радиусу запасов устойчивости).

Помимо этого, новизна статьи состоит в том, что впервые дана физическая интерпретация радиуса запасов устойчивости ММО систем на языке годографов Найквиста отдельных контуров, разомкнутых на выходе объекта, и установлено свойство абсолютной устойчивости замкнутых систем с нестационарными секторными нелинейностями на выходе объекта, границы сектора которых определяются полученным при синтезе радиусом запасов устойчивости. Последнее крайне важно для любого метода синтеза регуляторов, претендующего на практическое применение [13–17, 25–29].

Показано, что поставленная задача сводится к специальным образом сконструированной проблеме  $H_\infty$ -оптимизации [3–7]. Численно такую задачу удобно решать на основе метода линейных матричных неравенств (LMI) [30, 31], например, в MATLAB-пакете Robust Control Toolbox [32]. Рассмотрен пример синтеза при управлении взаимосвязанным электроприводом [19, 21].

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим полностью управляемый и наблюдаемый объект управления:

$$(2.1) \quad \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad y = Cx,$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния объекта;  $u \in \mathbb{R}^m$  — вектор управляющих воздействий;  $y \in \mathbb{R}^{m_2}$  — вектор измеряемых и одновременно регулируемых переменных объекта (вход регулятора);  $w \in \mathbb{R}^{m_3}$  — вектор неизменяемых внешних возмущений. Матрицы объекта  $A, B_1, B_2, C$  заданы.

Пусть объект (2.1) замкнут стабилизирующим динамическим регулятором по выходу:

$$(2.2) \quad \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y, \quad u = C_c x_c + D_c y,$$

где  $x_c \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния регулятора размерности  $n$ ;  $A_c, B_c, C_c, D_c$  – матрицы чисел.

Компоненты вектора внешних возмущений – полигармонические функции:

$$(2.3) \quad w_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_{ik}), \quad i = \overline{1, m_3}.$$

Причем амплитуды  $w_{ik} \geq 0$ , начальные фазы  $\psi_{ik}$  ( $i = \overline{1, m_3}, k = \overline{1, \infty}$ ), а также частоты  $\omega_k$  ( $k = \overline{1, \infty}$ ) сигналов неизвестны. Число гармоник не ограничено.

Предполагается, что внешнее возмущение ограничено в следующем смысле:

$$(2.4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} w_{ik} \leq w_i^*, \quad i = \overline{1, m_3},$$

где  $w_i^* > 0$  ( $i = \overline{1, m_3}$ ) – заданные числа.

Ошибки по регулируемым переменным определим соотношениями [26]:

$$(2.5) \quad y_{i,st} = \sup_{t \geq t_p} |y_i(t)|, \quad i = \overline{1, m_2},$$

где  $t_p$  – время регулирования.

Обычно на практике требуют, чтобы выполнялись неравенства

$$(2.6) \quad y_{i,st} \leq y_i^*, \quad i = \overline{1, m_2},$$

где  $y_i^*$  ( $i = \overline{1, m_2}$ ) – заданные положительные числа (желаемые ошибки регулирования).

Время регулирования в замкнутой системе (2.1), (2.2) можно оценить как [1, 33, 34]

$$(2.7) \quad t_p \approx 3/\beta,$$

где  $\beta$  – степень устойчивости замкнутой системы – минимальное расстояние от мнимой оси до ближайшего собственного значения матрицы замкнутой системы (2.1), (2.2)  $A_{cl}$ :

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C & B_2 C_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}.$$

Известно, что такой подход к оценке времени регулирования справедлив, если среди собственных значений матрицы  $A_{cl}$  нет кратных, ближайших к мнимой оси. Несмотря на весьма приближенный характер формулы (2.7), она хорошо себя зарекомендовала в инженерной практике для начальной оценки времени регулирования.

Наличие радиуса  $r$  запасов устойчивости на физическом выходе объекта гарантирует выполнение кругового частотного неравенства [11, 19, 20]

$$(2.8) \quad [I + W^y(-j\omega)]^T [I + W^y(j\omega)] \geq r^2 I, \quad \omega \in [0, \infty),$$

где  $0 < r \leq 1$ ,  $W^y(s) = -W(s) \cdot K(s)$  — передаточная матрица системы (2.1), (2.2), разомкнутой по физическому выходу объекта. Здесь  $W(s) = C(sI - A)^{-1}B_2$  — передаточная матрица объекта по управлению;  $K(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c$  — передаточная матрица регулятора.

Отметим, что требования к точности (2.6) не всегда могут быть выполнены, что в равной степени относится и к условиям (2.7), (2.8). Если объект (2.1) неминимально-фазовый, то для чисел в левой части соотношений (2.6), (2.7) существуют нижние, а для чисел правой части соотношения (2.8) (если объект дополнительно неустойчив) верхние предельные значения, которые только и могут быть достижимы линейным регулятором (2.2).

*Задача. Найти стабилизирующий регулятор (2.2) такой, чтобы:*

1) выполнялись требования к точности

$$(2.9) \quad y_{i,st} \leq \gamma y_i^*, \quad i = \overline{1, m_2},$$

где  $\gamma > 0$  — заданное или достижимое число;

2) выполнялось неравенство (2.8), где  $r$  — заданное или достижимое число;

3) собственные значения матрицы  $A_{cl}$  замкнутой системы удовлетворяли условию

$$(2.10) \quad \operatorname{Re} \lambda_i(A_{cl}) \leq -\beta, \quad i = \overline{1, 2n},$$

где  $\beta \geq 0$  — заданное или достижимое число.

*Замечание 1.* Модель внешнего возмущения (2.3), (2.4) описывает значительную часть встречающихся на практике сигналов, которые являются непрерывными кусочно-дифференцируемыми функциями времени и, следовательно, разложимыми в абсолютно сходящийся ряд Фурье [35, 36] (частный случай (2.3) с кратными частотами).

### 3. Решение задачи на основе процедуры $H_\infty$ -оптимизации

Переходя к преобразованию Лапласа при нулевых начальных условиях и исключая векторы состояния объекта и регулятора, представим уравнения (2.1), (2.2) как

$$y = W(s)u + W_1(s)w, \quad u = K(s)(y + w_1) = K(s)z_1, \quad z_2 = Q^{1/2}y,$$

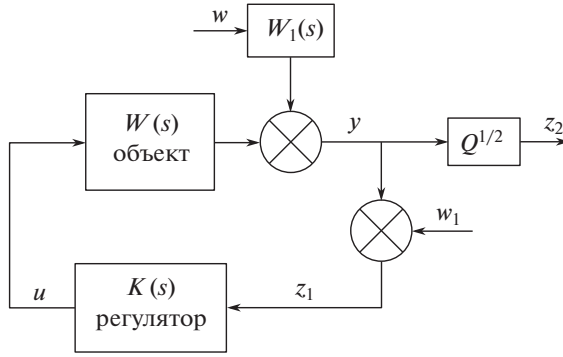


Рис. 1. Структурная схема замкнутой системы.

где  $W_1(s) = C(sI - A)^{-1}B_1$  — передаточная матрица объекта (2.1) по возмущению;  $w_1 \in \mathbb{R}^{m_2}$  — помеха измерения (фиктивный вход) на входе регулятора (2.2),  $z_1 \in \mathbb{R}^{m_2}$  — вектор фиктивных регулируемых переменных ( $w_1$  и  $z_1$  связаны между собой матрицей чувствительности по выходу объекта  $T_{z_1 w_1}(s) = (I + W^y(s))^{-1}$ , которая необходима для обеспечения требования (2.8)). Новый вектор регулируемых переменных  $z_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$  — вектор  $y$ , взвешенный с помощью диагональной матрицы  $Q = \text{diag}[q_1, q_2, \dots, q_{m_2}]$  с положительными элементами  $q_i > 0$  ( $i = \overline{1, m_2}$ ), которые выбираются далее для обеспечения заданной точности по физически регулируемым переменным (2.9). Этим последним уравнениям соответствует структурная схема на рис. 1 (см. подробнее [11, 19, 21]).

Введем расширенный вектор внешних возмущений  $\bar{w}^T = [w_1^T \quad w^T]$  и расширенный вектор регулируемых переменных  $z^T = [z_1^T \quad z_2^T]$  и обозначим через  $T_{z\bar{w}}(s)$  передаточную матрицу замкнутой системы, которая связывает эти векторы. Она будет иметь следующую структуру:

$$(3.1) \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T_{z\bar{w}} \cdot \bar{w} = \begin{bmatrix} T_{z_1 w_1} & T_{z_1 w} \\ Q^{1/2} T_{y w_1} & Q^{1/2} T_{y w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w \end{bmatrix},$$

где  $T_{z_1 w_1}, T_{z_1 w}, T_{y w_1}, T_{y w}$  — передаточные матрицы замкнутой системы от  $w_1$  к  $z_1$ , от  $w$  к  $z_1$ , от  $w_1$  к  $y$  и от  $w$  к  $y$  соответственно.

Переходя к доказательству главного результата этого раздела статьи, сначала учтем желаемое время регулирования. Собственные значения матрицы  $A_{cl}$  замкнутой системы (2.1), (2.2) должны удовлетворять неравенству (2.10).

Заменив матрицу  $A$  объекта на смещенную  $\tilde{A} = A + \beta I$ , найдем смещенный регулятор, обеспечивающий устойчивость смещенной замкнутой системы [20, 21]:

$$(3.2) \quad \text{Re} \lambda_i(\tilde{A}_{cl}) = \text{Re} \lambda_i \begin{bmatrix} \tilde{A} + B_2 D_c C & B_2 C_c \\ B_c C & \tilde{A}_c \end{bmatrix} < 0, \quad i = \overline{1, 2n},$$

где  $\tilde{A}_c, B_c, C_c, D_c$  — матрицы смещенного регулятора.

Искомый же регулятор имеет матрицы [20, 21]:

$$(3.3) \quad A_c = \tilde{A}_c - \beta I, B_c, C_c, D_c.$$

Действительно, собственные значения матрицы  $A_{cl}$  и  $\tilde{A}_{cl}$  с таким регулятором связаны очевидным соотношением  $\operatorname{Re} \lambda_i(\tilde{A}_{cl}) = \operatorname{Re} \lambda_i(A_{cl}) + \beta < 0$ , откуда следует (2.10).

Пусть регулятор с матрицами  $\tilde{A}_c, B_c, C_c, D_c$  разрешает задачу минимизации  $H_\infty$ -нормы смещенной передаточной матрицы замкнутой системы (где  $A$  заменена на  $\tilde{A} = A + \beta I$ ):

$$(3.4) \quad \|T_{z\bar{w}}(-\beta + j\omega)\|_\infty \leq \gamma,$$

где  $\gamma$  — заданное или минимизируемое число.

Тогда [5] каждый блок этой матрицы удовлетворяет аналогичному (3.4) условию, в частности:

$$(3.5) \quad \|T_{z_1 w_1}(-\beta + j\omega)\|_\infty \leq \gamma, \quad \left\| Q^{1/2} T_{yw}(-\beta + j\omega) \right\|_\infty \leq \gamma.$$

*Замечание 2.* Если решена смещенная проблема (3.4), то регулятор (2.2), (3.3) будет обеспечивать выполнение соответствующих частотных неравенств и для несмещенных передаточных матриц разомкнутой и замкнутой системы [20, 21].

Таким образом, разрешая смещенную задачу (3.4), имеем:

$$(3.6) \quad \|T_{z\bar{w}}(j\omega)\|_\infty \leq \gamma,$$

$$(3.7) \quad \|T_{z_1 w_1}(j\omega)\|_\infty \leq \gamma, \quad \left\| Q^{1/2} T_{yw}(j\omega) \right\|_\infty \leq \gamma.$$

Первое из неравенств (3.7) может быть представлено в эквивалентном виде [11, 19, 20]:

$$(3.8) \quad [I + W^y(-j\omega)]^T [I + W^y(j\omega)] \geq \gamma^{-2} I, \quad \omega \in [0, \infty).$$

А это — целевое неравенство (2.8), в котором  $r = \gamma^{-1}$ . Второе неравенство (3.7) имеет следующую эквивалентную частотную форму [21]:

$$(3.9) \quad T_{yw}^T(-j\omega) Q T_{yw}(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty).$$

Имеет место утверждение, впервые сформулированное в [24] и доказанное в Приложении.

*Лемма (о рабочем процессе).* Пусть выполнено частотное неравенство (3.9). Тогда ошибки по регулируемым переменным устойчивой системы (2.1), (2.2) при действии входного сигнала из класса (2.3), (2.4) удовлетворяют неравенствам

$$(3.10) \quad q_i y_{i,st}^2 \leq \gamma^2 \left( \sum_{j=1}^{m_3} w_j^* \right)^2, \quad i = \overline{1, m_2},$$



где  $w_j^*$  – границы компонент внешних возмущений из правых частей неравенств (2.4).

Если элементы диагональной весовой матрицы  $Q$  выбирать из равенств

$$(3.11) \quad q_i = \frac{\left(\sum_{j=1}^{m_3} w_j^*\right)^2}{(y_i^*)^2}, \quad i = \overline{1, m_2},$$

то из соотношения (3.10) придем к целевому неравенству (2.9) поставленной задачи.

Суммируя изложенное, придем к следующему утверждению.

*Теорема 1. Регулятор (2.2), (3.3) разрешает задачу, если весовые коэффициенты матрицы  $Q$  в смещенной  $H_\infty$ -проблеме (3.4) выбраны из равенств (3.11). При этом радиус запасов устойчивости  $r = 1/\gamma$ , где  $\gamma$  – реализовавшееся значение при решении задачи (3.4).*

Заметим, что переход от неравенства (3.4) к (3.5), а затем к (3.6), (3.7) придает достаточный характер представленному результату.

#### 4. Физическая интерпретация радиуса запасов устойчивости

Прежде всего покажем, что матричное частотное неравенство (2.8) имеет важное следствие, если размыкание осуществлять не по всем выходам, а по любому  $i$ -му. Это соответствует инженерной практике, поскольку допускает экспериментальную проверку на основе реального физического эксперимента [1, 26]. Обозначим такую передаточную функцию разомкнутой системы как  $w_i(s)$ , а передаточную функцию, связывающую  $i$ -ю компоненту вектора  $w_1$  с  $i$ -й компонентой вектора  $z_1$  (когда все остальные входы на структурной схеме рис. 1 нулевые) как  $t_i(s)$ . Этому соответствует структурная схема левой части рис. 2, где  $\tilde{w}(s)$  представляет передаточную функцию, полученную путем замыкания всех обратных связей на рис. 1, кроме  $i$ -й. Правая часть рис. 2 представлена в эквивалентном виде, где очевидно, что  $w_i(s) = -\tilde{w}(s)$ . Таким образом, передаточные функции  $t_i(s)$  и  $w_i(s)$  связаны известным соотношением

$$(4.1) \quad t_i(s) = 1/(1 + w_i(s)),$$

которое является аналогом классической передаточной функции замкнутой системы по ошибке [1]. С другой стороны, функция (4.1) является  $i$ -м диаго-

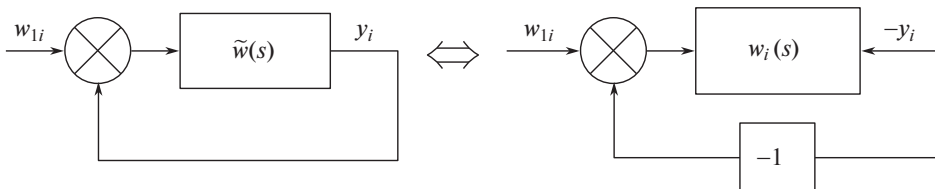


Рис. 2. Замкнутая система с  $i$ -й обратной связью.

нальным элементом передаточной матрицы  $T_{z_1 w_1}$ . Матрица  $T_{z_1 w_1}$  удовлетворяет первому неравенству (3.7), откуда для ее  $i$ -го диагонального элемента [5] можно записать, что  $|t_i(j\omega)| \leq \gamma$  или  $t_i(-j\omega)t_i(j\omega) \leq \gamma^2$ , что при обозначении  $r = 1/\gamma$  и с учетом равенства (4.1) окончательно приводит к скалярному аналогу (2.8):

$$(4.2) \quad [1 + w_i(-j\omega)][1 + w_i(j\omega)] \geq r^2, \quad \omega \in [0, \infty).$$

Геометрическая интерпретация этого условия [9–11, 28] приводит к следующему утверждению.

*Теорема 2.* Пусть выполнено матричное частотное неравенство (2.8), тогда годограф Найквиста системы (2.1), (2.2), разомкнутой по  $i$ -му выходу объекта, не пересекает круга радиуса  $r$  с центром в критической точке  $(-1, j0)$ .

Таким образом, теорема 2 гарантирует, что устойчивость контура не нарушается, если передаточная функция  $w_i(s)$  рис. 2 возмущается устойчивой аддитивной добавкой  $\Delta(s)$ , удовлетворяющей неравенству  $\|\Delta\|_\infty < r$  [7]. В [10] установлено важнейшее свойство: если  $w_i(s)$  заменить на  $w_i(s) \cdot k e^{j\psi}$ , то устойчивость контура рис. 2 не нарушится для любой пары  $(k, \psi)$ , одновременно удовлетворяющей неравенствам:

$$\frac{1}{1+r} < k < \frac{1}{1-r};$$

$$|\psi| < \arccos\left(1 - \frac{r^2}{2}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{r}{2}\right).$$

Эти соотношения, в частности, выражают связь радиуса  $r$  и гарантируемых запасов устойчивости по коэффициенту усиления и фазе соответственно, если пара  $(k, \psi)$  изменяется не одновременно, а именно как  $(k, 0)$  или  $(1, \psi)$  в указанных выше пределах.

Подчеркнем, что радиус запасов устойчивости всегда допускает экспериментальное определение на основе реального физического эксперимента. Это крайне важно для практических приложений. Если разомкнутая система на рис. 2 устойчива, то можно непосредственно строить годограф Найквиста  $w_i(j\omega)$ . В противном случае снимаются частотные характеристики системы рис. 2 в замкнутом состоянии, а именно  $t_i(j\omega)$ . В этом случае радиус запасов устойчивости  $r = 1/\|t_i\|_\infty$ , т.е. равен величине, обратной максимуму модуля функции чувствительности  $t_i(j\omega)$  контура рис. 2 [6, 29].

Из теоремы 2 ясно, что годограф  $w_i(j\omega)$  не пересекает и отрезка вещественной оси с граничными точками  $(-(1+r), j0)$  и  $(-(1-r), j0)$ , а это в силу кругового критерия абсолютной устойчивости [37] значит, что система (2.1), (2.2) не потеряет устойчивости, если по  $i$ -му выходу объекта ввести нестационарную нелинейность, принадлежащую гурвицевому углу (сектору)  $(1/(1+r), 1/(1-r))$ . В частности, это может быть нестационарный коэффициент усиления  $l_i(t)$ , изменяющийся в интервале  $(1/(1+r), 1/(1-r))$ . Многомерный круговой критерий позволяет усилить этот результат, когда нелинейности вводятся по каждому физическому выходу объекта. С этой целью

запишем уравнения замкнутого контура в виде

$$(4.3) \quad y = -W^y(s)\xi, \quad \xi = y.$$

Эта система асимптотически устойчива по построению регулятора (2.2), (3.3), следовательно, требование минимальной устойчивости кругового критерия выполнено. Кроме того, предположим, что ни объект, ни регулятор не имеют чисто мнимых полюсов (это требование можно ослабить). Заменяем второе линейное уравнение (4.3) на векторную нелинейность

$$(4.4) \quad \xi = \phi(t, y),$$

где каждая компонента нестационарной вектор-функции  $\xi \in \mathbb{R}^{m_2}$  принадлежит сектору

$$(4.5) \quad \alpha \leq \phi_i(t, y_i)/y_i \leq \beta, \quad \phi_i(t, 0) = 0, \quad i = \overline{1, m_2},$$

где  $\alpha < 1$  и  $\beta > 1$  — соответственно нижняя и верхняя границы секторной нелинейности. В соответствии с круговым критерием для абсолютной устойчивости системы (4.3)–(4.5) должно выполняться частотное неравенство [37]

$$\operatorname{Re} \{ [I + \alpha W^y(-j\omega)]^T \tau [I + \beta W^y(j\omega)] \} > 0, \quad \omega \in (-\infty, \infty),$$

где  $\operatorname{Re} Y = [Y^T(-j\omega) + Y(j\omega)]/2$  — эрмитова часть комплексной матрицы  $Y$ . Здесь  $\tau$  — диагональная положительно определенная матрица. Рассмотрим это неравенство при  $\alpha = 1/(1+r)$ ,  $\beta = 1/(1-r)$  и  $\tau = (1+r)(1-r)I$ , что дает выражение

$$\operatorname{Re} \{ [I + rI + W^y(-j\omega)]^T [I - rI + W^y(j\omega)] \} > 0, \quad \omega \in (-\infty, \infty).$$

Последнее условие ведет к неравенству

$$\operatorname{Re} \left\{ [I + W^y(-j\omega)]^T [I + W^y(j\omega)] - r^2 I + V(j\omega) \right\} > 0, \quad \omega \in (-\infty, \infty),$$

где косоэрмитова матрица  $V(j\omega) = r [W^y(j\omega) - W^{yT}(-j\omega)]$  удовлетворяет условию  $\operatorname{Re} V(j\omega) = 0$ . Таким образом, последнее неравенство сводится к неравенству (2.8), которое должно быть строгим ( $>$ ). Следовательно, имеет место теорема 3.

*Теорема 3. Пусть выполнено строгое матричное частотное неравенство (2.8). Тогда система (2.1), (2.2), (3.3) с нелинейностями из класса (4.4), (4.5) (где  $\alpha = 1/(1+r)$ ,  $\beta = 1/(1-r)$ ), вводимыми по каждому физическому выходу объекта (2.1) (при  $w = 0$ ), будет абсолютно устойчива.*

В частном случае нелинейности (4.4) могут быть нестационарными коэффициентами усиления  $l_i(t)$ :  $\xi_i = l_i(t)y_i$ ,  $i = \overline{1, m_2}$  с границами (4.5), где  $\alpha = 1/(1+r)$  и  $\beta = 1/(1-r)$ . При этом они могут меняться независимо друг от друга с произвольной скоростью. Если эти коэффициенты стационарны, то границы (4.5) совпадают с полученными в [38], где неравенства для коэффициентов строгие. Подчеркнем, что даже строгие границы (4.5) для нестационарных  $l_i(t)$  принципиально не могут быть получены подходом из [38].

## 5. Процедура синтеза

Поскольку вектор регулируемых переменных в системе (3.1) не содержит управлений, то задача (3.4) вырождена и численно может быть решена (см. [11, 21]) LMI-техникой MATLAB-пакета [32], как представлено далее. Заметим, что чрезмерное увеличение степени устойчивости  $\beta$  ведет к резкому падению радиуса запасов устойчивости и, как следствие, большим выбросам в переходной функции замкнутой системы [13, 20, 39]. Это аналог эффекта всплеска из [17] с регулятором по выходу. Поэтому в алгоритме синтеза используется принцип постепенного увеличения быстродействия или  $\beta$ .

1. Заменяем матрицу  $A$  объекта на  $\tilde{A} = A + \beta I$ , полагая сначала  $\beta = 0$ .

2. Выбираем весовую матрицу  $Q$  из равенств (3.11) и строим матрицы уравнений состояния  $A_{об}$ ,  $B_{об}$ ,  $C_{об}$ ,  $D_{об}$  обобщенного объекта  $A_{об} = \tilde{A}$ ,  $B_{об} = [0 \ B_1 \ B_2]$ ,

$$C_{об} = \begin{bmatrix} C_2 \\ Q^{1/2}C_2 \\ C_2 \end{bmatrix}, \quad D_{об} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = 0, \quad D_{21} = [I \ 0], \quad D_{22} = 0,$$

где размеры матриц должны быть согласованы. Следует отметить, что в [19], матрица  $D_{11}$  ошибочно приведена без второй блочной строки.

3. Формируем системную матрицу обобщенного объекта с помощью команды

$$P = \text{ltisys}(A_{об}, B_{об}, C_{об}, D_{об}).$$

4. Находим оптимальное  $\gamma_0 = \text{hinflmi}(P, [m_2, m])$  в задаче (3.4), где  $m_2$  и  $m$  – число входов и выходов регулятора соответственно.

5. Выбираем  $\gamma > \gamma_0$  и строим системную матрицу регулятора  $K$ , разрешающего задачу (3.4), с помощью процедуры  $[\gamma, K] = \text{hinflmi}(P, [m_2, m], \gamma, \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  – точность вычисления  $\gamma$ .

6. Из системной матрицы  $K$  извлекаем матрицы уравнений состояния смещенного регулятора процедурой  $[\tilde{A}_c, B_c, C_c, D_c] = \text{ltiss}(K)$ .

7. Находим матрицы  $A_c = \tilde{A}_c - \beta I$ ,  $B_c$ ,  $C_c$ ,  $D_c$  искомого регулятора (2.2).

8. Строим переходный процесс в замкнутой системе при действии внешних возмущений из класса (2.3), (2.4), находим ошибки и время регулирования, а также радиус запасов устойчивости. Если требования к точности (2.6) и радиусу запасов устойчивости (2.8) не выполнены, то задача неразрешима данным подходом. Иначе, переходим к п. 9.

9. Если требования к быстродействию не выполняются, то увеличиваем параметр  $\beta$  и переходим к п. 1, иначе задача решена.

При первом проходе алгоритма естественно использовать  $\gamma = \gamma_0$ . Если требования (2.6) и/или (2.8) не выполнены, то целесообразно решить отдельные задачи синтеза по радиусу запасов устойчивости [11] и/или заданной точности [21] (с весовыми коэффициентами из (3.11)), которые имеют необходимый и достаточный характер, что позволяет определить значения  $\gamma_0$ , определяющие достижимые значения точности (2.9), либо значения радиуса  $r_0 = \gamma_0^{-1}$  при решении этих отдельных задач.

## 6. Задача синтеза для взаимосвязанного электропривода

Рассмотрим взаимосвязанный электропривод, модель которого приведена в [19, 21, 40]. Структурная схема модели приведена в [41]. В [42] такая модель отнесена к классу параллельных систем.

Компоненты вектора состояния  $x \in \mathbb{R}^5$  имеют следующий смысл:  $x_1, x_2$  – отклонения выходных напряжений тиристорных преобразователей от номинальных,  $x_3 = i_1, x_4 = i_2$  – отклонения якорных токов двигателей от номинальных,  $x_5 = \omega$  – отклонение угловой скорости двигателей от номинальной (двигатели работают на общую нагрузку и жестко связаны, т.е. имеют одинаковую угловую скорость). В [42], помимо требований к поддержанию угловой скорости двигателей в заданных границах, большое значение придается обеспечению требования равномерности двигателей, т.е. близости их якорных токов. Стандартные настройки ПИ-регуляторов в ряде случаев приводят к перегрузке одного из двигателей [42].

Вектор управления  $u$  имеет две компоненты  $u_1$  и  $u_2$  – отклонения управляющих напряжений от номинальных на входах тиристорных преобразователей. Внешнее возмущение  $w = M_c$  – отклонение момента сопротивления (нагрузки) от номинального, не превышающее величины 600 Нм. Регулируемые и измеряемые переменные для этого объекта совпадают и связаны с физическими переменными соотношениями  $y_1 = x_3, y_2 = x_4, y_3 = x_5$ ; внешние возмущения и управляющие воздействия приложены в разных точках.

Матрицы объекта:

$$A = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -83,333 & 0 & 0 & 0 \\ 137,811 & 0 & -11,287 & 0 & -1123,155 \\ 0 & 132,459 & 0 & -11,065 & -1101,133 \\ 0 & 0 & 0,2487 & 0,254 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,031 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 16120 & 0 \\ 0 & 13702 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Требования к системе:

- ошибки по угловой скорости и токам:  $|y_3| \leq y_3^* = 1$  рад/с,  $y_1 \leq 375$  А,  $y_2 \leq 375$  А;

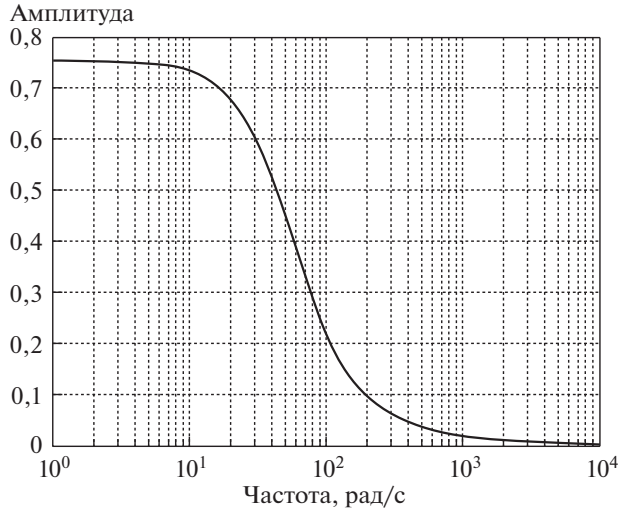


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы.

- запасы устойчивости обеспечиваются по выходу объекта: переменным  $y_1, y_2, y_3$ ;
- время регулирования  $t_p = 0,25$  с.

Желаемую степень устойчивости выберем из соотношения (2.7):

$$\beta = 3/t_p = 3/0,25 = 12.$$

Весовую диагональную матрицу  $Q$  сформируем из равенств (3.11):

$$q_1^{1/2} = q_2^{1/2} = 1,6; \quad q_3^{1/2} = 600.$$

Алгоритм синтеза из раздела 5, реализованный на базе [32], приводит к регулятору:

$$A_c = \begin{bmatrix} 1019,1 & -352,41 & -12033 & 17853 & 32780 \\ -174,04 & -741,28 & -7498,6 & -32956 & -56967 \\ 93,347 & 60,638 & 494,16 & 85,83 & 74,78 \\ -9,606 & 17,318 & 0,204 & -22,099 & 25,108 \\ -45,578 & 81,196 & -1,066 & 3033,4 & -1203,9 \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} -0,005 & 0,015 & -0,001 \\ -0,005 & 0,004 & 0,002 \\ -1,342 & 1,378 & 0,002 \\ -3,927 & -3,861 & 0,014 \\ 281,69 & 271,61 & -10,208 \end{bmatrix},$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 0,025 & 0,045 & 0,64 & 1,728 & 2,951 \\ -0,064 & -0,014 & -0,723 & 1,842 & 3,354 \end{bmatrix}, \quad D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

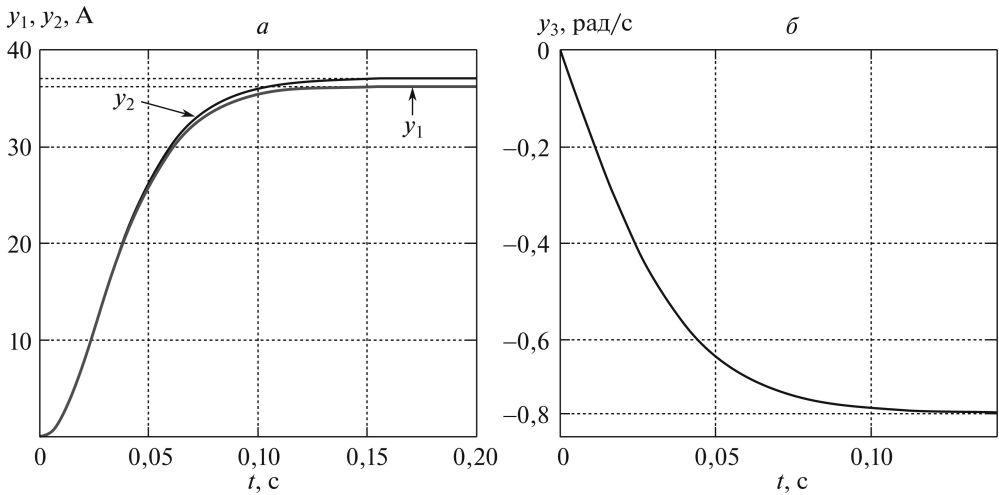


Рис. 4. Переходные процессы по регулируемым переменным.

Реализовавшееся при решении  $H_\infty$ -проблемы (3.4) значение  $\gamma$  при расчете регулятора составило 14,58 (оптимальное же значение  $\gamma_0 = 12,86$ ).

На рис. 3 построена амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы от возмущения (момента нагрузки) к главной регулируемой переменной  $y_3$  (угловой скорости двигателей). Эта характеристика промасштабирована границей внешнего возмущения  $w^* = 600$ . Из этой монотонно убывающей характеристики очевидно, что наихудшее внешнее возмущение из класса полигармонических функций (2.3), (2.4) — ступенчатое.

На рис. 4,а и 4,б приведены графики переходных процессов по токам двигателей и угловой скорости соответственно при ступенчатом изменении момента нагрузки  $w = 600$ . Из графиков монотонных переходных процессов видно, что требования к точности выполнены, в частности (рис. 4,б) по угловой скорости (главной регулируемой переменной)  $|y_3| \leq y_3^* = 1$  рад/с, а время регулирования меньше заданного 0,25 с. Также из рис. 4,а следует, что двигатели равнонагружены (их якорные токи близки).

На рис. 5 приведены годографы Найквиста при размыкании замкнутой системы по выходам объекта: а — по первому выходу (якорному току первого двигателя); б — по второму выходу (якорному току второго двигателя); в — по третьему выходу (угловой скорости двигателей). На рис. 5 окружность меньшего радиуса  $r = 1/\gamma$  с центром в критической точке  $(-1, j0)$  соответствует гарантируемому радиусу запасов устойчивости, а окружность большего радиуса — его истинному значению.

При сравнительно малом гарантируемом радиусе запасов устойчивости на выходе объекта ( $r = 1/\gamma = 0,069$ ) истинные радиусы вполне приемлемые: по первому выходу 0,449 (рис. 5,а), по второму выходу 0,452 (рис. 5,б), по третьему выходу — главной регулируемой переменной объекта: 0,99994 (рис. 5,в). Проверка запасов устойчивости на входе объекта также дала приемлемые значения: радиус составил величину 0,45.

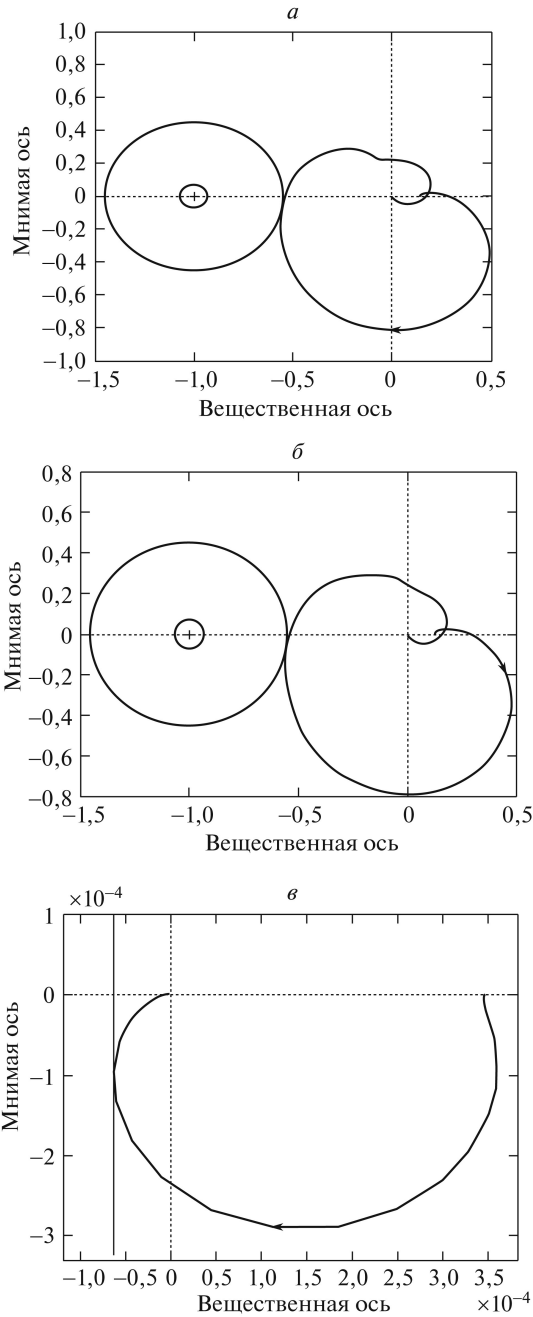


Рис. 5. Годографы Найквиста при размыкании системы по выходам.

## 7. Заключение

В статье предложен метод синтеза регуляторов по измеряемому выходу для линейных многомерных систем при действии неизмеряемых ограниченных полигармонических внешних возмущений с неизвестными амплитудами



(сумма которых ограничена), частотами и их числом, который обеспечивает заданные либо достижимые: ошибки регулирования, время регулирования и радиус запасов устойчивости.

Подход к решению такой задачи базируется на специальном образом сконструированной стандартной проблеме  $H_\infty$ -оптимизации и носит достаточный характер.

Дана физическая интерпретация радиуса запасов устойчивости многомерных систем на языке годографов Найквиста отдельных контуров, разомкнутых на выходе объекта. Доказана абсолютная устойчивость замкнутой системы с полученным регулятором при наличии на выходе объекта секторных нестационарных нелинейностей, границы сектора которых определяются величиной радиуса запасов устойчивости. Порядок получаемого динамического регулятора по выходу не превышает порядка исходного физического объекта, что важно для практических приложений. Приведена процедура синтеза регуляторов в MATLAB-пакете Robust Control Toolbox [32], численная эффективность которой продемонстрирована на примере взаимосвязанного электропривода. Аналоги теорем 1–3, очевидно, справедливы и при размыкании системы по физическому входу объекта.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство леммы.* Согласно [26], когда текущее время  $t$  превышает время регулирования  $t_p$ , на выходе всякой устойчивой системы возникает процесс, названный рабочим. Его отличие от установившегося процесса заключается в наличии экспоненциально убывающих функций  $e_i(t)$ , которые при  $t = t_p$  составляют не более 5% от установившегося. Поэтому далее вынужденные колебания на выходе замкнутой системы (2.1), (2.2) опишем без этого экспоненциально убывающего слагаемого

$$(П.1) \quad y_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_i(\omega_k) \sin(\omega_k t + \phi_i(\omega_k)), \quad i = \overline{1, m_2},$$

где  $a_i(\omega_k) \geq 0$  и  $\phi_i(\omega_k)$  — амплитуды и фазы выходных колебаний, вызванных  $k$ -й гармоникой входного сигнала  $w$  вида (2.3).

Амплитуды колебаний по каждой координате вектора  $y$  из (П.1) с частотой являются модулями соответствующих компонент следующих комплексно-сопряженных векторов  $T_{yw}(j\omega_k)w_+^{(k)}$  и  $T_{yw}(-j\omega_k)w_-^{(k)}$ , где

$$w_+^{(k)} = [w_{1k}e^{j\varphi_{1k}}, w_{2k}e^{j\varphi_{2k}}, \dots, w_{m_3k}e^{j\varphi_{m_3k}}]^T, \\ w_-^{(k)} = [w_{1k}e^{-j\varphi_{1k}}, w_{2k}e^{-j\varphi_{2k}}, \dots, w_{m_3k}e^{-j\varphi_{m_3k}}]^T.$$

Действительно, легко проверить, что  $k$ -я гармоника входного вектора  $w$  с компонентами из (2.3) может быть представлена в виде

$$\left( w_+^{(k)} e^{j\omega_k t} - w_-^{(k)} e^{-j\omega_k t} \right) / (2j).$$

Тогда, определив частные решения уравнений замкнутой системы (2.1), (2.2) при  $w = w_+^{(k)} e^{j\omega_k t}$  и  $w = w_-^{(k)} e^{-j\omega_k t}$  и обозначив соответствующие им значения вектора выхода  $y_+$  и  $y_-$ , в силу принципа суперпозиции для  $k$ -й гармоники выходного вектора  $y$  с компонентами из (П.1) можно записать, что

$$(y_+ - y_-)/(2j) = \left( T_{yw}(j\omega_k) w_+^{(k)} e^{j\omega_k t} - T_{yw}(-j\omega_k) w_-^{(k)} e^{-j\omega_k t} \right) / (2j).$$

Очевидно, что  $a_i^2(\omega_k) = y_{-i} y_{+i}$ , где  $y_{-i}$  и  $y_{+i}$  —  $i$ -е компоненты векторов  $y_-$  и  $y_+$  соответственно. Теперь, принимая во внимание диагональную структуру матрицы  $Q$ , получим  $\sum_{i=1}^{m_2} q_i a_i^2(\omega_k) = y_-^T Q y_+ = w_-^{(k)T} T_{yw}^T(-j\omega_k) Q T_{yw}(j\omega_k) w_+^{(k)}$ ,  $i = \overline{1, m_2}$ .

Учитывая диагональную структуру матрицы правой части (3.9) и само это неравенство, получим, что  $\sum_{i=1}^{m_2} q_i a_i^2(\omega_k) \leq \gamma^2 w_-^{(k)T} w_+^{(k)} = \gamma^2 \sum_{j=1}^{m_3} w_{jk}^2$ .

Отсюда следует очевидное неравенство  $q_i a_i^2(\omega_k) \leq \gamma^2 w_-^{(k)T} w_+^{(k)} = \gamma^2 \sum_{j=1}^{m_3} w_{jk}^2$ ,  $i = \overline{1, m_2}$ .

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего неравенства, получим

$$\sqrt{q_i} a_i(\omega_k) \leq \gamma \sqrt{\sum_{j=1}^{m_3} w_{jk}^2} \leq \gamma \sqrt{\left( \sum_{j=1}^{m_3} w_{jk} \right)^2}, \quad i = \overline{1, m_2}.$$

И, следовательно,  $\sqrt{q_i} a_i(\omega_k) \leq \gamma \sum_{j=1}^{m_3} w_{jk}$ ,  $i = \overline{1, m_2}$ .

Суммируя по всем частотам, будем иметь  $\sqrt{q_i} \sum_{k=1}^{\infty} a_i(\omega_k) \leq \gamma \sum_{j=1}^{m_3} \sum_{k=1}^{\infty} w_{jk}$ ,  $i = \overline{1, m_2}$ .

Учитывая, что  $y_{i,st} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_i(\omega_k)$ ,  $i = \overline{1, m_2}$ , и принимая во внимание (2.4), получим, что

$$\sqrt{q_i} y_{i,st} \leq \gamma \sum_{j=1}^{m_3} \sum_{k=1}^{\infty} w_{jk} \leq \gamma \sum_{j=1}^{m_3} w_j^*, \quad i = \overline{1, m_2}.$$

Из последнего неравенства и следует доказываемое соотношение (3.10).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Линейные системы регулирования одной величины. М.—Л.: Энергия, 1965.

2. *Doyle J.C., Stein G.* Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical / Modern Synthesis // IEEE Trans. Autom. Control. 1981. V. 26. No. 1. P. 4–16.
3. *Zhou K., Doyle J.C., Glover K.* Robust and Optimal Control. N.J.: Prentice-Hall, 1996.
4. *Zhou K., Doyle J.C.* Essentials of Robust Control. N.J.: Prentice-Hall, 1998.
5. The Control Handbook / Ed. W.S. Levine. IEEE Press, 1996.
6. *Skogestad S., Postlethwaite I.* Multivariable feedback control. Analysis and design. N.Y.: John Wiley and Sons, 2006.
7. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
8. *Keel L.H., Bhattacharyya S.P.* Robust, Fragile, or Optimal? // IEEE Trans. Autom. Control. 1997. V. 42. No. 8. P. 1098–1105.
9. *Александров А.Г.* Критерии грубости нестационарных систем автоматического регулирования // Аналитические методы синтеза регуляторов. Межвуз. науч. сб. Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1980. С. 3–14.
10. *Li Ya., Lee B.* Stability Robustness Characterization and Related Issues for Control Systems Design // Automatica. 1993. V. 29. No. 2. P. 479–484.
11. *Честнов В.Н.* Синтез регуляторов многомерных систем по заданному радиусу запасов устойчивости на базе процедуры  $H_\infty$ -оптимизации // АиТ. 1999. № 7. С. 100–109.  
*Chestnov V.N.* Design of Controllers of Multidimensional Systems with a Given Radius of Stability Margins Based on the  $H_\infty$ -optimization Procedure // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 7. P. 986–993.
12. *Честнов В.Н.* Синтез дискретных  $H_\infty$ -регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости и времени регулирования // АиТ. 2014. № 9. С. 65–82.  
*Chestnov V.N.* Synthesis of Discrete  $H_\infty$ -controllers with Given Stability Margin Radius and Settling Time // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 9. P. 1593–1607.
13. *Astrom K.J., Murray R.M.* Feedback systems: an introduction for scientists and engineers. N.J.: Princeton University Press, 2008.
14. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностр., 1986.
15. *Садомцев Ю.В.* Конструирование систем управления с обратной связью по критериям точности и грубости. Саратов: СГТУ, 2003.
16. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Optimal Control. Linear Quadratic Methods. N.Y.: Prentice Hall, 1990.
17. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
18. *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности. II. Применение процедур  $H_\infty$ -оптимизации // АиТ. 1998. № 8. С. 124–138.  
*Aleksandrov A.G., Chestnov V.N.* Synthesis of Multidimensional Systems of Given Accuracy. II. Application of  $H_\infty$ -optimization Procedures // Autom. Remote Control. 1998. V. 59. No. 8. P. 1153–1164.
19. *Агафонов П.А., Честнов В.Н.* Синтез регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости с учетом внешних возмущений на основе  $H_\infty$ -подхода // АиТ. 2004. № 10. С. 101–108.

- Agafonov P.A., Chestnov V.N.* Controllers of a Given Radius of Stability Margin: Their Design by the  $H_\infty$ -approach with Regard for External Disturbances // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 10. P. 1611–1617.
20. *Честнов В.Н.* Синтез робастных  $H_\infty$ -регуляторов многомерных систем по заданной степени устойчивости // АиТ. 2007. № 3. С. 199–205.  
*Chestnov V.N.* Design of Robust  $H_\infty$ -controllers of Multivariable Systems Based on the Given Stability Degree // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 557–563.
21. *Честнов В.Н.* Синтез  $H_\infty$ -регуляторов многомерных систем заданной точности и степени устойчивости // АиТ. 2011. № 10. С. 170–185.  
*Chestnov V.N.* Synthesizing  $H_\infty$ -controllers for Multidimensional Systems with Given Accuracy and Degree of Stability // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 10. P. 2161–2175.
22. *Честнов В.Н., Зацепилова Ж.В.* Синтез регуляторов многомерных систем по инженерным показателям точности, времени регулирования и запасов устойчивости // Сб. тр. Межд. конф. “Проблемы управления, передачи и обработки информации (АТМ-ТКИ-50)” 2009. Саратов: СГТУ, С. 41–45.
23. *Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности, времени регулирования и радиуса запасов устойчивости // Дифф. уравнения. 2014. № 8. С. 1138–1139.
24. *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Обеспечение заданной точности на основе LQ-и  $H_\infty$ -оптимизации // Матер. Межд. конф. “Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах”. СПб.: ЦНИИ Электроприбор, 2012. С. 33–36.
25. *Александров А.Г.* К аналитическому синтезу регуляторов // АиТ. 2010. № 6. С. 3–19.  
*Aleksandrov A.G.* On Analytical Design of Controllers // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 6. P. 977–992.
26. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. I. Минимально-фазовые одномерные объекты // АиТ. 2015. № 5. С. 27–42.  
*Aleksandrov A.G.* Controller Design in Precision and Speed. I. Minimal Phase One-Dimensional Plants // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 5. P. 749–761.
27. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. II. Неминимально-фазовые одномерные объекты // АиТ. 2017. № 6. С. 3–17.  
*Aleksandrov A.G.* Design of Controllers by Indices of Precision and Speed. II. Nonminimal-Phase Plants // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 6. P. 961–973.
28. *Александров А.Г.* Запасы устойчивости и робастная устойчивость // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 6. С. 32–41.
29. *Doyle J.C., Francis B.A., Tannenbaum A.R.* Feedback Control Theory. N.Y.: Macmillan, 1992.
30. *Gahinet P., Apkarian P.* A Linear Matrix Inequality Approach to  $H_\infty$  Control // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 1994. V. 4. P. 421–448.
31. *Iwasaki T., Skelton R.* All Solutions for the General  $H_\infty$  Control Problem: LMI Existence Conditions and State-Space Formulas // Automatica. 1994. V. 30. No. 8. P. 1307–1317.
32. *Balas G.J., Chiang R.Y., Packard A., Safonov M.G.* Robust Control Toolbox 3. User’s guide/Natick (Mass.). The MathWorks, Inc., 2010.
33. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.

34. *Мирошник И.В.* Теория автоматического управления. Линейные системы. СПб.: Питер, 2005.
35. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Госуд. издат. физ.-мат. лит., 1961.
36. *Толстов Г.П.* Ряды Фурье. М.: Наука, 1980.
37. *Якубович В.А.* Методы теории абсолютной устойчивости / Методы исследования нелинейных систем автоматического управления (под ред. Р.А. Нелепина). М.: Наука, 1975. С. 74–180.
38. *Lehtomaki N.A., Sandell N.R., Athans M.* Robustness Results in Linear-Quadratic Gaussian Based Multivariable Control Designs // IEEE Trans. Autom. Control. 1981. V. 26. No. 1. P. 75–92.
39. *Честнов В.Н., Шатов Д.В.* Синтез одномерных регуляторов по заданному показателю колебательности: модальный и  $H_\infty$ -подходы // Пробл. управления. 2019. № 2. С. 2–8.
40. *Chestnov V.N., Shatov D.V.* Multivariable Systems Design of Desired Accuracy Based on LQ and  $H_\infty$  Optimization Procedures / Proc. Eur. Control Conf. (ECC-2018). Cyprus, Limassol, IFAC Publication, 2018. P. 2511–2516.
41. *Агафонов П.А., Честнов В.Н.* Одновременное обеспечение запасов устойчивости на входе и выходе многомерного объекта на основе  $H_\infty$  подхода // АиТ. 2004. № 9. С. 110–119.  
*Agafonov P.A., Chestnov V.N.*  $H_\infty$ -Control for Guaranteed Simultaneous Input and Output Stability Margins for a Multivariate System // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 9. P. 1452–1460.
42. *Astrom K.J., Hagglund T.* Advanced PID Control. ISA, 2006.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиньым.*

Поступила в редакцию 19.07.2018

После доработки 14.08.2018

Принята к публикации 08.11.2018