Автоматика и телемеханика, № 11, 2019

Стохастические системы

© 2019 г. **С.Н. ВАСИЛЬЕВА** (sofia_mai@mail.ru),
Ю.С. КАН, д-р физ.-мат. наук (yu_kan@mail.ru)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

АППРОКСИМАЦИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ В ЗАДАЧАХ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЯДРА ВЕРОЯТНОСТНОЙ МЕРЫ[1]

Рассматривается задача линейного стохастического программирования с детерминированной целевой функцией и индивидуальными вероятностными ограничениями. Каждое вероятностное ограничение представляет собой ограничение снизу на функцию вероятности, равную вероятности выполнения некоторого линейного неравенства. Предлагается сначала представить вероятностные ограничения в виде эквивалентных неравенств для функций квантили. После этого каждая функция квантили аппроксимируется с помощью доверительного метода. Главный аналитический инструмент основан на полиэдральной аппроксимации p-ядра для многомерного вероятностного распределения. Для случая когда функции вероятности задаются линейными неравенствами, ограничения на функции квантили сколь угодно точно аппроксимируются системами детерминированных линейных неравенств. В результате исходная задача аппроксимируется задачей линейного программирования.

Ключевые слова: стохастическое программирование, вероятностные ограничения, ядро вероятностной меры.

DOI: 10.1134/S0005231019110059

1. Введение

Введем основные понятия и обозначения. Пусть η – случайная величина с функцией распределения $F_\eta(y) = \mathbf{P}\{\eta \leqslant y\}$, где $\mathbf{P}$ обозначает вероятность. Тогда *p-квантиль* распределения случайной величины η для заданного $p \in (0,1)$ определяется стандартным соотношением

$$[\eta]_p = \min\{y : \ F_\eta(y) \geqslant p\}.$$

Пусть $f(u,\xi)$ – вещественная *функция потерь*, зависящая от вектора стратегии u и случайного вектора ξ. Если функция потерь является борелевской по ξ, то $\eta_u = f(u,\xi)$ является случайной величиной. Ее функция распределения называется *функцией вероятности* для функции потерь $f(u,\xi)$, и p-квантиль $[\eta_u]_p$, как функция u, называется *функцией квантили* для той

[1] Результаты работы получены в рамках выполнения Государственного задания Минобрнауки № 2.2461.2017/4.6.

же функции потерь. Роль функций вероятности и квантили в стохастическом программировании описана в [1]. Современное состояние теории оптимизационных задач с такими функциями достаточно полно отражено в [2]. Наиболее близки к этой проблематике задачи стохастического программирования с вероятностными ограничениями. Их можно определить двумя способами. Первый способ связан с *совместными вероятностными ограничениями*. Стратегия u является допустимой для такого ограничения тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{P}\{g(u,\xi) \leqslant 0\} \geqslant p, \tag{1}$$

где $g(u,x)$ – вектор-функция, $p \in (0,1)$ – заданная вероятность и неравенство $g(u,\xi) \leqslant 0$ понимается покомпонентно. Таким образом, совместные вероятностные ограничения являются ограничениями на вероятность выполнения системы неравенств, зависящих от случайных параметров. Второй способ связан с заданием *индивидуальных вероятностных ограничений*, которые образуют следующую систему вероятностных неравенств:

$$\mathbf{P}\{g_i(u,\xi) \leqslant 0\} \geqslant p_i \qquad \forall i = \overline{1,k}, \tag{2}$$

где вещественные функции $g_i(u,\xi)$ можно интерпретировать как компоненты вектор-функции $g(u,\xi)$. Заметим, что с формальной точки зрения совместные вероятностные ограничения могут быть преобразованы только в одно индивидуальное вероятностное ограничение

$$\mathbf{P}\left\{\max_{i=\overline{1,k}} g_i(u,\xi) \leqslant 0\right\} \geqslant p. \tag{3}$$

Однако на этом пути можно потерять "хорошие" свойства функций g_i, например их линейность.

Впервые вероятностные ограничения в форме совместных вероятностных ограничений были введены и рассмотрены в [3], где функция $g(u,\xi) = Tu - \xi$ имеет линейную структуру, T – технологическая матрица. Ранее исследования вероятностных ограничений были сконцентрированы в основном на построении детерминированных эквивалентов. Их суть – преобразование вероятности в левой части (1) в детерминированную функцию вектора стратегии [4]. К сожалению, класс задач, в которых могут быть построены такие эквиваленты, является достаточно узким. Наиболее сложный случай возникает, если случайные параметры – компоненты вектора ξ – являются взаимно зависимыми. Это препятствие было преодолено в [5, 6] путем использования методов и моделей целочисленного программирования и понятия p-эффективных точек многомерного распределения вероятностей в случае, когда $g(u,\xi) = Tu - \xi$ имеет детерминированную технологическую матрицу T. Этот результат был позже распространен на случай со случайной технологической матрицей [7], см. также [8].

Большой прорыв в этой области связан с именем венгерского математика Прекопы, который получил достаточные условия выпуклости допустимого множества, определенного индивидуальными вероятностными ограничениями. Эти условия основаны на том, что многие многомерные распределения обладают свойством логарифмической вогнутости. Этот факт позволил применить методы решения задач выпуклого программирования для построения численных методов решения задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями. Основные результаты по данному вопросу собраны в [9]. Хотелось бы также отметить другие результаты, достигнутые в конце XX в., а именно эффективные алгоритмы проверки выполнения вероятностных ограничений. Хороший обзор этих алгоритмов можно найти в [10].

Среди недавних результатов, определяющих современное состояние теории задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями в первую очередь стоит отметить алгоритмы, основанные на методе Монте-Карло (SAA – Sample Average Approximation), см., например, [11–18], также отметим метод стохастической аппроксимации [19, 20] и математический аппарат, основанный на понятии p-эффективных точек [21–23]. Последний оказался особенно конструктивным для задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями, в которых случайные параметры имеют дискретное распределение. Отметим, что понятие p-эффективных точек фактически является расширением понятия p-квантили в многомерном случае.

Значительную роль в развитии теории стохастического программирования также сыграли публикации [24–27], где развит метод решения задачи квантильной оптимизации с дискретными случайными параметрами путем сведения к задаче смешанного линейного программирования большой размерности. В отличие от этих работ, в настоящей статье рассматриваются задачи стохастического программирования в случае непрерывно распределенных случайных параметров модели. В [28] исследована задача квантильной оптимизации с кусочно-линейной функцией потерь и непрерывными случайными параметрами. Предложен алгоритм нахождения некоторого решения, называемого "гарантирующим" и дана оценка его точности по значению критерия. На примерах показано, что гарантирующее решение может быть удовлетворительно. Вместе с тем следует отметить, что сходимость гарантирующего решения к точному не обоснована.

Мотивация авторов настоящей статьи связана с двумя обстоятельствами. Во-первых, большинство публикаций, посвященных вероятностным ограничениям, рассматривают случаи, когда функции $g(u,\xi)$ и $g_i(u,\xi)$ линейны по случайным параметрам. Во-вторых, некоторые недавние результаты авторов в области стохастического программирования с вероятностными критериями нацелены именно на такой класс задач. Основными публикациями авторов по данной тематике являются [29, 30]. В них предлагаются алгоритмы решения задачи минимизации функции квантили, основанные на концепции p-ядра вероятностного распределения. Его определение и свойства описаны в разделе 2. В разделе 3 показано, что совместные и индивидуальные вероятностные ограничения могут быть записаны как неравенства для функции(й) квантили и представлены в детерминированной форме с помощью p-ядра. В разделе 4 рассматривается задача стохастического программирования с детерминированной линейной функцией потерь и несколькими индивидуальными вероятностными ограничениями, неравенства в которых имеют билинейную структуру. Такая задача сводится к задаче линейного программирования с помощью подхода, предложенного в [29] для решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь. Основу подхода составляет внешняя, сколь угодно точная полиэдральная аппроксимация p-ядра [29].

2. p-Ядро многомерного распределения

Введем понятие p-ядра [1] для n-мерного случайного вектора ξ. Это понятие играет ключевую роль при построении детерминированных эквивалентов или выпуклых аппроксимаций вероятностных ограничений, в которых функции $g_i(u,\xi)$, $i = \overline{1,k}$, линейны по ξ. Здесь и далее вероятностная мера $\mathbf{P}$ ассоциируется с распределением вектора ξ, т.е. она определена на всех измеримых по Борелю подмножествах $\mathbb{R}^n$. Также будем полагать, что векторы из $\mathbb{R}^n$ являются вектор-столбцами.

Измеримое по Борелю множество S является *p-доверительным,* если справедливо $\mathbf{P}(S) \geqslant p$. *$p$-Ядро* $K(p)$ определяется как пересечение всех замкнутых выпуклых p-доверительных множеств [2]. С другой стороны, для него справедливо следующее представление [2]:

$$K(p) = \bigcap_{\|c\|=1} \left\{x \in \mathbb{R}^n : \, c^{\mathrm{T}} x \leqslant b_p(c)\right\}, \tag{4}$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора, а $b_p(c) = [c^{\mathrm{T}}\xi]_p$ – квантиль уровня p. Таким образом, p-ядро совпадает с пересечением всех замкнутых p-доверительных полупространств, соответствующих единичным векторам внешней нормали c. Как показано в [29], множество $K(p)$ всегда (т.е. для любого распределения $\mathbf{P}$) не пусто, если $p > n/(n+1)$. Очевидно, что непустое p-ядро является выпуклым компактным множеством. Также в [29] предложен алгоритм аппроксимации p-ядра выпуклым многогранником

$$K_N(p) = \bigcap_{c \in C_N} \left\{x \in \mathbb{R}^n : \, c^{\mathrm{T}} x \leqslant b_p(c)\right\}, \tag{5}$$

где C_N – конечное множество из N единичных векторов. Этот алгоритм основан на построении сгущающейся сети точек на поверхности единичной сферы, задающих множество векторов нормали $c \in \mathbb{R}^n$. Алгоритм построения векторов нормали заключается в нанесении равномерной сети точек на поверхность n-мерного куба. Проекция этих точек на единичную сферу и будет задавать множество C_N векторов нормали c. Такое множество векторов нормали сгущается с увеличением числа N. Соседними векторами из множества C_N на единичной сфере назовем векторы, прообразы которых на кубе являются соседними точками указанной выше равномерной сети.

В некоторых случаях в [29] для функции $b_p(c)$ удается получить аналитическое выражение. В общем случае это сделать проблематично. В таких ситуациях вместо $b_p(c)$ можно попытаться использовать ее выборочную оценку $\widehat{b}_p(c)$ [2] и аппроксимировать p-ядро множеством

$$\widehat{K}_N(p) = \bigcap_{c \in C_N} \left\{x \in \mathbb{R}^n : \, c^{\mathrm{T}} x \leqslant \widehat{b}_p(c)\right\}. \tag{6}$$

Теоретическое исследование возможности использования $\widehat{K}_N(p)$ вместо $K_N(p)$ выходит за рамки данной статьи.

Алгоритм построения густого множества векторов C_N, предложенный в [29], реализован в программном модуле ProKer (Probabilistic Kernel) [31] для пакета MATLAB в случае $n = 2$, где компоненты вектора ξ независимы и одинаково распределены. Программный модуль ProKer разработан для исследовательских целей. Он позволяет получить визуальные представления p-ядра для различных p.

Схожая идея аппроксимации выпуклых p-доверительных множеств с помощью многогранников использовалась ранее в [25]. Отметим, что p-ядро не является p-доверительным множеством.

Очевидно, что $K(p) \subseteq K(q)$ для всех $p < q$, так как каждое p-доверительное полупространство с вектором нормали c является подмножеством q-доверительного полупространства с тем же вектором внешней нормали.

Наиболее важным и принципиальным для детерминированной аппроксимации вероятностных ограничений свойством p-ядра непрерывных распределений является регулярность [2]. p-Ядро является *регулярным* тогда и только тогда, когда каждое замкнутое полупространство, содержащее его, является p-доверительным. Пример нерегулярного p-ядра можно найти в [2]. Там же сформулированы следующие достаточные условия регулярности p-ядра.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) *случайный вектор ξ имеет плотность вероятности,*

(ii) *граница p-ядра $K(p)$ для распределения вектора ξ является гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^n$.*

Тогда $K(p)$ является регулярным.

Для обобщения теоремы 1 определим множество S_p всех точек x^* на границе p-ядра, для которых выполнено условие $x^* \in \operatorname{Arg\,max}_{x\in K(p)} c^T x$ для различных c. Другими словами, вектор внешней нормали к $K(p)$ в точках из S_p не является единственным.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) *случайный вектор ξ имеет плотность вероятности,*

(ii) $\mathbf{P}\{c^{\mathrm{T}}\xi \leqslant c^{\mathrm{T}}x^*\} \geqslant p$ *для любого $x \in S_p$ и любого единичного нормального вектора c.*

Тогда $K(p)$ является регулярным.

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Следующий, не менее важный результат, также доказан в [2, следствие 3.13].

Теорема 3. *Пусть случайный вектор ξ имеет регулярное p-ядро для некоторого $p \in (0, 1)$. Тогда*

$$\left[a^{\mathrm{T}}(u)\xi + b(u)\right]_p = b(u) + \max_{x\in K(p)} a^{\mathrm{T}}(u)x.$$

Именно эта теорема является основополагающей при построении детерминированных эквивалентов или аппроксимаций вероятностных ограничений, рассмотренных в разделе 3. Из свойства регулярности вытекает неравенство треугольника для квантилей, т.е.

$$[\xi_1 + \xi_2]_p \leqslant [\xi_1]_p + [\xi_2]_p,$$

если p-ядро распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)^{\mathrm{T}}$ является регулярным. Этот результат следует из цепочки неравенств:

$$[\xi_1+\xi_2]_p = \max_{(x_1,x_2)\in K(p)}(x_1+x_2) \leqslant \max_{(x_1,x_2)\in K(p)} x_1 + \max_{(x_1,x_2)\in K(p)} x_2 = [\xi_1]_p + [\xi_2]_p.$$

В заключение настоящего раздела приведем некоторые новые свойства p-ядер, которые имеют самостоятельный интерес. Обозначим координаты векторной медианы μ случайного вектора ξ с помощью соотношения $\mu_k = [\xi_k]_{1/2}$ для всех $k = 1, \dots, n$.

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) *случайный вектор ξ имеет плотность вероятности;*

(ii) $\mathbf{P}\{\mu_k < \xi_k < \mu_k + \varepsilon\} > 0$ *и* $\mathbf{P}\{\mu_k - \varepsilon < \xi_k < \mu_k\} > 0$ *для любого* $\varepsilon > 0$, $k = 1, \dots, n$;

(iii) *p-ядро $K(p)$ не пусто для любого $p \in (1/2, 1)$.*

Тогда при $p = 1/2$ p-ядро $K(p)$ является регулярным и содержит единственную точку μ.

Доказательство теоремы 4 приведено в Приложении.

Свойство регулярности ядра, состоящего из единственной точки – медианы μ – приводит к ее устойчивости по отношению к ортогональным преобразованиям. Рассмотрим новый случайный вектор $\xi^* = S\xi$, где S – ортогональная $(n \times n)$-матрица, т.е. $S^{\mathrm{T}} = S^{-1}$. Обозначим через μ медиану вектора ξ, а через μ^* – медиану вектора ξ^*. Регулярность μ означает $\mu^* = S\mu$ точно так же, как для математического ожидания E всегда справедливо $\mathrm{E}\xi^* = S \cdot \mathrm{E}\xi$. Следует подчеркнуть, что наиболее ограничительным условием теоремы 4 является (iii). Оно может быть проверено численно, например, с помощью программного модуля ProKer, а также при построении p-ядер с p, близкими к 1/2, или при прямом построении $K_N(1/2)$. Успешные в этом смысле результаты получены для нормального распределения, распределения Коши и равномерного распределения независимых компонент вектора ξ в двумерном случае. Однако аппроксимации p-ядер для экспоненциального и логнормального распределений оказались пустыми уже при $p = 0{,}53$, что свидетельствует о невыполнении условия (iii) теоремы 4 и, как следствие, о пустоте p-ядра для $p = 0{,}5$.

Лемма 1. *Для любой точки x_0, принадлежащей границе p-ядра K_p, существует p-доверительное полупространство, для которого эта точка тоже является граничной.*

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении.

Для доказательства теоремы 5 понадобится следующая лемма [29].

Лемма 2. *Для любых соседних точек c_j и c_k на единичной сфере, сгенерированных алгоритмом из* [29], *справедливо $||c_j - c_k|| \to 0$ при $N \to \infty$.*

Теорема 5. Пусть функция квантили $b_p(c)$ непрерывна, тогда множество $K_N(p)$, построенное с помощью алгоритма, предложенного в [29], сходится в метрике Хаусдорфа к множеству $K(p)$ с ростом N.

Доказательство теоремы 5 приведено в Приложении.

Из теоремы 5 следует, что полиэдральная модель, построенная с помощью алгоритма, предложенного в [29], сколь угодно точно аппроксимирует p-ядро как в случае регулярного, так и в случае нерегулярного ядра.

Условие непрерывности функции квантили $b_p(c)$ может быть проверено с помощью известных результатов из [2]. Например, если случайная величина ξ имеет ограниченный носитель, то функция квантили $b_p(c)$ непрерывна согласно [2, теорема 2.5].

3. Задача стохастического программирования с вероятностными ограничениями

Рассмотрим задачу стохастического программирования с индивидуальными вероятностными ограничениями

$$h(u) \to \max_{u \in U} \tag{7}$$

при ограничениях (2), где $h(u)$ – детерминированная вещественная целевая функция. Как было отмечено в [32], индивидуальные вероятностные ограничения (2) легко сводятся к системе детерминированных неравенств в случае, когда функции $g_i(u, \xi)$ являются сепарабельными по u и ξ. Обобщим этот результат для случая, когда эти функции линейны по ξ.

Для начала рассмотрим индивидуальные вероятностные ограничения общего вида (2). Они связаны с неравенствами для функций вероятности, соответствующих функциям потерь $g_i(u, \xi)$. Пусть η – случайная величина с функцией распределения $F_\eta(y)$. В [33] установлено, что неравенство $F_\eta(y) \geqslant p$ выполнено тогда и только тогда, когда $[\eta]_p \leqslant y$. Поэтому каждое вероятностное ограничение в (2) может быть представлено в эквивалентной квантильной форме:

$$[g_i(u, \xi)]_{p_i} \leqslant 0. \tag{8}$$

Рассмотрим случай, когда функции $g_i(u, \xi)$ линейны по ξ, т.е. $g_i(u, \xi) = a_i^T(u)\xi + b_i(u)$ и p_i-ядра распределения вектора ξ являются регулярными. Тогда, применяя теорему 3, выражение (8) можно представить в форме

$$b_i(u) + \max_{x \in K(p_i)} a_i^{\mathrm{T}}(u)x \leqslant 0. \tag{9}$$

Отметим, что если функция $b_i(u)$ выпукла, а функция $a_i^{\mathrm{T}}(u)x$ выпукла по u для любого вектора $x \in K(p_i)$, то левая часть неравенства (9) является выпуклой функцией и, следовательно, допустимое множество стратегий u является выпуклым.

Далее, заменим p_i-ядро в выражении (9) его полиэдральной аппроксимацией $K_N(p_i)$, где $v_i^j \in J_i$ – j-я вершина многогранной аппроксимации p-ядра для значения $p = p_i$, $j = \overline{1, N}$, и J_i – множество вершин полиэдральной аппроксимации p-ядра для значения $p = p_i$. Учитывая линейность максимизируемой функции в (9), имеем

$$\max_{x \in K_N(p_i)} a_i^{\mathrm{T}}(u)x = \max_{j \in J_i} a_i^{\mathrm{T}}(u)v_i^j.$$

Вследствие этого можно заключить, что каждое индивидуальное вероятностное ограничение из (2) может быть аппроксимировано системой неравенств

$$b_i(u) + a_i^{\mathrm{T}}(u)v_i^j \leqslant 0, \quad j \in J_i. \tag{10}$$

Такая система определяет выпуклое допустимое множество, если левая часть каждого из ее неравенств выпукла по u. В частном случае, когда функции $b_i(u)$ и $a_i(u)$ линейны по u, это условие выполнено. Рассмотрим это подробнее в разделе 4.

4. Аппроксимация задачи стохастического программирования с билинейными вероятностными ограничениями

Рассмотрим специальный случай задачи линейного стохастического программирования

$$d^{\mathrm{T}}u \to \max_{u \in U} \tag{11}$$

при детерминированных линейных ограничениях

$$U = \{u : Au \leqslant B\} \tag{12}$$

и индивидуальных вероятностных ограничениях вида

$$\mathbf{P}\left\{\alpha_i^{\mathrm{T}}u + \beta_i^{\mathrm{T}}\xi + u^{\mathrm{T}}\Theta_i\xi + \gamma_i \leqslant 0\right\} \geqslant p_i \quad \forall i = \overline{1,k}, \tag{13}$$

где u – вектор оптимизируемой стратегии из $\mathbb{R}^m$, d – детерминированный вектор размерности m, $p_i \in (0,1)$ – заданная доверительная вероятность, A – детерминированная матрица размеров $k \times m$, B – заданный вектор размерности k, ξ – n-мерный случайный вектор, α_i – детерминированный m-мерный вектор, β_i – детерминированный n-мерный вектор, Θ_i – заданная матрица размеров $m \times n$ и γ_i – действительное число. С учетом результатов раздела 3 аппроксимируем рассматриваемую задачу задачей линейного программирования. Следуя результатам раздела 3, функции $a_i(u)$ и $b_i(u)$ можно представить в линейной форме:

$$a_i(u) = \beta_i + \Theta_i^{\mathrm{T}}u, \quad b_i(u) = \alpha_i^{\mathrm{T}}u + \gamma_i.$$

Учитывая факт, что ограничения (10) могут быть записаны в виде линейных неравенств

$$\alpha_i^{\mathrm{T}}u + \gamma_i + \left(\beta_i^{\mathrm{T}} + u^{\mathrm{T}}\Theta_i\right)v_i^j \leqslant 0, \quad j \in J_i, \tag{14}$$

исходная задача стохастического программирования (11), (12) и (13) аппроксимируется задачей линейного программирования (11), (12) и (14).

Т е о р е м а 6. *Пусть U – компактное множество, функции $b_{p_i}(c)$ непрерывны по c, p_i-ядра регулярны и $\beta_i + \Theta_i u \neq 0$ $\forall i = \overline{1,k}, \forall u \in U$. Тогда решение* *задачи* (11), (12) *и* (14) *сходится по значению критерия к решению задачи* (11), (12) *и* (13).

Доказательство теоремы 6 приведено в Приложении.

5. Пример

Рассматривается оптимизационная задача

$$u_1 - 2u_2 \to \max_{u_1,u_2} \tag{15}$$

при детерминированных ограничениях:

$$u_1 \geqslant 0, \quad u_2 \geqslant 0, \quad u_1 + u_2 \leqslant 1 \tag{16}$$

и двух вероятностных ограничениях вида:

$$\mathbf{P}(u_1\xi_1 - u_2\xi_2 \leqslant 1) \geqslant 0{,}9, \tag{17}$$

$$\mathbf{P}(3u_1\xi_1 - u_2\xi_2 \leqslant 2) \geqslant 0{,}7, \tag{18}$$

где ξ_1, ξ_2 — независимые, одинаково равномерно распределенные на $[0,1]$ случайные величины.

В соответствии с результатами раздела 3 вероятностные ограничения (25), (26) можно переписать в эквивалентной квантильной форме:

$$[u_1\xi_1 - u_2\xi_2]_{0{,}9} \leqslant 1, \qquad [3u_1\xi_1 - u_2\xi_2]_{0{,}7} \leqslant 2. \tag{19}$$

С использованием теоремы 2 эти неравенства равносильны следующим:

$$\max_{(x_1,x_2)\in K(0{,}9)} (u_1x_1 - u_2x_2) \leqslant 1, \qquad \max_{(x_1,x_2)\in K(0{,}7)} (3u_1x_1 - u_2x_2) \leqslant 2, \tag{20}$$

где $K(p)$ — p-ядро равномерного распределения на квадрате $[0,1]\times[0,1]$. В [29] установлена регулярность p-ядра равномерного распределения. Также в [29] были получены соотношения для нахождения координат точек на границе p-ядра $K(p)$ в случае двумерного случайного вектора, имеющего равномерное распределение на площади квадрата со сторонами, параллельными осям координат и симметричными относительно них:

$$|x_2| = \frac{1}{2} - \left|\frac{(1-p)}{1-2|x_1|}\right| \ \text{при}\ |x_1| \leqslant p - \frac{1}{2}. \tag{21}$$

С целью иллюстрации предложенного в статье подхода заменим p-ядра в (20) их аппроксимациями с помощью многогранников, как описано в разделе 4. В расчетах множества J_1 и J_2 содержат одинаковое число точек, т.е. ядра $K(0{,}9)$ и $K(0{,}7)$ аппроксимированы полиэдрами, содержащими одинаковое число вершин N. В результате ограничения (20) аппроксимируются системами линейных неравенств:

$$u_1v_1^j - u_2v_2^j \leqslant 1 \ \ \forall j \in J_1, \qquad 3u_1v_1^j - u_2v_2^j \leqslant 1 \ \ \forall j \in J_2, \tag{22}$$

а исходная задача – задачей линейного программирования (23), (24), (22).

Для $N = 128$ получено следующее решение аппроксимирующей задачи линейного программирования: $u = (0{,}9522; 0)$, оптимальное значение целевой функции 0,9522. Время работы программы составляет около 3 секунд.

Для $N = 16$ результаты схожие: $u = (0{,}9524; 0)$, оптимальное значение целевой функции 0,9524, время счета составляет примерно 0,8 с. В этих расчетах функция квантили $b_p(c)$ вычислялась точно с использованием указанного выше результата [29]. При замене точного выражения для функции $b_p(c)$ ее выборочной оценкой для объема выборки $n = 10^6$ результаты следующие. Для $N = 16$ получено решение $u = (0{,}9530; 0)$, оптимальное значение критерия 0,9530. Для $N = 128 : u = (0{,}9527; 0)$, значение критерия 0,9527.

В силу того что первое вероятностное ограничение выполнено для всех допустимых u_1 и u_2, получается решить поставленную задачу аналитически с помощью метода детерминированных эквивалентов [2]. Таким образом, может быть получено точное решение исходной задачи: $u = (20/21, 0)$, значение критерия 20/21. Это свидетельствует о работоспособности предложенного подхода.

Заменим значения параметров в ограничениях предыдущей задачи

$$u_1 - 2u_2 \to \max_{u_1,u_2} \tag{23}$$

при детерминированных ограничениях:

$$u_1 \geqslant 0,\ u_2 \geqslant 0,\ u_1 + u_2 \leqslant 1 \tag{24}$$

и двух вероятностных ограничениях вида:

$$\mathbf{P}(u_1\xi_1 - u_2\xi_2 \leqslant 0{,}5) \geqslant 0{,}9, \tag{25}$$

$$\mathbf{P}(3u_1\xi_1 - u_2\xi_2 \leqslant 2) \geqslant 0{,}7, \tag{26}$$

где ξ_1, ξ_2 — независимые, одинаково распределенные по равномерному закону на отрезке $[0, 1]$ случайные величины.

В этом случае не удается построить детерминированный эквивалент, как это было сделано в предыдущем примере. При $N = 128$ получено решение $u = (0{,}5556; 0)$, значение критерия равно соответственно 0,5556. При $N = 16$ значения критерия и оптимальных параметров совпадают до четвертого знака.

6. Заключение

Рассмотрена задача стохастического программирования с детерминированной целевой функцией и индивидуальными вероятностными ограничениями, задаваемыми неравенствами с билинейной структурой. С использованием свойств ядра многомерного вероятностного распределения каждое вероятностное ограничение аппроксимировано системой линейных неравенств. В результате исходная задача сведена к задаче линейного программирования с большим числом ограничений типа неравенств. Работоспособность предложенного метода проиллюстрированна на численном примере.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Случай, когда множество S_p пусто, рассматривается по аналогии с доказательством теоремы 1 из [2]. Если же S_p не пусто, то указанное доказательство сохраняет силу, так как условие (ii) гарантирует, что каждое замкнутое полупространство, содержащее $K(p)$ и имеющее граничную гиперплоскость, которая проходит через точку $x^* \in S_p$, автоматически является p-доверительным.

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 4. Из (i) следует $\mathbf{P}\{\xi_k = \mu_k\} = 0$, $\mathbf{P}\{\xi_k < \mu_k\} = 1/2$ и $\mathbf{P}\{\xi_k > \mu_k\} = 1/2$, $k = \overline{1,n}$. Используя (ii), получаем, что для некоторого $\varepsilon > 0$ существует $2n$ замкнутых полупространств $\{x : x_k \leqslant \mu_k + \varepsilon\}$ и $\{x : x_k \geqslant \mu_k - \varepsilon\}$, $k = \overline{1,n}$, которые являются p-доверительными для некоторого $p = p(\varepsilon) > 1/2$. Их пересечение образует куб C_ε со стороной 2ε, для которого справедливо включение $\mu \in C_\varepsilon$.

Из выполнения условия (iii) следует, что $K(p) \neq \varnothing$ и выполнено $K(p) \subset C_\varepsilon$. Пусть при этом $\mu \notin K(p)$. Тогда по аналогии с C_ε можно построить множество C_{ε_1}, для $\varepsilon_1 < \varepsilon$ такое, что $\mu \in C_{\varepsilon_1}$ и $C_{\varepsilon_1} \cap K(p) = \varnothing$. Тогда найдется такое $p_1 = p_1(\varepsilon)$, для которого справедливо $1/2 < p_1 < p$, для которого выполнено $K(p_1) \subset C_{\varepsilon_1}$. Но поскольку $p_1 < p$, то должно выполняться $K(p_1) \subset K(p)$, но по построению имеем $C_{\varepsilon_1} \cap K(p) = \varnothing$. Получаем противоречие. Следовательно, медиана μ является внутренней точкой p-ядра $K(p)$ для любого $p \in \in (1/2, 1)$.

Пусть p-ядро $K(p)$ при $p = 1/2$ не является регулярным. Тогда существует полупространство, содержащее это ядро, вероятностная мера которого меньше $1/2$. Тогда его замкнутое дополнение имеет меру $p_1 > 1/2$. По определению p-ядра это дополнение содержит в себе ядро $K(p_1)$. Выше было доказано, что для любого $p \in (1/2, 1)$ $\mu \in K(p)$. Таким образом, получаем противоречие.

Согласно условиям $\mathbf{P}\{\xi_k = \mu_k\} = 0$, $\mathbf{P}\{\xi_k < \mu_k\} = 1/2$ и $\mathbf{P}\{\xi_k > \mu_k\} = 1/2$ p-ядро при $p = 1/2$ содержит единственную точку μ.

Теорема 4 доказана.

Доказательство леммы 1. Предположим, что точка x_0 принадлежит границе p-ядра K_p, но не существует p-доверительного полупространства, для которого она является граничной. В случае когда p-доверительное полупространство не содержит точку x_0, она также не принадлежит и p-ядру.

Пусть точка x_0 принадлежит некоторому p-доверительному полупространству вместе со своей окрестностью, тогда выполнено $c^{\mathrm{T}} x_0 < b_p(c)$ для любого $c : \|c\| = 1$. Преобразуем данное выражение:

$$0 < b_p(c) - c^{\mathrm{T}} x_0.$$

Поскольку настоящее выражение справедливо для любого $c : \|c\| = 1$, то введем обозначение

$$h = \min_{c : \|c\| = 1} (b_p(c) - c^{\mathrm{T}} x_0).$$

Минимум достигается, поскольку функция $b_p(c)$ – полунепрерывна снизу согласно [2, лемма 2.11], а функция $c^{\mathrm{T}} x_0$ – непрерывна.

Тогда справедливо неравенство

$$0 < h \leqslant b_p(c) - c^{\mathrm{T}} x_0.$$

Рассмотрим любую точку x^*, принадлежащую малой окрестности точки x_0. Из полунепрерывности снизу функции квантили вытекает, что для всех c : $\|c\| = 1$ справедливо неравенство

$$0 < b_p(c) - c^{\mathrm{T}} x^*.$$

Это можно представить как

$$c^{\mathrm{T}} x^* < b_p(c) \qquad \forall c : \|c\| = 1. \tag{П.1}$$

Согласно определению p-ядра (4) и (П.1) точка x^* является внутренней точкой p-ядра. Это противоречит тому, что точка x_0 выбрана на границе p-ядра.

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 5. С учетом того что полиэдральная аппроксимация $K_N(p)$ является внешней, т.е. $K(p) \subset K_N(p)$, достаточно проверить, что расстояние от любой граничной точки множества $K(p)$ до границы множества $K_N(p)$ стремится к нулю при $N \to \infty$.

Согласно лемме 1 для любой точки x_0, принадлежащей границе ядра $K(p)$, существует полупространство, заданное неравенством $c^{*\mathrm{T}} x \leqslant b_p(c^*)$, для которого точка x_0 является граничной. Тогда в силу непрерывности функции квантили $b_p(c)$ и леммы 2 для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $N = N(\varepsilon)$ такие, что для любого вектора $c^* : \|c^*\| = 1$ существует вектор c', порожденный алгоритмом из [29] и такой, что $\|c^* - c'\| < \varepsilon$ и $|b_p(c^*) - b_p(c')| < \delta$ начиная с номера N.

Расстояние от x_0 до гиперплоскости $\{x : c'^{\mathrm{T}} x = b_p(c')\}$ равно $b_p(c') - c'^{\mathrm{T}} x_0$. Из неравенств $\|c^* - c'\| < \varepsilon$ и $|b_p(c^*) - b_p(c')| < \delta$ вытекает, что это расстояние стремится к нулю при $N \to \infty$.

Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Для доказательства необходимо определить дилатацию множества $K_N(p)$ радиуса δ:

$$K^{\delta}(p_i) = \bigcup_{x \in K(p_i)} B_{\delta}(x), \quad \text{где} \quad B_{\delta}(x) = \{y : \|y - x\| \leqslant \delta\}. \tag{П.2}$$

Обозначим $g_i(u, \xi) = \alpha_i^{\mathrm{T}} u + \beta_i^{\mathrm{T}} \xi + u^{\mathrm{T}} \Theta_i \xi + \gamma_i$. Поскольку, как отмечалось выше, ограничение (13) равносильно неравенству

$$[g_i(u, \xi)]_{p_i} \leqslant 0, \tag{П.3}$$

то с учетом условия регулярности p_i-ядра $K(p_i)$ и (9) неравенство (П.3) может быть представлено в эквивалентной форме

$$\max_{x \in K(p_i)} g_i(u, x) \leqslant 0. \tag{П.4}$$

Поскольку функции $b_{p_i}(c)$ непрерывны по условию теоремы, то, используя лемму 5, заключаем, что $K_N(p_i) \xrightarrow[N \to \infty]{} K(p_i)$ в метрике Хаусдорфа и $\forall \delta > 0$ $\exists N_0 : \forall N \geqslant N_0$ $K(p_i) \subseteq K_N(p_i) \subset K^{\delta}(p_i)$ $\forall i = \overline{1, k}$. При этом $K^{\delta}(p_i) \xrightarrow[\delta \to 0]{} K(p_i)$ в метрике Хаусдорфа. Обозначим $U_i(\delta) = \{u \in U : h_i(u, \delta) \leqslant 0\}$, где $h_i(u, \delta) = \max_{x \in K^{\delta}(p_i)} g_i(u, x)$. Отметим, что множество $U_i(\delta)$ имеет вспомогательный характер и введено оно для применения результата из [34]. Так как функция $h_i(u,\delta)$ непрерывна по $u \in U$ и по δ в точке $\delta = 0$ согласно [34, лемма 1.1 (II)], то для завершения доказательства теоремы достаточно показать [34, лемма 1.1 (II)], что многозначное отображение $U_i(\delta)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа по δ в точке $\delta = 0$. Для этого достаточно проверить, что функция $h_i(u,\delta)$ строго монотонна по δ. Для этого покажем, что функция $g_i(u,x)$ достигает по x на множестве $K^\delta(p_i)\backslash K(p_i)$ значения, которое превышает величину $\max_{x\in K(p_i)} g_i(u,x)$, при фиксированном u. Градиент функции $g_i(u,x)$ по x не зависит от x и равен

$$\nabla_x \left(g_i(u,x)\right) = \beta_i + \Theta_i u.$$

По условию теоремы градиент отличен от нуля, что и обеспечивает выполнение доказываемого условия. Таким образом, решение задачи линейного программирования (11), (12) и (14) сходится по значению критерия к решению задачи (11), (12) и (13).

Теорема 6 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kibzun A., Kan Yu.* Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions. Wiley: Chichester, 1996.
2. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
3. *Charnes A., Cooper W.W.* Chance-constrained Programming // Manag. Sci. 1959. No. 6. P. 73–79.
4. *Miller B.L., Wagner H.M.* Chance Constrained Programming with Joint Constraints // Oper. Res. 1965. No. 13. P. 930–945.
5. *Lejeune M.A.* Pattern-based Modeling and Solution of Probabilistically Constrained Optimization Problems // Oper. Res. 2012. No. 60. P. 1356–1372.
6. *Lejeune M.A.* Pattern Definition of the p-Efficiency Concept // Ann. Oper. Res. 2012. No. 200 P. 23–36.
7. *Kogan A., Lejeune M.A.* Threshold Boolean Form for Joint Probabilistic Constraints with Random Technology Matrix // Math. Program. 2014. No. 147. P. 391–427.
8. *Henrion R.* Structural Properties of Linear Probabilistic Constraints // Optimization. 2007. V. 56. No. 4. P. 425–440.
9. *Prékopa A.* Stochastic Programming. Dordrecht: Kluwer, 1995.
10. *Genz A., Bretz F.* Computation of Multivariate Normal and t-Probabilities. Heidelberg: Springer, 2009.
11. *Barrera J., Homem-de-Mello T., Moreno E., Pagnoncelli B.K., Canessa G.* Chance-Constrained Problems and Rare Events: an Importance Sampling Approach // Math. Program. Ser. B. 2016. No. 157. P. 153–189.
12. *Guigues V., Juditsky A., Nemirovski A.* Non-asymptotic Confidence Bounds for the Optimal Value of a Stochastic Program // Optim. Methods Softw. 2017. V. 32. No. 5. P. 1033–1058.
13. *Kleywegt A.J., Shapiro A., Mello-de-Homem T.* The Sample Average Approximation Method for Stochastic Discrete Optimization // SIAM J. Optim. 2002. No. 12. P. 479–502.

14. *Linderoth J., Shapiro A., Wright S.* The Empirical Behavior of Sampling Methods for Stochastic Programming // Ann. Oper. Res. 2006. No. 142. P. 215–241.

15. *Mak W.-K., Morton D.P., Wood R.K.* Monte Carlo Bounding Techniques for Determining Solution Quality in Stochastic Programs // Oper. Res. Lett. 1999. No. 24. P. 47–56.

16. *Shapiro A.* Monte Carlo sampling methods / Handbooks in Operations Research and Management Science. Ruszczyński A., Shapiro A., eds. V. 10. Elsevier, 2003. P. 353–425.

17. *Shapiro A., Nemirovski A.* On Complexity of Stochastic Programming Problems / Continuous Optimization: Current Trends and Applications. Jeyakumar V., Rubinov A. Eds. Springer, 2005. P. 111–146.

18. *Verweij B., Ahmed S., Kleywegt A.J., Nemhauser G., Shapiro A.* The Sample Average Approximation Method Applied to Stochastic Routing Problems: A computational study // Comput. Optim. Appl. 2003. No. 24. P. 289–333.

19. *Bottou L.* Large-Scale Machine Learning with Stochastic Gradient Descent // Proc. COMPSTAT'2010. Springer, 2010. P. 177–186.

20. *Nemirovski A., Juditsky A., Lan G., Shapiro A.* Robust Stochastic Approximation Approach to Stochastic Programming // SIAM J. Optim. 2009. No. 19. P. 1574–1609.

21. *Beraldi P., Ruszczyński A.* A Branch and Bound Method for Stochastic Integer Problems Under Probabilistic Constraints // Optim. Methods Softw. 2002. V. 17. No. 3. P. 359–382.

22. *Prékopa A., Vizvári D., Badics T.* Programming Under Probabilistic Constraint with Discrete Random Variable / Giannesi F. (Ed.) New Trends in Mathematical Programming. P. 235–255. Netherlands: Kluwer Acad. Publishers, 1998.

23. *Dentcheva D., Prékopa A., Ruszczyński A.* Concavity and Efficient Points of Discrete Distributions in Probabilistic Programming // Math. Program. 2000. No. 89. P. 55–77.

24. *Иванов С.В., Кибзун А.И.* О сходимости выборочных аппроксимаций задач стохастического программирования с вероятностными критериями // АиТ. 2018. № 2. С. 19–35.

   Ivanov S.V., Kibzun A.I. On the Convergence of Sample Approximations for Stochastic Programming Problems with Probabilistic Criteria // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 2. P. 216–228.

25. *Иванов С.В., Наумов А.В.* Алгоритм оптимизации квантильного критерия для полиэдральной функции потерь и дискретного распределения случайных параметров // АиТ. 2012. № 1. С. 116–129.

   Ivanov S.V., Naumov A.V. Algorithm to Optimize the Quantile Criterion for the Polyhedral Function and Discrete Distribution for Random Parameters // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 1. P. 105–117.

26. *Кибзун А.И., Наумов А.В., Норкин В.И.* О сведении задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением к задаче смешанного целочисленного программирования // АиТ. 2013. № 6. С. 66–86.

   Kibzun A.I., Naumov A.V., Norkin V.I. On Reducing a Quantile Optimization Problem with Discrete Distribution to a Mixed Integer Programming Problem // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 6. P. 951–967.

27. *Норкин В.И., Кибзун А.И., Наумов А.В.* Сведение задачи двухэтапной вероятностной оптимизации с дискретным распределением случайных данных к задачам частично целочисленного программирования // Кибернетика и системный анализ. 2014. Т. 50. № 5. С. 34–48.

28. *Наумов А.В., Иванов С.В.* Исследование задачи стохастического программирования с квантильным критерием // АиТ. 2011. № 2. С. 142–158.

Naumov A.V., Ivanov S.V. On Stochastic Linear Programming Problems with the Quantile Criterion // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 2. P. 353–369.

29. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Метод решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь // АиТ. 2015. № 9. С. 83–101.

Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. A Method for Solving Quantile Optimization Problems with a Bilinear Loss Function // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 9. P. 1582–1597.

30. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Метод линеаризации для решения задачи квантильной оптимизации с функцией потерь, зависящей от вектора малых случайных параметров // АиТ. 2017. № 7. С. 95–109.

Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. Linearization Method for Solving Quantile Optimization Problems with Loss Function Depending on a Vector of Small Random Parameters // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 7. P. 1251–1263.

31. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Алгоритм визуализации плоского ядра вероятностной меры // Информатика и ее применения. 2018. № 12. Вып. 2. С. 60–68.

32. *Guigues V., Henrion R.* Joint Dynamic Probabilistic Constraints with Projected Linear Decision Rules // Optim. Methods Softw. 2017. V. 32. No. 5. P. 1006–1032.

33. *Rosenblatt-Roth M.* Quantiles and Medians // Ann. Math. Stat. 1965. No. 36. P. 921–925.

34. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 14.05.2018
После доработки 05.03.2019
Принята к публикации 25.04.2019