

© 2019 г. С.В. КРАВЧУК (qkr@ukr.net)
(Черкасский национальный университет им. Б. Хмельницкого),
В.И. СЛЫНЬКО, д-р физ.-мат. наук (vitstab@ukr.net)
(Вюрцбургский университет, Институт математики)

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ¹

Предложен новый метод исследования робастной устойчивости линейных периодических систем, в основу которого положены идеи коммутаторного исчисления в сочетании с прямым методом Ляпунова. Исследование устойчивости линейной неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений сведено к исследованию устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, для которой применяется прямой метод Ляпунова. Получены новые достаточные условия робастной устойчивости линейной периодической системы при действии неперiodических возмущений. Приведены примеры исследования робастной устойчивости линейных систем.

Ключевые слова: робастная устойчивость, линейные периодические системы, прямой метод Ляпунова, коммутаторное исчисление, ряды Магнуса.

DOI: 10.1134/S000523101912002X

1. Введение

Важнейшей задачей теории устойчивости движения является вопрос о сохранении устойчивости решений при действии малых возмущений. Общий метод исследования влияния возмущений на устойчивость решений дифференциальных уравнений основан на применении второго метода Ляпунова. В случае когда известна функция Ляпунова для невозмущенной системы, применяя теоремы прямого метода Ляпунова, можно получить оценки малых возмущений, при которых устойчивость системы сохраняется.

Для линейных систем дифференциальных уравнений эта задача получила достаточно простое решение на основе метода интегральных неравенств [1–3] при условии, что известны оценки фундаментальной матрицы невозмущенной системы. Такие оценки можно эффективно получить лишь для ограниченного класса систем, например для систем с постоянными коэффициентами. В других случаях нахождение фундаментальной матрицы решений и получение оценок ее нормы представляет собой самостоятельную задачу. Однако в одном случае, когда матрица неавтономной системы удовлетворяет условию И.А. Лаппо-Данилевского, фундаментальная матрица получается в явном виде, что значительно упрощает получение необходимых

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки Украины (грант № 0116U004691). Часть работы выполнена за счет средств бюджетной программы НАН Украины по КПКВК 6541230 “Поддержка развития приоритетных направлений научных исследований”.

оценок. Обобщение условий И.А. Лаппо-Данилевского получено в 1954 г. В. Магнусом [4] путем континуального обобщения классической формулы Хаусдорфа—Бейкера—Кемпбелла—Дынкина [5–7]. Основной результат [4] состоит в представлении фундаментальной матрицы линейной неавтономной системы дифференциальных уравнений в виде экспоненциальной функции от формального ряда, члены которого являются лиевыми интегральными элементами, определяющиеся последовательными приближениями как решение некоторой задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения. Первый член этого ряда соответствует случаю И.А. Лаппо-Данилевского. В. Магнус установил условия, при которых этот ряд обрывается. Однако существенным препятствием при применении ряда Магнуса в теории устойчивости линейных систем является его формальный характер, поскольку этот ряд сходится не всегда [4, 8], а также нелинейность дифференциального уравнения для производящей функции этого ряда. С другой стороны, условия обрыва ряда Магнуса, также как и условия И.А. Лаппо-Данилевского, не являются робастными, т.е. могут нарушаться при сколь угодно малых возмущениях. Таким образом, подход к исследованию робастной устойчивости, в основу которого положены идеи коммутаторного исчисления и ряды Магнуса, требует некоторой модификации, которая является основным результатом настоящей статьи. Основная идея, развиваемая здесь, состоит в сведении исходной неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к исследованию некоторой эквивалентной (в смысле устойчивости) системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Например, для периодической линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений соответствующая система дифференциальных уравнений будет периодической системой с постоянными параметрами. Исследование устойчивости линейной импульсной системы проводится на основе прямого метода Ляпунова — достаточно разработанного для этого класса систем во многих публикациях, среди которых отметим лишь [9–14]. Предложенный подход позволяет получить новые условия устойчивости линейных периодических систем при действии непериодических возмущений. Проверка этих условий сводится к решению некоторой системы матричных уравнений и неравенств и дополнительным условиям. Полученные условия наиболее эффективны для линейных систем, близких к системам, удовлетворяющим условию И.А. Лаппо-Данилевского.

Обозначения. Пусть $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел, $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, $\mathbb{R}^N$ — N -мерное евклидово пространство со скалярным произведением $(x, y) = x^T y$, $\mathbb{R}^{N \times N}$ — банахова алгебра квадратных матриц порядка N со спектральной нормой $\|A\| = \lambda_{\max}^{1/2}(A^T A)$, $\sigma(A)$ — спектр матрицы $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $r_\sigma(A)$ — спектральный радиус матрицы A , $\lambda_{\min}(P)$ и $\lambda_{\max}(P)$ — минимальное и максимальное собственные значения симметричной матрицы $P \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Для двух симметричных матриц $P \in \mathbb{R}^{N \times N}$ и $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$ вводится отношение частичного порядка $P \succeq Q$, если и только если матрица $P - Q$ является положительно полуопределенной, и $P \succ Q$, если и только если матрица $P - Q$ является положительно определенной. Если $R \in \mathbb{R}^{N \times N}$ — симметричная матрица, $P -$

симметричная положительно определенная матрица, то

$$\Lambda(R, P) = \begin{cases} \frac{\lambda_{\min}(R)}{\lambda_{\max}(P)}, & \lambda_{\min}(R) \geq 0, \\ \frac{\lambda_{\min}(R)}{\lambda_{\min}(P)}, & \lambda_{\min}(R) < 0. \end{cases}$$

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \dot{x}(t) = (A(t) + \delta A(t))x(t),$$

где $x \in \mathbb{R}^N$, $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ — кусочно-непрерывное θ -периодическое отображение, т.е. при всех $t \in \mathbb{R}$ $A(t + \theta) = A(t)$, $\delta A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ — кусочно-непрерывное, а в общем случае — непериодическое отображение. Предположим, что при $\delta A(t) = 0$ линейная периодическая система (1) — асимптотически устойчива. Рассмотрим задачу об ограничениях на операторную функцию $\delta A(t)$, при которых асимптотическая устойчивость возмущенной системы (1) сохраняется. При этом для решения задачи применим прямой метод Ляпунова в сочетании с идеями и методами коммутаторного исчисления.

3. Вспомогательные результаты

Приведем некоторые основные алгебраические понятия, которые будут использованы далее, следуя [4, 6].

Опишем конструкцию свободной ассоциативной алгебры $\mathfrak{A}$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ с двумя генераторами x, y . Словом над алфавитом $\{x, y\}$ называется конечная последовательность символов из алфавита, при этом для последовательности $\underbrace{z \dots z}_n$, где z — генератор, принимается со-

кращенная запись z^n , $n \in \mathbb{N}$, $z^0 = 1$, 1 — единица алгебры $\mathfrak{A}$. Базис алгебры $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$ состоит из всех слов над алфавитом $\{x, y\}$. Пустое слово отождествляется с элементом $1 \in \mathbb{R}$, поэтому $\mathbb{R} \subset \mathfrak{A}_0$ и поле $\mathbb{R}$ является центром алгебры $\mathfrak{A}_0$. Следовательно, $\mathfrak{A}_0$ состоит из всевозможных линейных комбинаций слов с коэффициентами из $\mathbb{R}$. Свободная ассоциативная алгебра $\mathfrak{A}$ определяется как пополнение алгебры $\mathfrak{A}_0$ в некоторой специальной топологии и состоит из всех формальных бесконечных рядов с коэффициентами из поля $\mathbb{R}$. Коммутатор двух элементов $a \in \mathfrak{A}$ и $b \in \mathfrak{A}$ определяется формулой

$$[a, b] = ab - ba$$

и вводит в $\mathfrak{A}$ структуру алгебры Ли. Оператор коммутирования ad_a , $a \in \mathfrak{A}$, определяется как линейное отображение

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}, \quad y \mapsto \text{ad}_a(y) = [a, y], \quad y \in \mathfrak{A}.$$

Пусть $f(x, y) \in \mathfrak{A}$, $z \in \mathfrak{A}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда поляризационное тождество

$$f(x + \lambda z, y) = f(x, y) + \lambda f_1(x, y, z) + \lambda^2 f_2(x, y, z) + \dots$$

определяет производную Хаусдорфа $(z \frac{\partial}{\partial x})f(x, y) \stackrel{df}{=} f_1(x, y, z)$.

Определим рекурсивно следующие лиевы элементы алгебры $\mathfrak{A}$ (определение и более подробные сведения о лиевых элементах можно найти в [6]):

$$\{y, x^0\} = y, \quad \{y, x^{l+1}\} = [\{y, x^l\}, x], \quad l \in \mathbb{Z}_+.$$

Легко видеть, что

$$\text{ad}_x^l(y) = (-1)^l \{y, x^l\}.$$

Пусть $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ — ряд от генератора x , тогда по определению полагают

$$\{y, p(x)\} \stackrel{df}{=} \sum_{k=0}^{\infty} p_k \{y, x^k\}.$$

Отметим также, что если $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ и $q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$, то

$$(2) \quad \{y, p(x)q(x)\} = \{\{y, p(x)\}, q(x)\}.$$

Аналогично для произвольной конечной последовательности $x_1, \dots, x_n$ элементов из $\mathfrak{A}$ определим рекурсивно элемент $\{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$:

$$\{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} = [\{x_1, \dots, x_{n-1}\}, x_n].$$

Элемент e^x определяется посредством формулы

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

При этом

$$(3) \quad e^{-x} y e^x = \{y, e^x\}$$

и справедливы тождества Ф. Хаусдорфа:

$$(4) \quad e^{-x} \left(\left(y \frac{\partial}{\partial x} \right) e^x \right) = \left\{ y, \frac{e^x - 1}{x} \right\}, \quad \left(\left(y \frac{\partial}{\partial x} \right) e^x \right) e^{-x} = \left\{ y, \frac{1 - e^{-x}}{x} \right\}.$$

Отметим, что тождества (2)–(4) имеют формальный характер.

Пусть далее X — банахова алгебра над полем $\mathbb{R}$, тогда (2) выполняется в общей части области сходимости рядов $p(x)$ и $q(x)$, а (3) и (4) при всех $x \in X$, $y \in X$.

Далее установим ряд вспомогательных утверждений, необходимых для дальнейшего изложения.

Лемма 1. Пусть $x, y, \delta x, \delta y \in X$, тогда справедлива оценка

$$(5) \quad \left\| \left\{ x + \delta x, (y + \delta y)^k \right\} - \left\{ x, y^k \right\} \right\| \leq \zeta^k \|\delta x\| + \|\delta y\| \sum_{m=0}^{k-1} \zeta^{k-m-1} \|\text{ad}_{\{x, y^m\}}\|,$$

где $\zeta = \|\text{ad}_y\| + 2\|\delta y\|$.

Доказательства лемм и последующих теорем приведены в Приложении 1.

Пусть $a : \mathbb{R} \rightarrow X$ — кусочно-непрерывное отображение. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{\omega}(t) = a(t)\omega(t), \quad \omega(s) = 1, \quad t \geq s,$$

где $\omega \in X$, 1 — единица алгебры X .

Обозначим

$$\hat{a}(t) = \int_s^t a(\tau) d\tau, \quad f(t) = \omega(t)e^{-\hat{a}(t)} - 1.$$

Тогда, используя тождества (3) и (4) приходим к выводу, что функция $f(t)$ является решением задачи Коши

$$\dot{f}(t) = [a(t), f(t)] + f(t)\Psi(t) + \Psi(t), \quad f(s) = 0,$$

где

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \{a(t), \hat{a}^k(t)\}.$$

Пусть $\Psi(t) + \delta\Psi(t)$ и $f(t) + \delta f(t)$ — обозначают функции, соответствующие функциям $\Psi(t)$ и $f(t)$ при замене $a(t) \rightarrow a(t) + \delta a(t)$. Тогда из утверждения леммы 1 следует, что для функции $\delta\Psi(t)$ выполняется оценка

$$\|\delta\Psi(t)\| \leq \eta(t),$$

где

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \left(\zeta^k(t) \|\delta a(t)\| + \|\delta \hat{a}(t)\| \sum_{m=0}^{k-1} \zeta^{k-m-1}(t) \|\text{ad}_{\{a(t), \hat{a}^m(t)\}}\| \right),$$

$$\zeta(t) = \|\text{ad}_{\hat{a}(t)}\| + 2\|\delta \hat{a}(t)\|, \quad \delta \hat{a}(t) = \int_s^t \delta a(s) ds.$$

Лемма 2. Для функции $\delta f(t)$ при всех $T > 0$ справедлива оценка

$$\|\delta f(s+T)\| \leq \int_s^{s+T} \left(\|\text{ad}_{f(s)}\| \|\delta a(s)\| + (1 + \|f(s)\|) \eta(s) \right) ds \times$$

$$\times \exp \left(\int_s^{s+T} \left(\|\text{ad}_{a(s)}\| + 2\|\delta a(s)\| + \|\Psi(s)\| + \eta(s) \right) ds \right).$$

Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$(6) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ — кусочно-непрерывное отображение, для которого выполняется условие

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \int_{n\theta}^{(n+1)\theta} \|A(s)\| ds < +\infty$$

для некоторого положительного θ .

Обозначим через Ω_s^t матрицант системы (6), обозначим $\hat{A}(t, s) = \int_s^t A(\tau) d\tau$ и определим функцию

$$F(t, s) = \Omega_s^t e^{-\hat{A}(t, s)} - I,$$

где I — единичная матрица.

Тогда функция $F(t, s)$ является решением задачи Коши

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} F(t, s) &= \text{ad}_{A(t)} F(t, s) + F(t, s) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \{A(t), \hat{A}^k(t, s)\} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \{A(t), \hat{A}^k(t, s)\}, \quad F(s, s) = 0. \end{aligned}$$

Наряду с линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (6) рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием:

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{1}{\theta} \hat{A}((n+1)\theta, n\theta) y(t), \quad t \in (n\theta, (n+1)\theta), \\ \Delta y(t) &= F((n+1)\theta, n\theta) y(t), \quad t = (n+1)\theta, \end{aligned}$$

где $y \in \mathbb{R}^N$, $\Delta y(t) = y(t+0) - y(t)$, $\theta > 0$. При этом, как обычно [13], предполагают, что решение задачи Коши $y(t, t_0, y_0)$ является непрерывной слева по t функцией, т.е. $y(t-0, t_0, y_0) = y(t, t_0, y_0)$ при всех $t \geq t_0$.

Следующее утверждение позволяет свести задачу об устойчивости линейной неавтономной системы дифференциальных уравнений (6) к исследованию линейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (8).

Теорема 1. Устойчивость (асимптотическая устойчивость, неустойчивость) линейной неавтономной системы дифференциальных уравнений (6) эквивалентна устойчивости (асимптотической устойчивости, неустойчивости) линейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (8).

4. Основной результат

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений (1). Пусть $F(t)$ — решение задачи Коши

$$(9) \quad \dot{F}(t) = \text{ad}_{A(t)} F(t) + F(t)\Psi(t) + \Psi(t), \quad F(0) = 0,$$

где введены обозначения:

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \{A(t), \hat{A}^k(t)\},$$

$$\hat{A}(t) = \int_0^t A(s) ds, \quad A_0 = \frac{1}{\theta} \hat{A}(\theta), \quad B_0 = F(\theta).$$

Относительно матрицы возмущений $\delta A(t)$ сделаем следующее предположение: существуют положительные постоянные α_n и β_n , $n \in \mathbb{Z}_+$, такие что

$$\sup_{t \in [n\theta, (n+1)\theta]} \|\delta A(t)\| \leq \alpha_n, \quad \int_{n\theta}^{(n+1)\theta} \|\delta A(t)\| dt \leq \beta_n, \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \beta_n < +\infty.$$

Введем обозначения:

$$\eta_n(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \left(\zeta_n^k(s) \alpha_n + \beta_n \sum_{m=0}^{k-1} \zeta_n^{k-m-1}(s) \left\| \text{ad}_{\{A(s), \hat{A}^m(s)\}} \right\| \right),$$

$$\zeta_n(s) = \left\| \text{ad}_{\hat{A}(s)} \right\| + 2\beta_n,$$

$$\chi_n = \int_{n\theta}^{(n+1)\theta} \left(\left\| \text{ad}_{F(s)} \right\| \alpha_n + (1 + \|F(s)\|) \eta_n(s) \right) ds \times$$

$$\times \exp \left(\int_{n\theta}^{(n+1)\theta} \left(\left\| \text{ad}_{A(s)} \right\| + 2\alpha_n + \|\Psi(s)\| + \eta_n(s) \right) ds \right).$$

Вследствие утверждения теоремы 1 асимптотическая устойчивость линейной возмущенной системы (1) эквивалентна асимптотической устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$(10) \quad \dot{y}(t) = \left(A_0 + \int_{n\theta}^{(n+1)\theta} \delta A(s) ds \right) y(t), \quad t \in (n\theta, (n+1)\theta),$$

$$\Delta y(t) = (B_0 + \delta F_n) y(t), \quad t = (n+1)\theta.$$

где $y \in \mathbb{R}^N$, а для матрицы δF_n вследствие утверждения леммы 2 справедлива оценка $\|\delta F_n\| \leq \chi_n$.

Для исследования устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (10) можно применять различные методы [10, 13, 14]. Здесь рассмотрим применение различных вариантов прямого метода Ляпунова.

Предположим, что для матрицы A_0 выполняется условие $\max_{\lambda \in \sigma(A_0)} \operatorname{Re} \lambda < 0$.

Тогда по теореме Ляпунова для любой симметричной положительно определенной матрицы Q матричное уравнение Ляпунова

$$(11) \quad A_0^T P + P A_0 = -Q$$

имеет решение P , которое является симметричной положительно определенной матрицей.

Теорема 2. Предположим, что для матрицы A_0 выполняется условие $\max_{\lambda \in \sigma(A_0)} \operatorname{Re} \lambda < 0$, существуют симметричная положительно определенная матрица Q и положительная постоянная $\delta > 0$ такие, что при всех $n \in \mathbb{Z}_+$ для решения P матричного уравнения Ляпунова (11) выполняются неравенства:

$$\beta_n < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\|P\|},$$

$$\ln \left(1 - \Lambda(R, P) + \frac{\|P\|\chi_n(2\|I + B_0\| + \chi_n)}{\lambda_{\min}(P)} \right) - \frac{\lambda_{\min}(Q) - 2\beta_n\|P\|}{\lambda_{\max}(P)}\theta < -\delta.$$

Тогда линейная система дифференциальных уравнений (1) асимптотически устойчива.

Теорема 3. Предположим, что для матрицы A_0 выполняется условие $\max_{\lambda \in \sigma(A_0)} \operatorname{Re} \lambda < 0$, существуют симметричная положительно определенная матрица Q и средние значения:

$$\bar{\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k}{n}, \quad \bar{\chi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \chi_k}{n}, \quad \bar{\chi}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \chi_k^2}{n},$$

такие что для решения P матричного уравнения Ляпунова (11) выполняется неравенство

$$\ln(1 - \Lambda(R, P)) + \frac{\|P\|(2\bar{\chi}\|I + B_0\| + \bar{\chi}^2)}{\lambda_{\min}(P)(1 - \Lambda(R, P))} - \frac{\lambda_{\min}(Q) - 2\bar{\beta}\|P\|}{\lambda_{\max}(P)}\theta < 0.$$

Тогда линейная система дифференциальных уравнений (1) асимптотически устойчива.

Рассмотрим далее более общий случай, когда введенные выше ограничения на спектр матрицы A_0 не обязательны. Используя идеи публикации [14],

установим достаточные условия асимптотической устойчивости линейной системы (1).

Определим операторы Ляпунова:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{A_0} : \mathbb{R}^{N \times N} &\rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}, \quad X \mapsto \mathfrak{L}_{A_0} X = A_0^T X + X A_0, \\ \mathfrak{R}_{B_0} : \mathbb{R}^{N \times N} &\rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}, \quad X \mapsto \mathfrak{R}_{B_0} X = B_0^T X + X B_0 + B_0^T X B_0.\end{aligned}$$

Пусть $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 1$, $\mathfrak{I}$ — тождественный оператор в пространстве $\mathbb{R}^{N \times N}$.

Теорема 4. Предположим, что существует симметричная положительно определенная матрица P и положительные числа ϵ_n , такие что при всех $n \in \mathbb{Z}_+$ выполняются матричные неравенства

$$\begin{aligned}& \mathfrak{L}_{A_0}^{p+1} P + \|P\|((\|\mathfrak{L}_{A_0}\| + 2\beta_n)^{p+1} - \|\mathfrak{L}_{A_0}\|^{p+1})I \preceq 0, \\ & \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} \theta^k (\mathfrak{I} + \mathfrak{R}_{B_0}) \mathfrak{L}_{A_0}^k P + \mathfrak{R}_{B_0} P + \left(2\chi_n \|I + B_0\| + \chi_n^2 + \right. \\ & + \sum_{k=1}^p \frac{\theta^k}{k!} \left((2\chi_n \|I + B_0\| + \chi_n^2) \|\mathfrak{L}_{A_0}\|^k + \|\mathfrak{I} + \mathfrak{R}_{B_0}\|((\|\mathfrak{L}_{A_0}\| + 2\beta_n)^k - \|\mathfrak{L}_{A_0}\|^k) + \right. \\ & \left. \left. + (2\chi_n \|I + B_0\| + \chi_n^2)(\|\mathfrak{L}_{A_0}\| + 2\beta_n)^k - \|\mathfrak{L}_{A_0}\|^k) \right) \|P\| \preceq -\epsilon_n I\end{aligned}$$

и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n$ расходится.

Тогда линейная система дифференциальных уравнений (1) асимптотически устойчива.

Приведем следствие сформулированной теоремы 4 в простейшем случае $p = 1$.

Следствие 1. Предположим, что существует симметричная положительно определенная матрица P и положительные числа ϵ_n , такие что при всех $n \in \mathbb{Z}_+$ выполняются матричные неравенства

$$\begin{aligned}& (A_0^T)^2 P + 2A_0^T P A_0 + P A_0^2 + \|P\|((\gamma + 2\beta_n)^2 - \gamma^2)I \preceq 0, \\ & A_0^T P + P A_0 + B_0^T A_0^T P + P A_0 B_0 + B_0^T P A_0 + A_0^T P B_0 + B_0^T A_0^T P B_0 + \\ & + B_0^T P A_0 B_0 + \frac{1}{\theta} \left(B_0^T P + P B_0 + B_0^T P B_0 + \right. \\ & \left. + ((2\chi_n \|I + B_0\| + \chi_n^2)(1 + \theta\gamma + 2\beta_n\theta) + 2\theta\delta\beta_n) \|P\| \right) \preceq -\epsilon_n I,\end{aligned}$$

где $\gamma = \|A_0^T \otimes I + I \otimes A_0^T\|$, $\delta = \|B_0^T \otimes I + I \otimes B_0^T + B_0^T \otimes B_0^T\|$ ($\otimes$ — тензорное произведение соответствующих матриц), и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n$ расходится.

Тогда линейная система дифференциальных уравнений (1) асимптотически устойчива.

Теорема 5. Предположим, что существует симметричная положительно определенная матрица P и положительные числа ϵ_n , такие что

при всех $n \in \mathbb{Z}_+$ выполняются матричные неравенства

$$\begin{aligned} & (-1)^{p+1} \mathfrak{L}_{A_0}^{p+1} P - \|P\| \left((\|\mathfrak{L}_{A_0}\| + 2\beta_n)^{p+1} - \|\mathfrak{L}_{A_0}\|^{p+1} \right) I \succeq 0, \\ & \mathfrak{R}_{B_0} P + \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \frac{\theta^k}{k!} \mathfrak{L}_{A_0}^k P + \\ & + \left(\sum_{k=1}^p \frac{\theta^k}{k!} ((\|\mathfrak{L}_{A_0}\| + 2\beta_n)^k - \|\mathfrak{L}_{A_0}\|^k) + 2\chi_n \|I + B_0\| + \chi_n^2 \right) \|P\| I \preceq -\epsilon_n I \end{aligned}$$

и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{\|I+B_0\|+\chi_n}$ расходится.

Тогда линейная система дифференциальных уравнений (1) асимптотически устойчива.

Следствие 2. Предположим, что существует симметричная положительно определенная матрица P и положительные числа ϵ_n , такие что при всех $n \in \mathbb{Z}_+$ выполняются матричные неравенства

$$\begin{aligned} & (A_0^T)^2 P + 2A_0^T P A_0 + P A_0^2 - \|P\| \left((\gamma + 2\beta_n)^2 - \gamma^2 \right) I \succeq 0, \\ & B_0^T P + P B_0 + B_0^T P B_0 + \theta(A_0^T P + P A_0) + \\ & + \left(2\beta_n \theta + 2\chi_n \|I + B_0\| + \chi_n^2 \right) \|P\| I \preceq -\epsilon_n I, \end{aligned}$$

где $\gamma = \|A_0^T \otimes I + I \otimes A_0^T\|$, и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{\|I+B_0\|+\chi_n}$ расходится.

Тогда линейная система дифференциальных уравнений (1) асимптотически устойчива.

Пример. Рассмотрим линейную неавтономную систему вида

$$(12) \quad \dot{x}(t) = (P(t) + \delta P(t))x(t).$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^N$, $P(t) = P_0 + P_1 \cos \omega t + P_2 \sin \omega t$, $P_i \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $i = 0, 1, 2$, $\omega = \frac{2\pi}{\theta}$. Предположим, что матрица P_0 удовлетворяет условиям Рауса—Гурвица.

Нетрудно получить оценки:

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, \theta]} \|\text{ad}_{P(t)}\| \leq a, \quad \max_{t \in [0, \theta]} \|\text{ad}_{\hat{P}(t)}\| \leq \theta b, \\ & \max_{t \in [0, \theta]} \|\{P(t), \hat{P}^k(t)\}\| \leq \theta^k c_k, \quad \max_{t \in [0, \theta]} \|\text{ad}_{\{P(t), \hat{P}^k(t)\}}\| \leq \theta^k d_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2(\|\text{ad}_{P_0}\|^2 + \|\text{ad}_{P_1}\|^2 + \|\text{ad}_{P_2}\|^2)}, \quad b = \sqrt{\|\text{ad}_{P_0}\|^2 + \|\text{ad}_{P_1}\|^2 + \|\text{ad}_{P_2}\|^2}, \\ c_k &= \sqrt{\sum_{i_0=0, \dots, i_k=0, i_0 < i_1}^2 \|\{P_{i_0}, \dots, P_{i_k}\}\|^2}, \quad d_k = \sqrt{\sum_{i_0=0, \dots, i_k=0, i_0 < i_1}^2 \|\text{ad}_{\{P_{i_0}, \dots, P_{i_k}\}}\|^2}. \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\alpha^* = \sup_{t \in [0, \infty)} \|\delta P(t)\|, \quad \beta^* = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \int_{n\theta}^{(n+1)\theta} \|\delta P(s)\| ds.$$

Тогда

$$\zeta_n(s) \leq \zeta^*, \quad \eta_n(s) \leq \eta^*,$$

где

$$\zeta^* = \theta b + 2\beta^*, \quad \eta^* = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \left((\zeta^*)^k \alpha^* + \beta^* \sum_{m=0}^{k-1} (\zeta^*)^{k-m-1} d_m \theta^m \right).$$

Аналогично получим оценку

$$\|\Psi(t)\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|\{P(t), \widehat{P}^k(t)\}\|}{(k+1)!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k \theta^k}{(k+1)!}.$$

Для решения задачи Коши (9) справедливо интегральное представление

$$F(t) = \int_0^t (\text{ad}_{P(s)} F(s) + F(s) \Psi(s)) ds + \int_0^t \Psi(s) ds.$$

Следовательно,

$$\|F(t)\| \leq \int_0^t (\|\text{ad}_{P(s)}\| + \|\Psi(s)\|) \|F(s)\| ds + \int_0^t \|\Psi(s)\| ds.$$

Применяя лемму Гронуолла—Беллмана об интегральном неравенстве, получим

$$\|F(t)\| \leq \int_0^t \|\Psi(s)\| ds \exp \left(\int_0^t \|\text{ad}_{P(s)}\| + \|\Psi(s)\| ds \right) \leq f^*,$$

где

$$f^* = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k \theta^{k+1}}{(k+1)!} \exp \left(a\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k \theta^{k+1}}{(k+1)!} \right).$$

Тогда с учетом оценки $\|\text{ad}_{F(s)}\| \leq 2\|F(s)\| \leq 2f^*$ получим $\chi_n \leq \chi^*$, где

$$\chi^* = \theta(2f^* \alpha^* + (1 + f^*) \eta^*) \exp \left(\theta a + 2\alpha^* \theta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k \theta^{k+1}}{(k+1)!} + \theta \eta^* \right).$$

Пусть Q — симметричная положительно определенная матрица, X — симметричная положительно определенная матрица, являющаяся решением матричного уравнения Ляпунова

$$(13) \quad P_0^T X + X P_0 = -Q.$$

Применяя утверждение теоремы 2, приходим к достаточным условиям асимптотической устойчивости линейной неавтономной системы дифференциальных уравнений (12).

Предложение 1. Предположим, что для матрицы P_0 выполняется условие $\max_{\lambda \in \sigma(P_0)} \operatorname{Re} \lambda < 0$ и существует положительно определенная симметричная матрица Q такая, что для решения X матричного уравнения Ляпунова (13) выполняются неравенства:

$$\beta^* < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\|X\|},$$

$$\ln \left(1 + \frac{\|X\|}{\lambda_{\min}(X)} (f^*(2 + f^*) + \chi^*(2(1 + f^*) + \chi^*)) \right) - \frac{\lambda_{\min}(Q) - 2\beta^*\|X\|}{\lambda_{\max}(X)} \theta < 0.$$

Тогда линейная неавтономная система дифференциальных уравнений (12) асимптотически устойчива.

Для интегрирования задачи Коши (9) воспользуемся методом последовательных приближений. Можно показать, что при всех $t \in [0, \theta]$

$$\left\| F(t) - \left(\frac{1}{2} \int_0^t \{P(s), \hat{P}(s)\} ds - \frac{1}{6} \int_0^t \{P(s), \hat{P}^2(s)\} ds + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \int_0^t \operatorname{ad}_{P(s)} \left(\int_0^s \{P(\tau), \hat{P}(\tau)\} d\tau \right) ds \right) \right\| \leq \vartheta,$$

где

$$\vartheta = \left(\frac{ac_2}{6} + \left(\frac{c_1}{2} + \frac{\theta c_2}{6} \right)^2 \right) \theta^4 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(a + 1 + \left(\frac{c_1}{2} + \frac{\theta c_2}{6} \right) \theta^2 \right) \frac{\theta^{k+2} c_{k+1}}{(k+2)!}.$$

Введем матрицу

$$B = \frac{1}{2} \int_0^{\theta} \{P(s), \hat{P}(s)\} ds - \frac{1}{6} \int_0^{\theta} \{P(s), \hat{P}^2(s)\} ds + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{\theta} \operatorname{ad}_{P(s)} \left(\int_0^s \{P(\tau), \hat{P}(\tau)\} d\tau \right) ds.$$

Тогда $\|B_0 - B\| \leq \vartheta$, а матрица B представляется в виде

$$B = \theta^2 B_2 + \theta^3 B_3.$$

Явные выражения для матриц B_2, B_3 приведены в Приложении 2.

Применяя утверждение теоремы 2 приходим к достаточным условиям асимптотической устойчивости линейной неавтономной системы дифференциальных уравнений (12).

Предложение 2. Предположим, что для матрицы P_0 выполняется условие $\max_{\lambda \in \sigma(P_0)} \operatorname{Re} \lambda < 0$ и существует положительно определенная симметричная матрица Q такая, что для решения X матричного уравнения Ляпунова (13) выполняются неравенства:

$$\beta^* < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\|X\|},$$

$$\ln \left(1 - \Lambda(R, X) + \frac{\|X\|(\chi^* + \vartheta)(2\|I + B\| + \chi^* + \vartheta)}{\lambda_{\min}(X)} \right) - \frac{\lambda_m(Q) - 2\beta^*\|X\|}{\lambda_{\max}(X)} \theta < 0,$$

где $R = -(B^T X + X B + B^T X B)$.

Тогда линейная система дифференциальных уравнений (12) асимптотически устойчива.

Рассмотрим теперь этот же пример в общем случае, когда условие Рауса—Гурвица для матрицы P_0 может не выполняться. Применение следствия 2 позволяет установить достаточные условия асимптотической устойчивости системы (12).

Следствие 3. Предположим, что существует симметричная положительно определенная матрица X и выполняются матричные неравенства:

$$(P_0^T)^2 X + 2P_0^T X P_0 + X P_0^2 - \|X\| ((\gamma + 2\beta^*)^2 - \gamma^2) I \succeq 0,$$

$$B^T X + X B + B^T X B + \theta(P_0^T X + X P_0) +$$

$$+ (2\beta^* \theta + 2(\chi + \vartheta)\|I + B\| + (\chi + \vartheta)^2) \|X\| I \prec 0,$$

где $\gamma = \|P_0^T \otimes I + I \otimes P_0^T\|$.

Тогда линейная система дифференциальных уравнений (12) асимптотически устойчива.

Рассмотрим численный пример. Пусть

$$(14) \quad P(t) = -\alpha I + \mu G_1 \cos \omega t + \mu G_2 \sin \omega t,$$

где $\alpha > 0, \mu > 0$, матрицы G_1 и G_2 имеют вид

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[G_0, G_2] = -2G_1, \quad [G_0, G_1] = 2G_2, \quad [G_1, G_2] = -2G_0,$$

где $G_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \text{ad}_{P(t)} &= \mu(\cos \omega t \text{ad}_{G_1} + \sin \omega t \text{ad}_{G_2}), \\ \hat{P}(t) &= -\alpha \chi_0(t)I + \mu \chi_1(t)G_1 + \mu \chi_2(t)G_2, \\ \text{ad}_{\hat{P}(t)} &= \mu \chi_1(t) \text{ad}_{G_1} + \mu \chi_2(t) \text{ad}_{G_2}, \end{aligned}$$

где $\chi_0(t) = t$, $\chi_1(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega}$, $\chi_2(t) = \frac{1 - \cos \omega t}{\omega}$.

Учитывая, что $\|G_0\| = \|G_1\| = \|G_2\| = 1$, $\|\text{ad}_{G_0}\| = \|\text{ad}_{G_1}\| = \|\text{ad}_{G_2}\| = 2$, и применяя неравенство Коши—Буняковского, получим оценки

$$\|\text{ad}_{P(t)}\| \leq 2\sqrt{2}\mu, \quad \|\text{ad}_{\hat{P}(t)}\| \leq \frac{2\sqrt{2}\mu}{\pi}\theta.$$

Нетрудно показать, что

$$\{P(t), \hat{P}^k(t)\} = \mu^{k+1}(f_{k0}(t)G_0 + f_{k1}(t)G_1 + f_{k2}(t)G_2),$$

где функции $f_{ki}(t)$, $i = 0, 1, 2$, определяются из рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} f_{k+1,0}(t) &= 2(f_{k2}(t)\chi_1(t) - f_{k1}(t)\chi_2(t)), \\ f_{k+1,1}(t) &= -2\chi_2(t)f_{k0}(t), \quad f_{k+1,2}(t) = 2\chi_1(t)f_{k0}(t). \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$f_{k+1,0}^2(t) \leq 4(f_{k1}^2(t) + f_{k2}^2(t))(\chi_1^2(t) + \chi_2^2(t)),$$

откуда следует, что

$$\sqrt{f_{k+1,0}^2(t) + f_{k+1,1}^2(t) + f_{k+1,2}^2(t)} \leq 2\sqrt{f_{k0}^2(t) + f_{k1}^2(t) + f_{k2}^2(t)} \sqrt{\chi_1^2(t) + \chi_2^2(t)}.$$

Поскольку $\sqrt{\chi_1^2(t) + \chi_2^2(t)} \leq \frac{4}{\omega} = \frac{2}{\pi}\theta$, $f_{11}(t) = f_{12}(t) = 0$, $|f_{10}(t)| \leq \frac{2}{\pi}\theta$, то

$$\sqrt{f_{k0}^2(t) + f_{k1}^2(t) + f_{k2}^2(t)} \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^k \theta^k.$$

Следовательно,

$$\|\{P(t), \hat{P}^k(t)\}\| \leq \sqrt{3}\mu^{k+1} \left(\frac{2}{\pi}\right)^k \theta^k, \quad \|\text{ad}_{\{P(t), \hat{P}^k(t)\}}\| \leq 2\sqrt{3}\mu^{k+1} \left(\frac{2}{\pi}\right)^k \theta^k.$$

Таким образом,

$$a = 2\sqrt{2}\mu, \quad b = \frac{2\sqrt{2}\mu}{\pi}, \quad c_k = \sqrt{3}\mu^{k+1} \left(\frac{2}{\pi}\right)^k, \quad d_k = 2c_k.$$

Предположим, что для возмущений $\delta P(t)$ существуют положительные постоянные α^* , β^* , такие что справедливы оценки

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|\delta P(t)\| \leq \alpha^*, \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \int_{n\theta}^{(n+1)\theta} \|\delta P(s)\| ds \leq \beta^*.$$

Тогда

$$\zeta^* = \frac{2\sqrt{2}\mu\theta}{\pi} + 2\beta^*,$$

$$\eta^* = \left(\alpha^* - \frac{2\sqrt{3}\beta^*\mu\pi}{2\mu\theta - \pi\zeta^*} \right) \frac{e^{\zeta^*} - 1 - \zeta^*}{\zeta^*} + \frac{\sqrt{3}\beta^*\pi^2}{\theta(2\mu\theta - \pi\zeta^*)} \left(e^{\frac{2\mu\theta}{\pi}} - 1 - \frac{2\mu\theta}{\pi} \right)$$

при условии, что $2\mu\theta \neq \pi\zeta^*$. Если $2\mu\theta = \pi\zeta^*$, то

$$\eta^* = \frac{\alpha^*}{\zeta^*} (e^{\zeta^*} - 1 - \zeta^*) + \frac{2\sqrt{3}\beta^*\mu}{(\zeta^*)^2} ((\zeta^* - 1)e^{\zeta^*} + 1),$$

$$f^* = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \left(e^{\frac{2\theta\mu}{\pi}} - 1 - \frac{2\theta\mu}{\pi} \right) \exp \left(2\sqrt{2}\mu\theta + \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \left(e^{\frac{2\theta\mu}{\pi}} - 1 - \frac{2\theta\mu}{\pi} \right) \right).$$

Аналогично находим

$$\chi^* = \theta(2f^*\alpha^* + (1 + f^*)\eta^*) \exp \left(2\sqrt{2}\mu\theta + 2\alpha^*\theta + \right. \\ \left. + \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \left(e^{\frac{2\theta\mu}{\pi}} - 1 - \frac{2\theta\mu}{\pi} \right) + \theta\eta^* \right).$$

Применим предложение 1 с функцией Ляпунова $v(x) = \frac{1}{2}x^T x$, т.е. $X = \frac{1}{2}I$. Тогда $Q = \alpha I$ и достаточные условия асимптотической устойчивости линейной системы (12) с матрицей (14) имеют вид

$$(15) \quad \beta^* < \alpha,$$

$$\ln \left(1 + f^*(2 + f^*) + \chi^*(2(1 + f^*) + \chi^*) \right) + 2\beta^*\theta < 2\alpha\theta.$$

Сравним полученные достаточные условия асимптотической устойчивости с условиями, основанными на непосредственном применении той же функции

Ляпунова $v(x) = \frac{1}{2}x^T x$ к исходной линейной неавтономной системе дифференциальных уравнений (12). Оценим полную производную функции Ляпунова вдоль решений системы (12):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t, x(t)) &= x^T(-\alpha I + \mu \cos \omega t G_1 + \mu \sin \omega t G_2 + \delta P(t))x \leq \\ &\leq (-\alpha + \mu + \alpha^*)\|x(t)\|^2. \end{aligned}$$

Вторая теорема Ляпунова приводит к следующим достаточным условиям асимптотической устойчивости линейной неавтономной системы (12) с матрицей (14):

$$(16) \quad \mu + \alpha^* < \alpha.$$

Например, для значений параметров $\mu = 1$, $\theta = 0,1$, $\alpha^* = 0,5$ и $\beta^* = 0,1$ непосредственные вычисления показывают, что $\zeta^* = 0,290031$, $\eta^* = 0,275316$, $f^* = 0,007515$, $\chi^* = 0,043188$. Условия асимптотической устойчивости (15) приводят к оценке $\alpha \geq 0,6$, гарантирующей асимптотическую устойчивость линейной системы (12). Условия асимптотической устойчивости (16) приводят к неравенству $\alpha > 1,5$. Таким образом, в этом численном примере предложенный подход приводит к менее консервативным условиям устойчивости, чем непосредственное применение прямого метода Ляпунова к исходной системе линейных дифференциальных уравнений.

5. Заключение

Теоремы 2–5 сводят задачу об устойчивости линейной неавтономной системы (1) к решению (или оценке решений) вспомогательной задачи Коши (9) на конечном интервале времени и проверке некоторых вспомогательных матричных неравенств. Основная сложность состоит в решении задачи Коши (9), поскольку матричное дифференциальное уравнение является неавтономным. Для решения этой задачи можно, так же как и для решения нелинейного дифференциального уравнения Магнуса, применить метод последовательных приближений. В некоторых случаях, например когда номинальная система близка к системе Лапша–Данилевского, можно применять более грубые методы — оценки нормы решения задачи Коши (9) на основе метода интегральных неравенств. Представляет интерес также рассмотрение других эффективных методов для решения этой вспомогательной задачи Коши, например метода замороженных коэффициентов [15] или асимптотических методов Н.М. Крылова—Н.Н. Боголюбова—Ю.А. Митропольского [16]. Полученные условия робастной устойчивости сводятся к проверке совместности некоторых матричных неравенств. Для разрешимости этих неравенств при достаточно малых непериодических возмущениях правых частей линейной системы дифференциальных уравнений необходимо и достаточно, чтобы была разрешима соответствующая система линейных матричных неравенств невозмущенной системы $\delta A(t) = 0$. Для линейных систем линейных матричных неравенств разработаны эффективные численно-аналитические методы решения.

Также в дальнейшем представляет интерес распространение предложенного метода исследования на некоторые классы линейных и нелинейных систем дифференциальных уравнений и уравнений в бесконечномерных пространствах.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство леммы 1. Обозначим

$$f_k = \{x, y^k\}, \quad \delta f_k = \{x + \delta x, (y + \delta y)^k\} - \{x, y^k\}.$$

Тогда

$$\delta f_{k+1} = [\delta f_k, y] + [f_k, \delta y] + [\delta f_k, \delta y],$$

и, переходя к оценке по норме, получим

$$\|\delta f_{k+1}\| \leq \|\text{ad}_y\| \|\delta f_k\| + \|\text{ad}_{f_k}\| \|\delta y\| + 2\|\delta f_k\| \|\delta y\| = \zeta \|\delta f_k\| + \|\text{ad}_{f_k}\| \|\delta y\|.$$

Следовательно, учитывая что, $\delta f_0 = \delta x$, получим необходимую оценку. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Нетрудно видеть, что функция $\delta f(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta f(t) &= [\delta a(t), f(t)] + [\delta a(t), \delta f(t)] + [a(t), \delta f(t)] + \delta f(t) \Psi(t) + \\ &+ f(t) \delta \Psi(t) + \delta f(t) \delta \Psi(t) + \delta \Psi(t), \quad \delta f(s) = 0. \end{aligned}$$

Применяя формулу Коши, получим интегральное представление

$$\begin{aligned} \delta f(t) &= \int_s^t ([\delta a(\tau), f(\tau)] + f(\tau) \delta \Psi(\tau) + \delta \Psi(\tau)) d\tau + \\ &+ \int_s^t ([\delta a(\tau), \delta f(\tau)] + [a(\tau), \delta f(\tau)] + \delta f(\tau) \Psi(\tau) + \delta f(\tau) \delta \Psi(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\delta f(t)\| &\leq \int_s^t (\|\text{ad}_{f(\tau)}\| \|\delta a(\tau)\| + (1 + \|f(\tau)\|) \eta(\tau)) d\tau + \\ &+ \int_s^t (2\|\delta a(\tau)\| + \|\text{ad}_{a(\tau)}\| + \|\Psi(\tau)\| + \eta(\tau)) \|\delta f(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

Применяя лемму Гронуолла—Беллмана, приходим к утверждению леммы 2.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через W_0^t матрицант линейной системы с импульсным воздействием (8). Прежде всего заметим, что

$$\Omega_0^{n\theta} = \prod_{k=n-1}^0 \Omega_{k\theta}^{(k+1)\theta} = \prod_{k=n}^1 (I + F((k+1)\theta, k\theta)) e^{\hat{A}(k\theta, (k-1)\theta)} = W_{0+0}^{n\theta+0}.$$

Из интегрального представления решения задачи Коши $x(t, t_0, x_0)$ и леммы Гронуолла—Беллмана [2] следует существование положительной постоянной N_1 такой, что

$$\max_{t \in [n\theta, (n+1)\theta]} \|\Omega_{n\theta}^t\| \leq N_1.$$

Поэтому при всех $t \in [n\theta, (n+1)\theta]$ выполняется неравенство

$$(П.1) \quad \|\Omega_0^t\| = \|\Omega_{n\theta}^t \Omega_0^{n\theta}\| \leq N_1 \|W_{0+0}^{n\theta+0}\|.$$

Предположим, что линейная система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (8) устойчива, тогда существует положительная постоянная $c = \sup_{t \geq 0} \|W_{0+0}^t\|$, и, как следствие, $\sup_{t \geq 0} \|\Omega_0^t\| \leq N_1 c$, откуда следует устойчивость линейной системы (6).

Если система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (8) асимптотически устойчива, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|W_{0+0}^{n\theta+0}\| = 0$, тогда из неравенства (П.1) следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Omega_0^t\| = 0$.

Предположим, что линейная система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (8) неустойчива. Тогда существует $y_0 \in \mathbb{R}^N$, $y_0 \neq 0$ такой, что $\sup_{t \geq 0} \|W_{0+0}^t y_0\| = +\infty$. Рассмотрим решение $x(t, t_0, y_0)$ задачи Коши для дифференциального уравнения (6), тогда

$$\sup_n \|\Omega_0^{n\theta} y_0\| = \sup_n \|W_{0+0}^{n\theta+0} y_0\| = +\infty,$$

что доказывает неустойчивость линейной системы (6).

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $y(t)$ — решение задачи Коши для вспомогательной линейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (10). Рассмотрим функцию Ляпунова $v(y) = y^T P y$, тогда при всех $t \in (n\theta, (n+1)\theta)$ справедлива оценка

$$(П.2) \quad \begin{aligned} \left. \frac{dv}{dt} \right|_{(10)} &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|y(t)\|^2 + 2\beta_n \|P\| \|y(t)\|^2 \leq \\ &\leq -\frac{\lambda_{\min}(Q) - 2\beta_n \|P\|}{\lambda_{\max}(P)} v(y(t)). \end{aligned}$$

При $t = (n+1)\theta$ для функции Ляпунова $v(y)$ на траектории системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (10) выполняется оценка

$$(П.3) \quad v(y(t+0)) \leq \left(1 - \Lambda(R, P) + \frac{\|P\| \chi_n (2\|I + B_0\| + \chi_n)}{\lambda_{\min}(P)} \right) v(y(t)).$$

Следовательно, для функции $\eta(t) = v(y(t))$ справедлива оценка

$$\eta((n+1)\theta + 0) \leq e^{-\delta} \eta(n\theta + 0).$$

Отсюда следует, что $\eta(n\theta + 0) \leq e^{-n\delta} \eta(0 + 0)$, и асимптотическая устойчивость линейной системы с импульсным воздействием (10) следует очевидным образом. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Из оценок (П.2) и (П.3) получим оценку

$$\begin{aligned} \eta((n+1)\theta + 0) \leq \exp \left(\sum_{k=0}^n \left(\ln \left(1 - \Lambda(R, P) + \frac{\|P\| \chi_n(2\|I + B_0\| + \chi_n)}{\lambda_{\min}(P)} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\lambda_{\min}(Q) - 2\beta_n \|P\|}{\lambda_{\max}(P)} \theta \right) \right) \eta(0 + 0). \end{aligned}$$

Учитывая, что при всех $x \geq 0$ справедливо неравенство $\ln(1+x) \leq x$, получим оценку

$$\begin{aligned} \eta(n\theta + 0) \leq \exp \left(\left(\ln(1 - \Lambda(R, P)) - \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \theta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\|P\| \sum_{k=0}^{n-1} \chi_n(2\|I + B_0\| + \chi_n)}{(1 - \Lambda(R, P))n\lambda_{\min}(P)} + \frac{2 \sum_{k=0}^{n-1} \beta_n \|P\|}{n\lambda_{\max}(P)} \theta \right) n \right) \eta(0 + 0). \end{aligned}$$

Из условия теоремы 3 следует, что существуют $\delta > 0$ и $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ такие, что при всех $n \geq n_0$ следует неравенство

$$\begin{aligned} \ln(1 - \Lambda(R, P)) - \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \theta + \frac{\|P\| \sum_{k=0}^{n-1} \chi_n(2\|I + B_0\| + \chi_n)}{(1 - \Lambda(R, P))n\lambda_{\min}(P)} + \\ + \frac{2 \sum_{k=0}^{n-1} \beta_n \|P\|}{n\lambda_{\max}(P)} \theta \leq -\delta. \end{aligned}$$

Следовательно, при всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство

$$\eta(n\theta + 0) \leq e^{-(n-n_0)\delta} \eta(n_0\theta + 0).$$

Отсюда следует асимптотическая устойчивость линейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (10).

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим функцию Ляпунова $v(y) = y^T Py$. Обозначим через $y(t)$ решение задачи Коши для системы (10) с начальным условием $y(0+0) = y_0$. Обозначим $\eta(t) = v(y(t))$. Пусть $t \in (n\theta, (n+1)\theta)$, тогда

$$(П.4) \quad \eta^{(k)}(t) = y^T(t) \mathfrak{L}_{A_0+\delta A_n}^k Py(t),$$

где введено обозначение $\delta A_n = \int_{n\theta}^{(n+1)\theta} \delta A(s) ds$.

Применяя к функции $\eta(t)$ формулу Тейлора, находим

$$(П.5) \quad \eta((n+1)\theta) - \eta(n\theta+0) = \sum_{k=1}^p \frac{\theta^k}{k!} \eta^{(k)}(n\theta+0) + \frac{\theta^{p+1}}{(p+1)!} \eta^{(p+1)}(c_n),$$

где $c_n \in (n\theta, (n+1)\theta)$. При всех $\zeta \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} \zeta^T \mathfrak{L}_{A_0+\delta A_n}^k P \zeta &= \zeta^T \mathfrak{L}_{A_0}^k P \zeta + \zeta^T \left(\mathfrak{L}_{A_0+\delta A_n}^k - \mathfrak{L}_{A_0}^k \right) P \zeta \leq \\ &\leq \zeta^T \mathfrak{L}_{A_0}^k P \zeta + \|P\| \left((\|\mathfrak{L}_{A_0}\| + 2\beta_n)^k - \|\mathfrak{L}_{A_0}\|^k \right) \zeta^T \zeta. \end{aligned}$$

Поэтому с учетом условия теоремы 4

$$\eta^{(p+1)}(c_n) = y^T(c_n) \mathfrak{L}_{A_0+\delta A_n}^{p+1} Py(c_n) \leq 0.$$

Тогда из (П.5) следует неравенство

$$\begin{aligned} \eta((n+1)\theta) - \eta(n\theta+0) &\leq \sum_{k=1}^p \frac{\theta^k}{k!} y^T(n\theta+0) \mathfrak{L}_{A_0+\delta A_n}^k Py(n\theta+0) = \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{\theta^k}{k!} y^T(n\theta) (\mathfrak{I} + \mathfrak{R}_{B_0+\delta F_n}) \mathfrak{L}_{A_0+\delta A_n}^k Py(n\theta). \end{aligned}$$

Рассмотрим подробнее выражение

$$\begin{aligned} (\mathfrak{I} + \mathfrak{R}_{B_0+\delta F_n}) \mathfrak{L}_{A_0+\delta A_n}^k &= (\mathfrak{I} + \mathfrak{R}_{B_0}) \mathfrak{L}_{A_0}^k + (\mathfrak{R}_{B_0+\delta F_n} - \mathfrak{R}_{B_0}) \mathfrak{L}_{A_0}^k + \\ &+ (\mathfrak{I} + \mathfrak{R}_{B_0}) (\mathfrak{L}_{A_0+\delta A_n}^k - \mathfrak{L}_{A_0}^k) + (\mathfrak{R}_{B_0+\delta F_n} - \mathfrak{R}_{B_0}) (\mathfrak{L}_{A_0+\delta A_n}^k - \mathfrak{L}_{A_0}^k). \end{aligned}$$

Нетрудно указать оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{R}_{B_0+\delta F_n} - \mathfrak{R}_{B_0}\| &\leq 2\chi_n \|I + B_0\| + \chi_n^2, \\ \|\mathfrak{L}_{A_0+\delta A_n}^k - \mathfrak{L}_{A_0}^k\| &\leq (\|\mathfrak{L}_{A_0}\| + 2\beta_n)^k - \|\mathfrak{L}_{A_0}\|^k. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\eta((n+1)\theta) - \eta(n\theta+0) \leq \sum_{k=1}^p \frac{\theta^k}{k!} y^T(n\theta) (\mathfrak{I} + \mathfrak{R}_{B_0}) \mathfrak{L}_{A_0}^k Py(n\theta) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^p \frac{\theta^k}{k!} \left((2\chi_n \|I + B_0\| + \chi_n^2) \|\mathfrak{L}_{A_0}\|^k + \|\mathfrak{I} + \mathfrak{R}_{B_0}\|((\|\mathfrak{L}_{A_0}\| + 2\beta_n)^k - \|\mathfrak{L}_{A_0}\|^k) + \right. \\
& \quad \left. + (2\chi_n \|I + B_0\| + \chi_n^2)((\|\mathfrak{L}_{A_0}\| + 2\beta_n)^k - \|\mathfrak{L}_{A_0}\|^k) \right) \|P\| \|y(n\theta)\|^2.
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\eta(n\theta + 0) - \eta(n\theta) = y^T(n\theta) \mathfrak{R}_{B_0 + \delta F_n} P y(n\theta),$$

то

$$\begin{aligned}
\eta((n+1)\theta) - \eta(n\theta) & \leq y^T(n\theta) \left(\mathfrak{R}_{B_0} + \sum_{k=1}^p \frac{\theta^k}{k!} (\mathfrak{I} + \mathfrak{R}_{B_0}) \mathfrak{L}_{A_0}^k \right) P y(n\theta) + \\
& + \left(2\chi_n \|I + B_0\| + \chi_n^2 + \sum_{k=1}^p \frac{\theta^k}{k!} \left((2\chi_n \|I + B_0\| + \chi_n^2) \|\mathfrak{L}_{A_0}\|^k + \right. \right. \\
& \quad \left. + \|\mathfrak{I} + \mathfrak{R}_{B_0}\|((\|\mathfrak{L}_{A_0}\| + 2\beta_n)^k - \|\mathfrak{L}_{A_0}\|^k) + \right. \\
& \quad \left. \left. + (2\chi_n \|I + B_0\| + \chi_n^2)((\|\mathfrak{L}_{A_0}\| + 2\beta_n)^k - \|\mathfrak{L}_{A_0}\|^k) \right) \right) \|P\| \|y(n\theta)\|^2 \leq \\
& \leq -\epsilon_n \|y(n\theta)\|^2 \leq -\frac{\epsilon_n}{\lambda_{\max}(P)} \eta(n\theta).
\end{aligned}$$

Таким образом, $\eta((n+1)\theta) \leq (1 - \frac{\epsilon_n}{\lambda_{\max}(P)}) \eta(n\theta)$ и, как следствие, $0 < \epsilon_n < \lambda_{\max}(P)$, поэтому

$$\eta(n\theta) \leq e^{-\frac{\sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_k}{\lambda_{\max}(P)}} \eta(0).$$

Из этого неравенства асимптотическая устойчивость системы (10) следует очевидным образом.

Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Так же, как и при доказательстве теоремы 4, применяя формулу Тейлора при $t \in (n\theta, (n+1)\theta)$, получим

$$\begin{aligned}
\eta(n\theta + 0) - \eta((n+1)\theta) & = \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^k \theta^k}{k!} \eta^{(k)}((n+1)\theta) + \\
& + \frac{(-1)^{p+1} \theta^{p+1}}{(p+1)!} \eta^{(p+1)}(c_n), \quad c_n \in (n\theta, (n+1)\theta).
\end{aligned}$$

Учитывая условие теоремы 5, находим при всех $\zeta \in \mathbb{R}^N$, что

$$\begin{aligned}
(-1)^k \zeta^T \mathfrak{L}_{A_0 + \delta A_n}^k P \zeta & = (-1)^k \zeta^T \mathfrak{L}_{A_0}^k P \zeta + (-1)^k \zeta^T (\mathfrak{L}_{A_0 + \delta A_n}^k - \mathfrak{L}_{A_0}^k) P \zeta \geq \\
& \geq (-1)^k \zeta^T \mathfrak{L}_{A_0}^k P \zeta - \|P\| ((\|\mathfrak{L}_{A_0}\| + 2\beta_n)^k - \|\mathfrak{L}_{A_0}\|^k) \zeta^T \zeta.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
& \eta((n+1)\theta) - \eta(n\theta + 0) \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \frac{\theta^k}{k!} y^T((n+1)\theta) \mathfrak{L}_{A_0 + \delta A_n}^k P y((n+1)\theta) \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \frac{\theta^k}{k!} y^T((n+1)\theta) \mathfrak{L}_{A_0}^k P y((n+1)\theta) + \\
& + \sum_{k=1}^p \frac{\theta^k}{k!} ((\|\mathfrak{L}_{A_0}\| + 2\beta_n)^k - \|\mathfrak{L}_{A_0}\|^k) \|P\| \|y((n+1)\theta)\|^2.
\end{aligned}$$

Следовательно, обозначив $\epsilon'_n = \frac{\epsilon_n}{\lambda_{\max}(P)(\|I+B_0\|+\chi_n)}$, получим

$$\begin{aligned}
& \eta((n+1)\theta + 0) - \eta(n\theta + 0) \leq y^T((n+1)\theta) \mathfrak{R}_{B_0} P y((n+1)\theta) + \\
& + \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \frac{\theta^k}{k!} y^T((n+1)\theta) \mathfrak{L}_{A_0}^k P y((n+1)\theta) + \\
& + \left(\sum_{k=1}^p \frac{\theta^k}{k!} ((\|\mathfrak{L}_{A_0}\| + 2\beta_n)^k - \|\mathfrak{L}_{A_0}\|^k) + 2\chi_n \|I + B_0\| + \chi_n^2 \right) \|P\| \|y((n+1)\theta)\|^2 \leq \\
& \leq -\epsilon_n \|y((n+1)\theta)\|^2 \leq -\epsilon'_n \eta((n+1)\theta + 0).
\end{aligned}$$

Из последнего неравенства и теоремы 1 асимптотическая устойчивость системы (10) следует очевидным образом.

Теорема 5 доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Матрицы B_2 , B_3 :

$$\begin{aligned}
B_2 &= \frac{1}{2\pi} (-\{P_1, P_2\} + 2\{P_0, P_2\}), \\
B_3 &= \frac{1}{4\pi^2} \{P_1, P_0, P_0\} - \frac{1}{16\pi^2} \{P_1, P_0, P_1\} - \\
&- \frac{1}{24\pi} \{P_1, P_0, P_2\} - \frac{1}{8\pi^2} \{P_1, P_2, P_2\} + \frac{1}{6\pi} \{P_1, P_2, P_0\} - \\
&- \frac{1}{4\pi} \{P_0, P_2, P_0\} - \frac{1}{24\pi} \{P_0, P_2, P_1\} + \frac{3}{16\pi^2} \{P_0, P_2, P_2\}.
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высш. шк., 1964.
2. Демидович Б.П. Лекции по теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
3. Беллман Р. Теория устойчивости дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1954.

4. Magnus W. On the Exponential Solution of Differential equations for a Linear Operator // Comm. Pure Appl. Math. 1954. V. VII. P. 649–673.
5. Серр Ж.П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.
6. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
7. Дынкин Е.Б. О представлении ряда $\log(e^x e^y)$ от некоммутирующих x и y через коммутаторы // Матем. сб. 1949. Т. 25 (67). № 1. С. 155–162.
8. Blanes S., Casas F. On the Convergence and Optimization of the Baker–Campbell–Hausdorff Formula // Lin. Algebra Appl. 2004. V. 378. P. 135–158.
9. Liu X., Williams D. Stability Analysis and Applications to Large Scale Impulsive Systems: a New Approach // Can. Appl. Math. Q. 1995. V. 3. P. 419–444.
10. Ignat'ev A.O., Ignat'ev O.A., Soliman A.A. Asymptotic Stability and Instability of the Solutions of Systems with Impulse Action // Math. Notes. 2006. V. 80. No. 4. P. 491–499.
11. Ignat'ev A.O. On the Existence of a Lyapunov Function as a Quadratic Form for Impulsive Systems of Linear Differential Equations // Ukr. Math. J. 2011. V. 62. No. 11. P. 1680–1689.
12. Ignat'ev A.O. On the Equiasymptotic Stability of Solutions of Doubly Periodic Systems with Impulse Action // Ukr. Math. J. 2008. V. 60. No. 10. P. 1528–1539.
13. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. К.: Выща шк., 1987.
14. Двирный А.И., Слынько В.И. Применение прямого метода Ляпунова к исследованию устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Матем. заметки. 2014. № 1. С. 22–35.
15. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
16. Штокало И.З. Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Матем. сб. 1946. Т. 19 (61). С. 263–286.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 14.07.2017

После доработки 19.04.2019

Принята к публикации 24.05.2019