*Автоматика и телемеханика, № 11, 2019*

**© 2019 г. В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhai@ipu.ru)**
**(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)**

# СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ[1]

Рассматривается механическая система, подверженная действию позиционных сил и малого гладкого управления. Предполагается, что в отсутствие управления система допускает семейство одночастотных колебаний. Находится универсальное управление – нелинейная сила, посредством которой реализуется и одновременно стабилизируется цикл в системе. Приводятся примеры.

*Ключевые слова*: механическая система, малое гладкое универсальное управление, естественная стабилизация.

**DOI:** 10.1134/S0005231019110047

## 1. Введение. Постановка задачи

Рассматривается голономная механическая система, подверженная действию позиционных сил — потенциальных и неконсервативных позиционных — и допускающая одночастотное колебание (периодическое движение). Периодические движения этой системы образуют семейство, поэтому колебание не может быть асимптотически орбитально устойчивым. Для достижения указанной устойчивости колебания необходимо приложить к системе дополнительную силу. Эта сила выступает как управление, и система становится управляемой; возникает задача стабилизации колебания управляемой механической системы.

В задаче устойчивости можно ограничиться введением дополнительной силы в окрестности интересуемого движения. Соответственно само управление может быть малым. В результате механическая система–модель корректируется малым управлением.

Подход с коррекцией модели использовался Понтрягиным [1] при рассмотрении гамильтоновой системы на плоскости, допускающей семейство периодических движений. Условия, обеспечивающие существование предельных циклов для системы, близкой к гамильтоновой, находятся в [1]. Подход, представляющий собой итерационную процедуру, родственную методу последовательных приближений Пикара, на каждом шаге которой выполняется операция усреднения и используется критерий, аналогичный в [1], развивается в [2].

Известно, что диссипация, задаваемая функцией Релея, доводит устойчивое равновесие консервативной системы до асимптотической устойчивости.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00146).

Тем самым естественным образом решается задача стабилизации равновесия: в качестве управления здесь выступает линейная диссипация. Пример нелинейной диссипации, линейной по скорости, наблюдается в “мягком режиме” функционирования триода: процесс описывается известным уравнением Ван дер Поля. Также отметим, что используемая для осциллятора Дуффинга в [3] нелинейная диссипация $v|v|^{p-1}, p = \overline{1,4}$, пропорциональна скорости $v$, а в микромеханике нелинейная диссипация учитывается в Дуффинг-подобных моделях [4].

Цель работы — найти универсальное гладкое управление — нелинейную силу, гарантирующую существование и орбитальную стабилизацию цикла управляемой механической системы.

Ищется управление, которое не зависит явно от времени. Оно используется с малым коэффициентом регулятора; явное выражение для управления приводится в разделе 4. В результате действия управления осуществляется “естественная” стабилизация колебания.

Задача об орбитальной стабилизации периодических решений малоприводных нелинейных систем (с числом независимых приводов на единицу меньше числа степеней свободы неуправляемой консервативной системы) решалась в [5]. Синтезированный закон управления с обратной связью является нелинейным и зависит от времени.

В настоящей работе в основу поиска управления берется условие существования цикла в системе. Искомая сила разрушает семейство колебаний, поэтому представляется нечетной функцией скорости; она должна быть пригодной для всех точек семейства, включая предельную точку – равновесие. Другие соображения, включая простоту управления, связаны с реализацией управления в виде нелинейной диссипации. Наконец, учитывается существование аналога искомой силы в режиме функционирования триода.

## 2. Симметричные периодические движения

Пусть рассматриваемая механическая система, подверженная действию позиционных сил, описывается уравнениями Лагранжа второго рода: $q = (q_1, \ldots, q_n)$ — обобщенная координата. Уравнения движения инвариантны относительно замены $(q, \dot{q}, t) \to (q, -\dot{q}, -t)$. Поэтому фазовое пространство системы симметрично относительно неподвижного множества $M = \{q, \dot{q} : \dot{q} = 0\}$ обратимой механической системы (см. [6]). На периодическом движении скорость $\dot{q}$, по крайней мере, дважды обращается в нуль. Значит, необходимые и достаточные условия существования симметричного периодического движения (СПД) периода $\tau$ записываются в виде

$$\dot{q}_s(q_1^0, \ldots, q_n^0, \tau/2) = 0, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где через $q^0 = (q_1^0, \ldots, q_n^0)$ обозначена начальная точка $q^0 \in M$.

Система уравнений (1) состоит из $n$ уравнений с $n+1$ неизвестными. Следовательно, СПД всегда образуют семейство, параметризованное, например, периодом $\tau$.

Известно, что колебания линейного осциллятора образуют изохронное семейство, а период колебаний математического маятника зависит от постоянной энергии. Для различения разных типов семейств колебаний полезно следующее

*Определение 1. Случай* $\mathrm{rank}||\partial\dot{q}(q^0,\tau/2)/\partial q^0|| = n$ *называется невырожденным для симметричного периодического движения, а само СПД – невырожденным.*

Невырожденные СПД типа колебаний анализируемой механической системы всегда образуют двумерные многообразия, на них период монотонно зависит от одного параметра (см. [6]).

Из приведенных выше сведений следует, что СПД в типичной ситуации заполняют в фазовом пространстве двумерные многообразия $\tilde{\Xi}$. Тогда соответствующее многообразие скорректированной (управляемой) механической системы обозначается через $\Xi$.

## 3. Цикл системы

Пусть для описании динамики на многообразии $\Xi$ используется координата $x$. Тогда с учетом действия позиционных сил и $\mu$-малого гладкого управления $\mu r$ получается уравнение

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x}) + \mu r(x,\dot{x}), \quad f(x,\dot{x}) = f(x,-\dot{x}). \tag{2}$$

При $\mu = 0$ уравнение (2) допускает $h$-семейство СПД: $x = \varphi(h, t+\gamma)$, где $\gamma$ — сдвиг по траектории. Полагается, что при $t = 0$ изображающая точка в фазовом пространстве находится на неподвижном множестве: $\varphi(h,0) \in M$. Тогда $\gamma = 0$. Период $\tau$ на семействе СПД является функцией $h$: $\tau = \tau(h)$. Предполагается, что значению параметра $h = h^*$ отвечает период $\tau^* = \tau(h^*)$.

В уравнении (2) решение $x(\mu, x^0, t)$ с начальной точкой $x^0$ (при $t = 0$) зависит от $\mu$. Производная от этого решения удовлетворяет неоднородному линейному уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right) = \frac{\partial f(\varphi(h,t))}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right) + \frac{\partial f(\varphi(h,t))}{\partial \dot{x}}\left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu}\right) = r(\varphi(h,t),\dot{\varphi}(h,t)) \tag{3}$$

с нулевыми начальными условиями $x(\mu, x^0, 0) = x^0$. Необходимые и достаточные условия существования в уравнении (3) решения периода $\tau^*$ приводят к амплитудному (бифуркационному) уравнению

$$I(h) \equiv \int\limits_0^{\tau^*} r(\varphi(h,t),\dot{\varphi}(h,t))\psi(h,t)dt = 0, \tag{4}$$

где через $(\theta,\psi)$ обозначается периодическое решение системы, сопряженной к системе уравнений в вариациях для СПД. Тогда простому корню $h = h^*$ отвечает цикл (см., например, [7]):

$$x(\mu, h^*, t) = x^{(0)}(t) + \mu x^{(1)}(t) + o(\mu), \quad x^{(0)}(t) = \varphi(h^*, t). \tag{5}$$

Заметим, что уравнения в вариациях для СПД представляют собой линейную периодическую систему. После ее приведения к системе с постоянными коэффициентами каждому корню характеристического уравнения отвечает соответствующий характеристический показатель (ХП) периодической системы.

Семейство СПД содержит два нулевых ХП [6]. При переходе параметра $\mu$ через нулевое значение происходит бифуркация ХП. Для нахождения сценария бифуркации используется характеристическое уравнение

$$\rho^2 - 2A(\mu)\rho + B(\mu) = 0, \quad B = 1 + \mu b_1 + \ldots,$$

где $b_1$ не зависит от $\mu$.

Циклу обязательно отвечает один нулевой ХП, поэтому бифуркация ХП в точке $\mu = 0$ происходит с рождением одного действительного ХП порядка $\mu$. В самом деле, имеем $A(0) = 1$, $\rho_1(0) = \rho_2(0) = 1$. Если $\rho_1 = 1$ при $\mu \neq 0$, то $\rho_2 = B$, бифуркация ХП происходит по сценарию $\lambda_1(\mu) = 0$, $\lambda_2(\mu) = \mu\alpha + \ldots$; $\alpha = \mathrm{const}$. Следовательно, число $\mu\alpha < 0$ обеспечивает асимптотическую орбитальную устойчивость цикла.

Число $\alpha$ вычисляется через амплитудное уравнение в [8]:

$$\alpha = \frac{1}{\tau^*}\frac{dI(h^*)}{dh}. \tag{6}$$

Конструктивная формула для вычисления числа $\alpha$ по известной функции $r$ приводится в Приложении.

## 4. Выбор управления

Функцию $r$ в $\mu$-малом управлении $\mu r$ выберем из следующих соображений. При выборе функции $r(x, -\dot{x}) = r(x, \dot{x})$ уравнение (2) остается инвариантным относительно замены $(x, \dot{x}, t) \to (x, -\dot{x}, -t)$. Поэтому амплитудное уравнение удовлетворяется тождественно: цикл не рождается. Для рождения цикла необходимо, чтобы функция $r$ была нечетной по скорости.

Пример математического маятника показывает, что семейство СПД рождается из положения равновесия. Здесь действие диссипации Релея доводит устойчивость равновесия до асимптотической устойчивости. Хотелось бы, чтобы функция $r$ была пригодна также для равновесия и в этом случае совпадала с диссипацией Релея. Для выполнения пожелания необходимо, чтобы функция $r$ была линейной функцией скорости $\dot{x}$: $r = a(x)\dot{x}$.

Действие управления не должно зависеть от выбора направления оси и линейного преобразования координат, т.е. $a = a(|x|)$. Амплитудное уравнение (4) не имеет корень, если функция $a(|x|)$ принимает значения одного знака, поэтому $a = 1 - Kb(|x|)$, $K$–const. Управление вводится в окрестности выделенного колебания со значением параметра $h = h^*$, поэтому $K = K(h^*)$. Наконец, отрицательность числа (6) всегда можно гарантировать постоянным множителем $L$ перед управлением.

В частных случаях функция $r = (1 - K(h^*)b(|x|)\dot{x}$ наблюдается в физике: $b = 0$ для равновесия, $b = x^2$ в “мягком” и $b = x^2 - kx^4$, $k > 0$, “жестком” режимах функционирования триода (см., например, [7]).

Гладкая функция $r$ в $\mu$-малом управлении $\mu r$ выбирается в виде

$$r = L(1 - Kx^2)\dot{x}, \tag{7}$$

где число $L$ равно $+1$ или $-1$, а коэффициент $K$ определяется ниже. В случае (7) амплитудное уравнение (4) записывается в виде

$$L\int\limits_0^{\tau^*}[1 - K\varphi^2(h,t)]\dot{\varphi}(h,t)\psi(h,t)dt = 0.$$

Вводится следующая характеристика семейства СПД, т.е. функция

$$K(h) = \frac{\int\limits_0^{\tau(h)}\sigma(h,t)dt}{\int\limits_0^{\tau(h)}\varphi^2(h,t)\sigma(h,t)dt}, \quad \sigma(h,t) = \dot{\varphi}(h,t)\psi(h,t).$$

Тогда справедливо тождество

$$\int\limits_0^{\tau(h)}[1 - K(h)\varphi^2(h,t)]\sigma(h,t)dt \equiv 0,$$

откуда дифференцированием по $h$ находится конструктивно проверяемое условие простоты корня в виде

$$\frac{dI(h^*)}{dh} = L\frac{dK(h^*)}{dh}\nu \neq 0, \quad \nu = \int\limits_0^{\tau^*}\varphi^2(h^*,t)\sigma(h^*,t)dt. \tag{8}$$

Из (8) получается, что в точках семейства СПД, в которых $dK = 0$, достаточные условия существования цикла не выполняются.

*Определение 2. Точка $h$ семейства СПД механической системы, в которой производная от функции $K(h)$ равна нулю, называется критической.*

С учетом определения 2 из (8) следует теорема 1.

*Теорема 1. Пусть механическая система допускает $h$-семейство СПД с характеристикой $K(h)$. Тогда при действии на систему $\mu$-малой силы с функцией (7) цикл в управляемой системе существует для всех по характеристике $K(h)$ точек, кроме критических, при $\nu \neq 0$.*

*Замечание 1.* Для консервативной системы в [8] установлено равенство: $\psi(h,t) = \dot{\varphi}(h,t)$. Поэтому $\nu > 0$: условие на $\nu$ в теореме 1 выполняется автоматически.

## 5. "Естественная" стабилизация цикла

Воспользуемся выражением для $\alpha$, полученным в Приложении. Тогда с учетом формул (6) и (8) получаем формулу

$$\alpha = \frac{L}{\tau *}\frac{dK(h^*)}{dh}\int\limits_0^{\tau^*}\varphi^2(h^*,t)\dot{\varphi}(h^*,t)\psi(h^*,t)dt, \quad (9)$$

дающую приращение характеристического показателя.

Из (9) следует, что в рамках выполнения условий теоремы 1 выбором числа $L$ всегда добиваемся отрицательного числа $\alpha$.

Таким образом, при выполнении теоремы 1 осуществляется "естественная" стабилизация цикла управляемой механической системы.

*Теорема 2. В рамках выполнения условий теоремы 1 осуществляется "естественная" стабилизация цикла управляемой механической системы.*

*Замечание 2.* Посредством управления (7) решается проблема конструирования цикла и устойчивого цикла независимо от действующих на механическую систему позиционных сил: потенциальных, неконсервативно позиционных, совместно действующих потенциальных и неконсервативно позиционных. Выводы по существованию цикла (теорема 1) и его стабилизации (теорема 2) не зависят от типа семейства СПД: семейство изохронных колебаний (пример – линейный осциллятор), семейство невырожденных колебаний (пример – математический маятник). Управление (7) решает задачу о цикле и асимптотически орбитально устойчивом цикле независимо от конкретной механической системы. Наконец, сила (7) имеет достаточно простой вид и находит аналог в природе. В силу указанных причин управление (7) называется универсальным.

*Замечание 3.* Помещенное в кавычки слово "естественная" отражает факт стабилизации цикла без привлечения в систему (2) дополнительного к (7) управления.

## 6. Система с $n$ степенями свободы

Выше найдены условия "естественной" стабилизации цикла на двумерном многообразии $\Xi$. Примем, что в системе с $n$ степенями свободы многообразию $\Xi$ отвечает обобщенная координата $q_1 = x$. Тогда в рассматриваемой механической системе цикл по-прежнему существует: для него выполнена теорема 2, а $q_2 = \ldots = q_n = 0$. Следовательно, решение задачи "естественной" стабилизации цикла обеспечивается притяжением траекторий к $\Xi$.

Вычислим ХП СПД. Выше отмечалось, что СПД всегда содержит пару нулевых ХП. Остальные ХП разделяются на пары $\pm\lambda$ (см. [9]). В скорректированной механической системе коэффициенты полинома для вычисления ХП непрерывно зависят от параметра $\mu$. Поэтому ХП СПД, принадлежащие при $\mu = 0$ положительной (отрицательной) полуплоскости, при $\mu > 0$ остаются в положительной (отрицательной) полуплоскости. Следовательно, для обеспечения притяжения траекторий к $\Xi$ малыми силами необходимо, чтобы все

ХП СПД принадлежали мнимой оси. Само притяжение гарантируется действием по каждой координате $q_s$ малой линейной по скорости силой $-\dot{q}_s$ $(s = 2, \ldots, n)$.

Таким образом, становится справедливой следующая

*Теорема 3. В случае механической системы с $n$ степенями свободы задача "естественной" стабилизации цикла управляемой системы решается в рамках выполнения теоремы 1, если ХП СПД принадлежат мнимой оси.*

*Замечание 4.* Используемая по координатам $q_2, \ldots, q_n$ линейная сила получается как частный случай нелинейной силы (7), где положено $L = -1$, $x = 0$.

## 7. Примеры

1. Применение к уравнению Ван дер Поля

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}.$$

Решения линейного осциллятора даются формулой $x = h\cos t$, $h > 0$. Колебания изохронные, вырожденные. Вычислим $K = 4/h^2$, $dK(h)/dh < 0$. Поэтому добавление в правую часть нелинейной диссипации $\mu(1 - x^2)\dot{x}$, где $K = 4/h^{*2}$, $h^* = 2$, приводит к асимптотически орбитально устойчивому циклу в окрестности окружности радиуса 2.

2. Управляемый математический маятник

$$\ddot{x} + \sin x = \mu r(x, \dot{x}). \tag{10}$$

Семейство колебаний математического маятника начинается из предельной точки — нижнего равновесия. Период колебаний монотонно растет вместе с начальным отклонением маятника от вертикали $A$. Колебания невырожденные, в качестве параметра семейства $h$ можно принять, например, отклонение $A$.

Ставится задача выбора в (10) такого управления $\mu r$, чтобы в управляемом маятнике (10) в окрестности колебания с $h = h^*$ реализовался асимптотически орбитально устойчивый цикл.

Малое управление $\mu r$ выберем по формуле (7). Зависимость $K(h)$ для математического маятника дается в [10]: функция $K(h)$ монотонно убывает. Поэтому, выбирая в (7) числа $L = 1$, $K = K(h^*)$, получим согласно теореме 2 решение задачи естественной стабилизации цикла с параметром $h = h^*$.

## 8. Заключение

В работе находится универсальное малое гладкое управление — нелинейная сила типа диссипации в уравнении Ван дер Поля, гарантирующая существование и стабилизацию цикла управляемой этой силой механической системы на двумерном многообразии. Для системы с $n$ степенями свободы найденная сила дополняется линейной по скоростям силой, обеспечивающей притяжение траекторий к многообразию колебаний.

Управляемая механическая система ведет себя подобно регенеративному приемнику в радиотехнике, собственные (релаксационные) колебания которого описываются уравнением Ван дер Поля.

*ПРИЛОЖЕНИЕ*

**Вычисление числа $\alpha$**

Для цикла (5) составляется уравнение в вариациях:

$$\text{(П.1)}\qquad \begin{gathered} \ddot{y} = (a+\mu a^*)y + (b+\mu b^*)\dot{y} + o(\mu), \\ a(t) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad b(t) = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}, \\ a^*(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x^{(1)} + \frac{\partial r}{\partial x}, \quad b^*(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2}\dot{x}^{(1)} + \frac{\partial r}{\partial \dot{x}}, \end{gathered}$$

где в частные производные подставляются функции $x = \varphi(h^*, t)$, $\dot{x} = \dot{\varphi}(h^*, t)$. Здесь получается:

$$a(t) = a(-t), \quad b(t) = -b(-t), \quad a^*(t) = -a^*(-t), \quad b^*(t) = b^*(-t).$$

В системе (П.1) выполняется замена $z = y\exp(-\mu\alpha t)$. Тогда в переменных $z, w$ записывается система

$$\text{(П.2)}\qquad \dot{z} = w - \mu\alpha z, \quad \dot{w} = (a+\mu a^*)z + (b+\mu b^*)z - \mu\alpha w + o(\mu).$$

Периодическое решение системы (П.2) ищется в виде

$$z = z_0(t) + \mu z_1(t) + o(\mu), \quad w = w_0(t) + \mu w_1(t) + o(\mu).$$

Отсюда выводится:

$$\begin{gathered} \dot{z}_0 = w_0, \quad \dot{w}_0 = az_0 + bw_0, \\ \dot{z}_1 = w_1 - \alpha z_0, \quad \dot{w}_1 = a^*z_0 + b^*w_0 - \alpha w_0. \end{gathered}$$

Первая группа уравнений допускает решение

$$z_0 = \frac{\partial\varphi(h^*, t)}{\partial h}, \quad w_0 = \frac{\partial^2\varphi(h^*, t)}{\partial h \partial t}.$$

После подстановки этого решения в уравнения для $z_1, w_1$ получается условие существования периодического решения системы в переменных $z_1, w_1$

$$\alpha\int\limits_0^{\tau^*}[z_0\theta + w_0\psi]dt = \int\limits_0^{\tau^*}[a^*z_0 + b^*w_0]dt$$

(через $\theta(t), \psi(t)$ обозначается периодическое решение системы, сопряженной с (П.1) при $\mu = 0$). Из свойства решений сопряженных систем следует, что подынтегральная функция в левом интеграле равна единице.

Далее после вычисления выражений

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} z_0 x^{(1)} + \frac{\partial r}{\partial x} z_0 = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial \varphi(h^*, t)}{\partial h} x^{(1)} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial h} = \frac{\partial a}{\partial h} x^{(1)} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial h},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} w_0 \dot{x}^{(1)} + \frac{\partial r}{\partial \dot{x}} w_0 = \frac{\partial b}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{\varphi}(h^*, t)}{\partial h} \dot{x}^{(1)} + \frac{\partial r}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial h} = \frac{\partial b}{\partial h} \dot{x}^{(1)} + \frac{\partial r}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial h}$$

оказывается, что

$$a^* z_0 + b^* w_0 = \frac{\partial a}{\partial h} x^{(1)} + \frac{\partial b}{\partial h} \dot{x}^{(1)} + \frac{\partial r}{\partial h}.$$

Из уравнения

$$\ddot{x}^{(1)} = a x^{(1)} + b \dot{x}^{(1)} + r(\varphi, \dot{\varphi})$$

получается равенство

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial x^{(1)}}{\partial h} \right) = a \frac{\partial x^{(1)}}{\partial h} + b \frac{\partial \dot{x}^{(1)}}{\partial h} + \frac{\partial a}{\partial h} x^{(1)} + \frac{\partial b}{\partial h} \dot{x}^{(1)} + \frac{\partial r}{\partial h}.$$

Отсюда вычисляется:

$$C = D(\tau^*) - D(0),$$
$$C = \int_0^{\tau^*} \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial x^{(1)}}{\partial h} - \frac{\partial x^{(1)}}{\partial h} \right) \theta + \left( \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial x^{(1)}}{\partial h} - a \frac{\partial x^{(1)}}{\partial h} - b \frac{\partial \dot{x}^{(1)}}{\partial h} \right) \psi \right] dt,$$
$$D = \frac{\partial x^{(1)}}{\partial h} \theta + \frac{\partial \dot{x}^{(1)}}{\partial h} \psi.$$

Функции $\theta, \psi$ периодичны при любых значениях параметра $h$, поэтому функция

$$x^{(1)} \frac{\partial \theta}{\partial h} + \dot{x}^{(1)} \frac{\partial \psi}{\partial h}$$

также периодична. С учетом данного факта $D$ заменяется на функцию

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial h} (x^{(1)} \theta + \dot{x}^{(1)} \psi). \tag{П.3}$$

Поэтому получается

$$C = \Omega(\tau^*) - \Omega(0). \tag{П.4}$$

Наконец, используется связь

$$\frac{d}{dt} [x^{(1)} \theta + \dot{x}^{(1)} \psi] = r \psi \tag{П.5}$$

между решениями сопряженных систем.

На основе соотношений (П.3)–(П.5) выводится искомое равенство

$$\alpha = \frac{C}{\tau^*} = \frac{1}{\tau^*}\frac{d}{dh}\int\limits_0^{\tau^*} r\psi(t)dt.$$

Полученная формула справедлива для произвольной корректирующей силы $r$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Понтрягин Л.С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4. Вып. 9. С. 883–885.
2. *Klimina L.A.* Iterative method of construction of a bifurcation diagram of autorotation motions for a system with one degree of freedom // AIP Conf. Proc. 2018. V. 1959. No. 030011. P. 30011–1-030011-5.
3. *Patidar V., Sharma A., Purohit G.* Dynamical behaviour of parametrically driven Duffing and externally driven Helmholtz–Duffing oscillators under nonlinear dissipation // Nonlinear Dynam. 2016. V. 83. Iss. 1–2. P. 375–388.
4. *Zaitsev S., Shtempluck O., Gottlieb E.B.* Nonlinear damping in a micromechanical oscillator // Nonlinear Dynam. 2016. V. 67. Iss. 1. P. 859–883.
5. *Shiriaev A., Perram J.W., Canudas-de-Wit C.* Constructive tool for orbital stabilization of underactuated nonlinear systems: virtual constraints approach // IEEE Transact. Autom. Control. 2005. V. 50. Iss. 8. P. 1164–1176.
6. *Тхай В.Н.* О поведении периода симметричных периодических движений // Прикл. матем. и механ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 616–622.
7. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.
8. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний автономной системы // АиТ. 2016. № 6. С. 38–46.

   *Tkhai V.N.* Stabilizing the Oscillations of an Autonomous System // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 6. P. 972–979.
9. *Тхай В.Н.* Об устойчивости регулярных прецессий Гриоли // Прикл. матем. и механ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 848–857.
10. *Tkhai V.N.* Dissipation in the Vicinity of a Oscillation of the Mechanical System// AIP Conf. Proc. 2018. V. 1959. No. 030022. P. 030022-1–030022-5.



*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакшиным.*

Поступила в редакцию 05.11.2018

После доработки 14.04.2019

Принята к публикации 25.04.2019