Автоматика и телемеханика, № 12, 2019

Нелинейные системы

© 2019 г. **И.Н. БАРАБАНОВ, канд. физ.-мат. наук (ivbar@ipu.ru),**
В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhai@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

КОЛЕБАНИЯ СВЯЗАННОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ РАВНОВЕСИЯ[1]

Рассматривается нелинейная автономная связанная система в окрестности равновесия. Предполагается, что матрица линейной системы имеет чисто мнимые собственные значения и отсутствуют *внутренние резонансы* до 4-го порядка включительно. Исследуются колебания при действии на систему периодических управлений с малым коэффициентом регулятора k. Находятся изолированные резонансные колебания, в терминах параметра k оцениваются амплитуды колебаний и анализируется их устойчивость. Показывается, что существование резонансного колебания гарантируется действием управления, а его асимптотическая устойчивость определяется неуправляемой системой.

Ключевые слова: нелинейная связанная система, равновесие, резонанс, периодическое управление, колебание, устойчивость.

DOI: 10.1134/S0005231019120031

1. Введение

В [1] введено понятие модели, содержащей связанные подсистемы (МССП). Модель описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), в которой подсистемы — системы автономных ОДУ. Связь между подсистемами задается параметром ε; при $\varepsilon = 0$ модель распадается на независимые подсистемы. Таких параметров в МССП может быть один или несколько. Параметры отражают иерархичность подсистем в МССП. Размерность каждой подсистемы в МССП в общем случае индивидуальная, а сама подсистема может быть линейной или нелинейной. В случае малых значений ε получим модель, содержащую слабо связанные подсистемы. Естественный подход к исследованию МССП, предложенный в [1], заключается в классификации подсистем по типам (динамическим свойствам), классификации связей между подсистемами, в определении класса принадлежности МССП, затем в постановке задачи динамики МССП и анализе этой задачи. Подход применялся для изучения колебаний, устойчивости, стабилизации, бифуркации и резонанса; результаты получались для слабо связанных МССП.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00146).

В данной статье изучается МССП, в которой в общей ситуации связи не будут слабыми. Предполагается, что в системе двух связанных нелинейных осцилляторов отсутствуют *внутренние резонансы* до четвертого порядка включительно и система подвержена действию периодического управления с малым коэффициентом регулятора. Путем выбора частоты действующего управления находятся условия существования и устойчивости резонансных колебаний.

2. Резонансное колебание системы

Рассмотрим нелинейную автономную систему четвертого порядка в окрестности положения равновесия. Предположим, что характеристическое уравнение имеет две пары чисто мнимых корней $\pm\lambda_s$, $s = 1, 2$. Тогда в линейном приближении система распадается на независимые осцилляторы. При учете нелинейных членов система становится связанной, причем в общей ситуации связи будут сильными, т.е. параметр ε принимает конечные значения. Подобная система, к примеру, возникает в [2] в окрестности равновесия связанных пружиной маятников.

Структура нелинейных членов в системе существенно зависит от наличия или отсутствия *внутреннего резонанса*, т.е. целочисленных соотношений между корнями λ_s линейной системы:

$$\lambda_1 + \chi\lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = i\omega_1, \quad \lambda_2 = -i\omega_2, \quad \omega_{1,2} > 0, \quad \chi \in \mathrm{N},$$

где $\omega_{1,2}$ — частоты линейной системы. Анализ системы в окрестности равновесия обычно проводится с учетом членов не выше третьего порядка малости по переменным; выделяются *внутренние резонансы* низших порядков (1:1, 1:2, 1:3) и *внутренние резонансы* порядка выше четвертого. Поэтому отдельно изучаются задачи для *внутренних резонансов* 1:1, 1:2 и 1:3, а также задача, когда отсутствуют *внутренние резонансы* до 4-го порядка включительно. Последняя из задач изучается далее в статье.

Для автономной (неуправляемой) системы известен важный результат — теорема Ляпунова о центре (см. [3, гл. VII]), который заключается в существовании однопараметрического примыкающего к равновесию семейства периодических решений для системы, допускающей первый интеграл. Теорема распространяется на случаи *внутреннего резонанса* (см. [4–8]) и обратимые системы (см. [9, 10]). Для систем общего вида, не обладающих свойствами гамильтоновости или обратимости, получены условия существования периодических решений в ситуациях наличия *внутреннего резонанса* [11]. В указанных исследованиях авторы решали вопрос о периодических решениях в окрестности равновесия в рамках неуправляемой автономной модели.

Задачу реализации периодического решения в окрестности равновесия можно ставить как задачу управления. В ней с учетом области движения Ω — окрестности равновесия — можно использовать малое по действию управление. Подобное воздействие обеспечивается, например, малым коэффициентом k регулятора.

В рассматриваемой задаче управления, по сути, решается задача о вынужденных колебаниях. Поэтому естественно применять периодическое по времени управление: постоянное управление только смещает равновесие системы и не приводит к решению задачи управления.

Выбранное периодическое управление позволяет использовать известное в теории вынужденных колебаний явление резонанса, заключающееся в том, что действие на систему k-малой силы с частотой, равной или кратной собственной частоте системы, вызывает в системе колебания с амплитудой $O(k^{1/\alpha})$, $\alpha > 1$. Получается, например, что при $\alpha = 3$ для регулятора с $k = 1/1000$ амплитуда колебаний в окрестности Ω становится заметной и равняется $O(k^{1/3}) = 1/10$. В задаче управления собственные частоты неуправляемой модели заданы, однако управляемую систему можно всегда ввести в резонансный режим за счет произвола в частоте действующего управления. Поэтому использование резонансного эффекта входит в постановку задачи управления.

После данной характеристики неуправляемой системы и описания действующего управления исследуемая система

$$
\begin{aligned}
&\dot z_1 = \lambda_1 z_1 + (C_{11}|z_1|^2 + C_{12}|z_2|^2)z_1 + Z_1(z,\bar z) + kU_1(t),\\
(1)\qquad &\dot z_2 = \lambda_2 z_2 + (C_{21}|z_1|^2 + C_{22}|z_2|^2)z_2 + Z_2(z,\bar z) + kU_2(t),\\
&Z_1 = O(|z|^4), \quad Z_2 = O(|z|^4),
\end{aligned}
$$

записывается в комплексных переменных z_1, z_2; черта над z означает сопряжение; группа уравнений для $\bar z_1$, $\bar z_2$ опущена. В (1) не зависящая явно от времени часть системы приведена к нормальной форме до членов третьего порядка включительно; $C_{sj} = a_{sj} + ib_{sj}$ — комплексные постоянные. Что касается управления, то $U_1(t)$ и $U_2(t)$ представляются функциями фиксированного периода 2π, что оказывается удобным на этапе получения результатов. Так система (1) анализируется для различных значений λ, а резонасный режим достигается за счет изменения собственных частот: суть задачи не зависит от способа достижения резонансного режима. Для заданной неуправляемой системы полученный результат интерпретируется как если бы режим был достигнут за счет изменения частоты управления. При исследовании резонансных колебаний получается, что коэффициент $k \sim |z|^3$. При такой оценке результат о резонансных колебаниях получается для $k \in (0, k^*)$, где число k^* для заданной неуправляемой системы вполне определено.

В выписанной части системы (1) две подсистемы (по переменным z_1 и z_2 соответственно) связываются ненулевыми коэффициентами C_{12} и C_{21}. В случае когда в системе (1) коэффициенты $C_{12} \sim \varepsilon$, $C_{21} \sim \varepsilon$, получается слабо связанная периодическая система с двумя параметрами k и ε.

Заметим, что вопрос об изолированных колебаниях в случае системы Ляпунова решался коррекцией автономной модели и переходом к периодической системе (см. [3, гл. VIII]): полученная модель изучалась в рамках теории возмущений. В этой системе резонансные колебания совершает только одна подсистема (амплитуда колебаний равна $O(k^{1/3})$), амплитуда колебаний в другой подсистеме равняется $O(k)$. В случае несовпадения чисел $\omega_{1,2}$ с натуральным числом по теореме Пуанкаре [3, с. 378] система (1) имеет единственное 2π-периодическое решение с амплитудой $O(k)$.

3. Случай одной натуральной частоты

Пусть $\omega_1 = p_1,\ p_1 \in \mathrm{N}$, а ω_2 не является натуральным числом ($\omega_2 \notin \mathrm{N}$). В системе (1) выполним преобразование $z_1 = w_1 \exp(ip_1 t),\ z_2 = w_2$. Далее, выделяя действительные и мнимые части переменных w_1, w_2, запишем уравнения в действительных переменных $x_s,\ y_s$ $(s = 1, 2)$. Получается система:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) + X_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t) + kF_1(t),\\
\dot{y}_1 &= g_1(x_1, y_1, x_2, y_2) + Y_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t) + kG_1(t),\\
\dot{x}_2 &= \omega_2 y_2 + f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) + X_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t) + k\Xi_2(t),\\
\dot{y}_2 &= -\omega_2 x_2 + g_2(x_1, y_1, x_2, y_2) + Y_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t) + kH_2(t).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Явный вид функций $f_s, g_s, F_1, G_1, \Xi_2, H_2$ системы (2) приводится в Приложении (п.а), а не выписанные явно функции X_s, Y_s находятся из равенств $X_s + iY_s = Z_s,\ s = 1, 2$.

Для выделения в (2) слагаемых, отвечающих за резонансное колебание, выполняется масштабирование

$$
(x_1, y_1) \to k^{1/3}(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2) \to k^{2/3}(x_2, y_2). \tag{3}
$$

Тем самым получается система:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= k^{2/3}[f_{11}(x_1, y_1) + F_1(t)] + O(k),\\
\dot{y}_1 &= k^{2/3}[g_{11}(x_1, y_1) + G_1(t)] + O(k),\\
\dot{x}_2 &= \omega_2 y_2 + k^{1/3}\Xi_2(t) + O(k^{2/3}),\\
\dot{y}_2 &= -\omega_2 x_2 + k^{1/3}H_2(t) + O(k^{2/3}).
\end{aligned} \tag{4}
$$

К системе (4) применима теорема существования периодических решений, установленная в [12, теорема 5]. В самом деле, при $k = 0$ подсистема уравнений для переменных $x_2,\ y_2$ имеет единственное — нулевое 2π-периодическое решение. Что касается переменных $x_1,\ y_1$, то по ним начальная точка $(x_1^0, y_1^0, 0, 0)$ для периодического решения находится из амплитудных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&f_{11}(x_1, y_1) + I_{x1}(2\pi) = 0, \quad g_{11}(x_1, y_1) + I_{y1}(2\pi) = 0,\\
&I_{x1}(t) = \int_0^t F_1(\tau)d\tau, \quad I_{y1} = \int_0^t G_1(\tau)d\tau.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Эта система имеет единственное решение

$$
\begin{aligned}
x_1^0 &= -\frac{I_{y1}b_{11} - I_{x1}a_{11}}{\sqrt[3]{2\pi(a_{11}^2 + b_{11}^2)[(I_{x1}b_{11} - I_{y1}a_{11})^2 + (I_{y1}b_{11} + I_{x1}a_{11})^2]}},\\
y_1^0 &= -\frac{I_{x1}b_{11} + I_{y1}a_{11}}{\sqrt[3]{2\pi(a_{11}^2 + b_{11}^2)[(I_{x1}b_{11} - I_{y1}a_{11})^2 + (I_{y1}b_{11} + I_{x1}a_{11})^2]}},
\end{aligned} \tag{6}
$$

которое существует при

$$|I_{x1}| + |I_{y1}| \neq 0 \tag{7}$$

и является простым корнем системы (5).

Приме́ним к системе (4) общую теорему из [12, теорема 5] о существовании периодических решений системы с параметром. В результате в силу простоты корня (6) доказывается существование 2π-периодического решения в системе (4). С учетом примененного масштабирования (3) получается, что (1) допускает резонансное 2π-периодическое колебание, на котором

$$\begin{aligned}
&z_1 = (x_1 + iy_1)\exp(ip_1 t),\\
&x_1 = k^{1/3}x_1^0 + k\int_0^t \big[f_{11}(x_1^0, y_1^0) + F_1(\tau)\big]\,d\tau + o(k),\\
&y_1 = k^{1/3}y_1^0 + k\int_0^t \big[g_{11}(x_1^0, y_1^0) + G_1(\tau)\big]\,d\tau + o(k),\\
&x_2 = kx_2^*(t) + o(k), \quad y_2 = ky_2^*(t) + o(k),
\end{aligned} \tag{8}$$

где $x_2^*(t)$, $y_2^*(t)$ — решение второй подсистемы в (4) при $k = 0$.

Таким образом, доказывается существование резонансного колебания, отвечающего натуральной частоте. Это колебание существует для $k \in (0, k^*)$ без каких-либо дополнительных, помимо (7), ограничений на действующее управление.

Отметим, что результат о реализации в управляемой системе резонансного колебания амплитуды $O(k^{1/3})$ качественно такой же, как и в системе Ляпунова.

Исследуем устойчивость колебания (8) или, что то же самое, устойчивость соответствующего колебания системы (4). Для этого выпишем уравнения в вариациях

$$\begin{aligned}
&\delta\dot{x}_1 = k^{2/3}[\xi_{11}\delta x_1 + \xi_{12}\delta y_1] + O(k), \quad \dot{\delta y}_1 = k^{2/3}[\xi_{21}\delta x_1 + \xi_{22}\delta y_1] + O(k),\\
&\delta\dot{x}_2 = \omega_2\delta y_2 + k^{2/3}(\eta_{11}\delta x_2 + \eta_{12}\delta y_2) + o(k^{2/3}),\\
&\delta\dot{y}_2 = -\omega_2\delta x_2 + k^{2/3}(\eta_{21}\delta x_2 + \eta_{22}\delta y_2) + o(k^{2/3}),
\end{aligned} \tag{9}$$

где формулы для вычисления ξ_{sj} и η_{sj} даются в Приложении (п.б). Видно, что система (9) с точностью до выписанных слагаемых распадается на две подсистемы. Поэтому условия асимптотической устойчивости даются системой неравенств:

$$\begin{gathered}
c_1 = \xi_{11} + \xi_{22} < 0, \quad d_1 = \xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}\xi_{21} > 0,\\
c_2 = \eta_{11} + \eta_{22} < 0, \quad d_2 = k^{4/3}(\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21}) + \omega_2^2 > 0.
\end{gathered}$$

Для исследуемого колебания (8) выполняется неравенство $|x_1^0| + |y_1^0| \neq 0$. Поэтому из формул для ξ_{sj}, η_{sj} следует, что $c_1 < 0$, а неравенство $c_2 < 0$ справедливо, когда $a_{21} < 0$. Так же, имея в виду малое значение параметра k, выводится, что $d_2 > 0$.

Таким образом, условия асимптотической устойчивости резонансного колебания (8) сводятся к неравенствам

$$a_{11} < 0, \quad d_1 > 0, \quad a_{21} < 0. \tag{10}$$

Теорема 1. В случае когда $\omega_1 = p_1$, $\omega_2 \neq p_2$, $p_1, p_2 \in \mathrm{N}$, система (1) *всегда допускает единственное 2π-периодическое резонансное колебание* (8). *При $k \in (0, k^*)$ колебания образуют k-семейство, примыкающее к равновесию. Достаточные условия асимптотической устойчивости колебания даются неравенствами* (10).

Замечание 1. Из теоремы 1 следует, что натуральной частоте ω_1 в связанной управляемой системе общего вида отвечает единственное резонансное колебание.

Замечание 2. Асимптотическая устойчивость резонансного колебания (8) определяется только свойствами неуправляемой системы.

4. Сохранение резонансного колебания в системе с двумя натуральными частотами

Рассмотрим случай, когда обе частоты — натуральные числа:

$$\omega_1 = p_1, \quad \omega_2 = p_2, \quad p_1, p_2 \in \mathrm{N}.$$

Возникает вопрос, сохраняется ли резонансное колебание вида (8) в такой системе. Чтобы на него ответить, сначала выполним преобразование $z_1 = w_1 \exp(ip_1 t)$, $z_2 = w_2 \exp(-ip_2 t)$. Тогда получим 2π-периодическую систему вида (2), где уже нет линейных по переменным w_1 и w_2 членов. Далее выделим действительные и мнимые части: $w_s = x_s + iy_s$, $s = 1, 2$. Наконец, воспользуемся масштабированием:

$$(x_s, y_s) \to k^{1/3}(x_s, y_s), \quad s = 1, 2. \tag{11}$$

В результате всех действий получим систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= k^{2/3}[f_s(x_1, y_1, x_2, y_2) + F_s(t)] + o(k^{2/3}), \\ \dot{y}_s &= k^{2/3}[g_s(x_1, y_1, x_2, y_2) + G_s(t)] + o(k^{2/3}). \end{aligned} \tag{12}$$

Используемые в (12) функции f_s, g_s, F_s и G_s, $s = 1, 2$, даются в Приложении (п.а). Для функций f_2 и g_2 выполняются равенства:

$$f_2(x_1, y_1, 0, 0) \equiv 0, \quad g_2(x_1, y_1, 0, 0) \equiv 0.$$

Поэтому система амплитудных уравнений

$$\int_0^{2\pi}[f_s(x_1,y_1,x_2,y_2)+F_s(t)]dt=0,\quad \int_0^{2\pi}[g_s(x_1,y_1,x_2,y_2)+G_s(t)]dt=0, \tag{13}$$
$$s=1,2,$$

при условии нулевых средних значений F_2 и G_2 допускает простой корень $(x_1^0,y_1^0,0,0)$. При этом числа x_1^0,y_1^0 по-прежнему даются формулами (6). Следовательно, согласно общему результату [12, теорема 5], примененному к системе (12), выводится следующая теорема 2.

Теорема 2. *В случае когда $\omega_1=p_1$, $\omega_2=p_2$, $p_1,p_2\in\mathrm{N}$, в системе* (1) *сохраняется резонансное колебание* (8)*, если средние значения управлений $F_2(t)$ и $G_2(t)$ на периоде равны нулю. При $k\in(0,k^*)$ колебания образуют k-семейство, примыкающее к равновесию.*

Следствие. *Для системы с двумя натуральными частотами управление в общем случае не приводит к рождению резонансного колебания по одной переменной.*

Замечание 3. Исследование устойчивости резонансного колебания (8) в случае двух натуральных частот проводится как в разделе 3.

5. Резонансное колебание всей системы

Рассматривая по-прежнему случай двух резонансных частот, перейдем к исследованию колебания, в котором равноправно участвуют все переменные. Для доказательства существования колебания всей системы воспользуемся уравнениями (12). Теперь составим систему амплитудных уравнений (13). Наконец, используя общую теорему [12, теорема 5, следствие], получим: каждому простому корню амплитудного уравнения (13) отвечает изолированное резонансное колебание системы (1). Это — решение, которое с учетом масштабирования (11) принимает вид:

$$\begin{aligned}
&z_s=w_s\exp\left((-1)^{s+1}ip_st\right),\\
&x_s=k^{1/3}x_s^0+k\int_0^t\left[f_s(x_1^0,y_1^0,x_2^0,y_2^0)+F_s(\tau)\right]d\tau+o(k),\\
&y_s=k^{1/3}y_s^0+k\int_0^t\left[g_s(x_1^0,y_1^0,x_2^0,y_2^0)+G_s(\tau)\right]d\tau+o(k),\quad s=1,2.
\end{aligned}\tag{14}$$

Таким образом, доказывается существование резонансного 2π-периодического колебания, в котором каждая из переменных z_1 и z_2 колеблется с амплитудой порядка $k^{1/3}$.

З а м е ч а н и е 4. Амплитудные уравнения иногда удобно записывать и анализировать для системы (1) в следующем виде:

$$(C_{11}|z_1^0|^2 + C_{12}|z_2^0|^2)z_1^0 + \int\limits_0^{2\pi} U_1(t)dt = 0,$$

$$(C_{21}|z_1^0|^2 + C_{22}|z_2^0|^2)z_2^0 + \int\limits_0^{2\pi} U_2(t)dt = 0.$$

В результате находится начальная точка (z_1^0, z_2^0) для колебания (14).

Перейдем к задаче устойчивости резонансного колебания (14). Составляются уравнения в вариациях

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}_s &= k^{5/3}\left[\frac{\partial f_s}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_s}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f_s}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial f_s}{\partial y_2}\delta y_2\right] + o(k^{5/3}), \\ \delta\dot{y}_s &= k^{5/3}\left[\frac{\partial g_s}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial g_s}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial g_s}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial g_s}{\partial y_2}\delta y_2\right] + o(k^{5/3}), \quad s = 1, 2, \end{aligned} \tag{15}$$

где частные производные вычисляются в начальной точке $(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0)$, отвечающей резонансному колебанию (14). Тогда с точностью до выписанных членов получается задача об устойчивости нулевого решения линейной системы дифференциальных уравнений с постоянной матрицей A. Пусть собственные значения ρ матрицы A принадлежат левой полуплоскости. Тогда слагаемые $o(k^{5/3})$ не повлияют на расположение характеристеских показателей в левой полуплоскости, которые в первом по k приближении совпадают с числами ρ. Следовательно, по второй теореме Боголюбова [13, ч.1, § 5, теорема II] колебание — асимптотически устойчиво.

В результате приходим к следующей теореме 3.

Т е о р е м а 3. В случае натуральных частот $\omega_1 = p_1$, $\omega_2 = p_2$, $p_1, p_2 \in \mathrm{N}$, связанная управляемая система (1) *допускает* 2π*-периодическое резонансное колебание* (14), *в котором каждая из переменных z_1 и z_2 колеблется с амплитудой $O(k^{1/3})$; начальная точка (z_1^0, z_2^0) для колебания дается простым корнем амплитудного уравнения* (13). *При $k \in (0, k^*)$ колебания образуют k-семейство, примыкающее к равновесию. Колебание будет асимптотически устойчивым, если все собственные значения матрицы A принадлежат левой полуплоскости.*

З а м е ч а н и е 5. Теорема 3 справедлива независимо от величины связи.

З а м е ч а н и е 6. Решение амплитудного уравнения (13) не совпадает с равновесием, если средние значения всех функций $F_s(t), G_s(t)$ отличны от нуля.

З а м е ч а н и е 7. Матрица A системы (15) составляется из частных производных от функций f_s, g_s, которыми задается автономная (неуправляемая) система. Следовательно, устойчивость резонансного колебания управляемой системы определяется свойствами неуправляемой системы.

Замечание 8. В ситуации, когда собственные значения матрицы A принадлежат левой полуплоскости, резонансное колебание управляемой системы наследует свойство устойчивости равновесия.

6. Слабо связанные системы

Рассмотрим сначала предельный случай $\varepsilon = 0$. Тогда $C_{12} = C_{21} = 0$ и функции в системе (12) приобретают вид:

$$f_s = (a_{ss}x_s + b_{ss}y_s)(x_s^2 + y_s^2), \quad g_s = (a_{ss}y_s - b_{ss}x_s)(x_s^2 + y_s^2), \quad s = 1, 2.$$

При каждом значении индекса s имеем вынужденные колебания одной системы, исследованной в [14]. Поэтому, используя полученные в [14] результаты, в невырожденном случае

$$|I_{xs}| + |I_{ys}| \neq 0, \quad s = 1, 2,$$

из теоремы 3 получаем результат о наличии в k-связанной системе (1) резонансного колебания (14). При этом координаты начальной точки даются формулами:

$$\begin{aligned} x_s^0 &= \frac{I_{ys}b_{ss} - I_{xs}a_{ss}}{\sqrt[3]{2\pi(a_{ss}^2 + b_{ss}^2)[(I_{xs}b_{ss} + I_{ys}a_{ss})^2 + (I_{ys}b_{ss} - I_{xs}a_{ss})^2]}}, \\ y_s^0 &= \frac{-(I_{xs}b_{ss} + I_{ys}a_{ss})}{\sqrt[3]{2\pi(a_{ss}^2 + b_{ss}^2)[(I_{xs}b_{ss} + I_{ys}a_{ss})^2 + (I_{ys}b_{ss} - I_{xs}a_{ss})^2]}}, \quad s = 1, 2, \end{aligned} \tag{16}$$

а условие асимптотической устойчивости колебания сводится к выполнению неравенств $a_{ss} < 0$, $s = 1, 2$.

Перейдем теперь к слабо связанным системам: $C_{12} \sim \varepsilon$, $C_{21} \sim \varepsilon$. Здесь матрица $A(\varepsilon)$ системы (15) зависит от ε и при $\varepsilon = 0$ превращается в матрицу $A(0)$, распадающуюся на две матрицы (2×2). Поэтому при малых значениях ε собственные значения матрицы $A(\varepsilon)$ остаются в левой полуплоскости, если они лежали в левой полуплоскости при $\varepsilon = 0$. Далее, в первом приближении по k характеристические показатели системы (15) совпадают с собственными значениями матрицы $A(\varepsilon)$. Следовательно, для слабо связанной системы (1) теорема 3 формулируется следующим образом.

Теорема 4. В случае натуральных частот $\omega_1 = p_1$, $\omega_2 = p_2$, $p_1, p_2 \in \mathrm{N}$, слабо связанная управляемая система (1) *допускает 2π-периодическое резонансное колебание* (14), *в котором каждая из переменных z_1 и z_2 колеблется с амплитудой $O(k^{1/3})$; начальные точки (z_1^0, z_2^0) даются простыми корнями амплитудного уравнения* (13). *При $k \in (0, k^*)$ колебания образуют k-семейство, примыкающее к равновесию. Достаточные условия устойчивости колебания сводятся к выполнению неравенств $a_{ss} < 0$, $s = 1, 2$.*

Замечание 9. В частном случае $C_{12} = C_{21} = 0$ получаем слабо связанную систему с одним параметром связи k, которая может служит примером к теореме 3.

Замечание 10. Другие частные случаи — связанные уравнения второго порядка, обратимые системы, гамильтоновы системы — также представляют интерес.

Замечание 11. Теоремы 1–4 сохраняют справедливость в общем случае, когда частоты (частота) k-близки к натуральным числам.

Замечание 12. Теоремы 1–4 справедливы для достаточно малых значений параметра k.

7. Пример

Система с двумя натуральными частотами в разделе 6 рассматривалась при условиях $C_{12} \sim \varepsilon$ и $C_{21} \sim \varepsilon$ (слабо связанная система). Рассмотрим пример, в котором коэффициенты C_{12} и C_{21} — конечные числа (сильная связь). Предполагается, что $a_{ss} = 0$, $b_{ss} = 0$, $s = 1, 2$.

Поставим задачу о реализации в управляемой системе колебания с центром в заданной точке E плоскости (x_1, x_2). Для решения задачи подчиним управление условиям

$$-\bar{F}_1 b_{12} + \bar{G}_1 a_{12} = 0, \quad -\bar{F}_2 b_{21} + \bar{G}_2 a_{21} = 0.$$

Далее из системы амплитудных уравнений (13)

$$\begin{aligned}(a_{12}x_1 - b_{12}y_1)(x_2^2 + y_2^2) = \bar{F}_1, \quad (a_{12}y_1 + b_{12}x_1)(x_2^2 + y_2^2) = \bar{G}_1,\\ (a_{21}x_2 - b_{21}y_2)(x_1^2 + y_1^2) = \bar{F}_2, \quad (a_{21}y_2 + b_{21}x_2)(x_1^2 + y_1^2) = \bar{G}_2\end{aligned}$$

найдем координаты точки $E(x_1^0, y_1^0)$:

$$x_1^0 = (P_2^2/P_1)^{1/3}, \quad y_1^0 = 0, \quad x_2^0 = (P_1^2/P_2)^{1/3}, \quad y_2^0 = 0,$$
$$P_1 = \frac{\bar{F}_1 a_{12} + \bar{G}_1 b_{12}}{a_{12}^2 + b_{12}^2}, \quad P_2 = \frac{\bar{F}_2 a_{21} + \bar{G}_2 b_{21}}{a_{21}^2 + b_{21}^2}.$$

Видно, что найден простой корень амплитудного уравнения. Поэтому согласно теореме 3 в управляемой системе реализуется колебание (14) с начальной точкой E.

8. Заключение

В задаче колебаний в окрестности равновесия, в которой линейное приближение распадается на независимые осцилляторы, возникает сильно связанная нелинейная автономная система. В зависимости от наличия или отсутствия *внутреннего резонанса* между собственными частотами системы получаются разные задачи о колебаниях. Ляпунов и другие исследователи, оставаясь в рамках автономной модели, построили периодические решения в окрестности равновесия гамильтоновых систем и обратимых систем. Для систем общего вида, которые не стеснены дополнительными условиями типа гамильтоновости и т.п., колебания в окрестности равновесия можно реализовать посредством периодического управления с малым коэффициентом регулятора k.

При этом управляемая система вводится в резонансный режим, в котором собственные частоты неуправляемой системы совпадают или кратны частоте действующего периодического управления: возникают колебания амплитуды $O(k^{1/\alpha})$, $\alpha > 1$.

В задаче, где отсутствуют *внутренние резонансы* до 4-го порядка включительно, получаются такие результаты. В системе с одной натуральной частотой $p \in \mathrm{N}$ соответствующая этой частоте подсистема совершает колебания с амплитудой $O(k^{1/3})$; амплитуда колебаний второй подсистемы равна $O(k)$. В системе с двумя натуральными частотами обе подсистемы вовлекаются в колебание с амплитудой одинакового порядка $O(k^{1/3})$. При $k \in (0, k^*)$ колебания образуют k-семейство, примыкающее к равновесию. Существование резонансного колебания гарантируется действием управления, его асимптотическая устойчивость определяется неуправляемой системой.

ПРИЛОЖЕНИЕ

а. Правые части системы (2) и (12):

$$F_s = \Xi_s(t)\cos p_s t + (-1)^s H_s(t)\sin p_s t, \quad G_s = (-1)^s \Xi_s(t)\sin p_s t + H_s(t)\cos p_s t,$$
$$U_s = \Xi_s + iH_s, \quad f_s = f_{s1} + f_{s2},\ g_s = g_{s1} + g_{s2}, \quad s = 1, 2,$$
$$f_{11} = (a_{11}x_1 - b_{11}y_1)(x_1^2 + y_1^2),\ f_{12} = (a_{12}x_1 - b_{12}y_1)(x_2^2 + y_2^2),$$
$$g_{11} = (a_{11}y_1 + b_{11}x_1)(x_1^2 + y_1^2),\ g_{12} = (a_{12}y_1 + b_{12}x_1)(x_2^2 + y_2^2),$$
$$f_{21} = (a_{21}x_2 - b_{21}y_2)(x_1^2 + y_1^2),\ f_{22} = (a_{22}x_2 - b_{22}y_2)(x_2^2 + y_2^2),$$
$$g_{21} = (a_{21}y_2 + b_{21}x_2)(x_1^2 + y_1^2),\ g_{22} = (a_{22}y_2 + b_{22}x_2)(x_2^2 + y_2^2).$$

б. Формулы для системы (9):

$$\xi_{11} = 3a_{11}(x_1^0)^2 + a_{11}(y_1^0)^2 - 2b_{11}x_1^0y_1^0, \quad \xi_{12} = -b_{11}(x_1^0)^2 - 3b_{11}(y_1^0)^2 + 2a_{11}x_1^0y_1^0,$$
$$\xi_{21} = 3b_{11}(x_1^0)^2 + b_{11}(y_1^0)^2 + 2a_{11}x_1^0y_1^0, \quad \xi_{22} = a_{11}(x_1^0)^2 + 3a_{11}(y_1^0)^2 + 2b_{11}x_1^0y_1^0,$$
$$\eta_{11} = a_{21}((x_1^0)^2 + (y_1^0)^2), \quad \eta_{12} = -b_{21}((x_1^0)^2 + (y_1^0)^2), \quad \eta_{21} = -\eta_{12}, \quad \eta_{22} = \eta_{11}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тхай В.Н.* Модель, содержащая связанные подсистемы // АиТ. 2013. № 6. С. 32–41.

   Tkhai V.N. Model with Coupled Subsystems // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 6. P. 919–931.
2. *Евдокименко А.П.* О равновесных конфигурациях двух связанных маятников и их устойчивости // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 3. С. 47–58.
3. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГТТЛ, 1956.
4. *Roels J.* An Extension to Resonant Case of Liapunov's Theorem Concerning the Periodic Solytions near a Hamiltonian Equilibrium // J. Diff. Equat. 1971. V. 9. No. 2. P. 300–324.
5. *Roels J.* Families of Periodic Solutions near Hamiltonian Equilibrium when the Ratio of Two Eigenvalues is 3 // J. Diff. Equat. 1971. V. 10. No. 3. P. 431–447.

6. *Sweet D.* Periodic Solutions for Dynamical Systems Possessing a Fisrt Integral in the Resonant Case // J. Diff. Equat. 1973. V. 14. No. 1. P. 171–183.
7. *Henrard J.* Liapunov's Center Theorem for Resonant Equilibrium // J. Diff. Equat. 1973. V. 14. No. 3. P. 431–441.
8. *Schmidt D.S.* Periodic Solutions near a Resonant Equilibrium of the Hamiltonian System // Celest. Mech. 1974. V. 9. No. 1. P. 81–101.
9. *Devaney R.L.* Reversible Diffeomorphisms and Flows // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V. 218. P. 89–113.
10. *Тхай В.Н.* Ляпуновские семейства периодических движений в обратимой системе // Прикл. матем. механ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 56–72.
11. *Тхай В.Н.* Цикл в системе, близкой к резонансной системе // Прикл. матем. механ. 2004. Т. 68. Вып. 2. С. 254–272.
12. *Тхай В.Н.* О методе Ляпунова–Пуанкаре в теории периодических движений // Прикл. матем. механ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 355–371.
13. *Боголюбов Н.Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: Акад. Наук Укр. ССР, 1945.
14. *Тхай В.Н.* Вынужденные резонансные колебания нелинейной автономной системы в окрестности равновесия // АиТ. 2010. № 11. С. 112–119.

   Tkhai V.N. Forced Resonant Oscillations of Nonlinear Autonomous System in Equilibrium Neighborhood // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 11. P. 2360–2366.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 28.03.2019

После доработки 12.04.2019

Принята к публикации 25.04.2019