© 2019 г. А.В. МЕТЕЛЬСКИЙ, д-р. физ.-мат. наук (ametelski@bntu.by)
(Белорусский национальный технический университет, Минск),
В.Е. ХАРТОВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук (hartovskij@grsu.by)
(Гродненский государственный университет им. Я. Купалы)

СИНТЕЗ ФИНИТНОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа предложено решение задачи проектирования финитного наблюдателя, позволяющего за конечное время получить оценку решения исходной системы с нулевой погрешностью. Получены критерий существования такого наблюдателя и метод его синтеза.

Ключевые слова: линейные автономные системы, запаздывание, нейтральный тип, финитный наблюдатель, критерий существования, синтез, точечная вырожденность, целые функции.

DOI: 10.1134/S0005231019120055

1. Введение

На сегодняшний день задача оценки состояния для промышленных объектов занимает важное место при проектировании систем управления [1, 2]. Динамическая система, переменные состояния которой суть оценки переменных состояния другой системы, называется наблюдателем этой системы. Это определение было впервые введено в 1963 г. в теории линейных систем Луенбергером [3]. Он показал, что для каждой наблюдаемой линейной системы может быть спроектирован наблюдатель с ошибкой оценки (т.е. с разницей между реальным состоянием системы и состоянием наблюдателя), стремящейся к нулю с заданной скоростью.

В силу бесконечномерности пространства состояний для объектов с запаздыванием задача наблюдения таких систем – весьма неоднозначная. В зависимости от параметров самих систем и потребностей приложений существует много не эквивалентных определений наблюдаемости. Наиболее сильное из них [4] – это понятие наблюдаемости начального состояния. Но для формирования управления типа обратной связи необходимо знать не начальное состояние, а уметь восстанавливать текущее состояние системы в любой момент времени, а эти задачи не равносильны. В случае линейных систем запаздывающего типа, по-видимому, чаще говорят о сильной, спектральной и слабой наблюдаемости.

Если в форме Смита матрицы наблюдаемости левый верхний блок, размер которого не меньше размера исходной системы, есть единичная матрица, то исходная система – сильно наблюдаема [5, 6]. В этом случае проблема синтеза наблюдателей [5–7] сводится к проблеме управления для систем в кольце полиномов [8–11] и часто решается с использованием некоторых канонических форм [12, 13]. Этот же подход можно использовать [14] и в случае асимптотически наблюдаемых систем (при нулевом выходе и $t \to +\infty$ текущее состояние стремится к нулю).

Свойство спектральной наблюдаемости [4, 5] накладывает менее жесткие требования на параметры системы и является двойственным по отношению к спектральной управляемости [15, 16]. Оно является необходимым и достаточным [17, 18] для существования непрерывной однозначной операции восстановления текущего состояния по измерениям прошлого выхода. Одним из методов проектирования наблюдателей в данном случае является подход [15, 19], основанный на решении задачи назначения конечного спектра [19–22].

Понятие слабой наблюдаемости [4, 5] соответствует расширению определения ненаблюдаемого подпространства на системы с запаздыванием и в терминах формы Смита эквивалентно существованию у нее ненулевого диагонального элемента. Слабо наблюдаемые системы мало изучены, так как по отношению к двойственной задаче для слабо управляемой системы коэффициенты характеристического квазиполинома нельзя назначить произвольно [13, 23].

Для линейных систем нейтрального типа критерий существования непрерывной однозначной операции восстановления текущего состояния по измерениям прошлого выхода (критерий конструктивной идентифицируемости [24]) состоит из двух условий [24, 25]. Одно из условий – это расширение спектрального условия (условия полной идентифицируемости) на системы нейтрального типа, а второе в терминах двойственной системы управления представляет собой [26] свойство апериодической управляемости разностной системы, описывающей динамику изменения скачков производных решения исходной системы. По отношению к двойственной системе управления эти условия равносильны разрешимости задач модальной управляемости (управляемость коэффициентами характеристического квазиполинома) [27, 28] и полной 0-управляемости в классе регуляторов с обратной связью [27, 29]. Достаточно похожая ситуация и в случае вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием [30, 31] (см. приведенную там библиографию).

В публикациях [22, 32] показано, что системы, обладающие свойством полной 0-управляемости, можно замкнуть обратной связью по состоянию так, чтобы у замкнутой системы вырождались ее первые компоненты, соответствующие фазовому вектору исходной системы. Возникает вопрос: можно ли в этом случае по отношению к двойственной системе построить наблюдатель так, чтобы система, определяющая динамику ошибки оценивания, была точечно вырожденной в направлениях, соответствующих наблюдаемым переменным, т.е. построить наблюдатель с финитной за конечное время ошибкой. В настоящей статье предлагается критерий существования и метод синтеза такого наблюдателя.

2. Постановка задачи

Пусть задана линейная автономная дифференциально-разностная система нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями:

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} D_i \dot{x}(t-ih) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t-ih), \quad t > 0, \tag{2.1}$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{m} C_i x(t-ih), \quad t \geqslant 0, \tag{2.2}$$

где $D_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C_i \in \mathbb{R}^{r\times n}$, x – вектор решения, y – вектор выходных величин, доступных наблюдению (выход), $h = \mathrm{const} > 0$. Решение уравнения (2.1) однозначно задается начальной функцией $x(t) = \tilde{x}(t)$, $t \in [-mh, 0]$. Далее считаем, что функция $\tilde{x} \in \widetilde{\mathbf{C}}\big([-mh,0],\mathbb{R}^n\big)$ является неизвестной, где $\widetilde{\mathbf{C}}\big([-mh,0],\mathbb{R}^n\big)$ – класс непрерывных на отрезке $[-mh,0]$ функций, имеющих на этом отрезке кусочно-непрерывную производную.

Обозначим: $I_i \in \mathbb{R}^{i\times i}$ – единичная матрица, λ – оператор сдвига, определяемый для заданного $h > 0$ правилом $\lambda^k f(t) = f(t-kh)$ (для произвольной функции f). Введем полиномиальные матрицы

$$D(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i D_i, \quad A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i, \quad C(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i C_i$$

и перепишем систему (2.1), (2.2) в операторном виде

$$\big(I_n - D(\lambda)\big)\dot{x}(t) = A(\lambda)x(t), \quad t > 0, \tag{2.3}$$

$$y(t) = C(\lambda)x(t), \quad t \geqslant 0. \tag{2.4}$$

З а д а ч а. *Требуется построить асимптотически устойчивую линейную автономную систему запаздывающего типа с сосредоточенными и распределенными запаздываниями такую, что начиная с некоторого момента времени выход этой системы будет тождественно равен решению системы* (2.3), (2.4) *независимо от начальных состояний исходной и построенной систем.*

3. Определение и существование финитного наблюдателя

В качестве системы, которую требуется построить в задаче, определим финитный наблюдатель и получим условия его существования.

Пусть $\mathbb{R}^{i\times j}[p,\lambda]$ – множество матриц размеров $i \times j$, элементы которых суть полиномы двух переменных p и λ ($\mathbb{R}^{i\times j}[0,\lambda] = \mathbb{R}^{i\times j}[\lambda]$). Через $\mathfrak{R}^{i\times j}[p,\lambda]$ обозначим множество матриц вида

$$\overline{C}(p,\lambda) + \sum_{k=0}^{\bar{m}} \int_0^h \widehat{C}_k(s)\lambda^k e^{-ps} ds,$$

где матрица $\overline{C}(p,\lambda) \in \mathbb{R}^{i\times j}[p,\lambda]$, матрицы $\widehat{C}_k(s)$ представляют собой конечные суммы слагаемых вида $e^{\alpha_1 s}\big(\cos(\alpha_2 s)\widehat{C}^1(s)+\sin(\alpha_2 s)\widehat{C}^2(s)\big)$, $\widehat{C}^i(s) \in \mathbb{R}^{i\times j}[s]$, $i=1,2$; числа $\alpha_i \in \mathbb{R}\,(i=1,2)$ и $\bar{m} \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ могут быть любыми.

Рассмотрим следующее линейное автономное дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot z(t) = \widetilde{A}(p,\lambda)z(t) + \widetilde{F}_1\big(t, y(t),\ldots,y(t-\tilde n_1 h)\big), \quad t > \tilde t, \tag{3.1}$$

с выходом

$$v(t) = \widetilde{C}(\lambda)z(t) + \widetilde{F}_2\big(t, y(t),\ldots,y(t-\tilde n_2 h)\big), \quad t \geqslant \tilde t, \tag{3.2}$$

где $\widetilde{A}(p,\lambda)\in\mathfrak{R}^{\tilde n\times\tilde n}[p,\lambda]$, $\widetilde{C}(\lambda)\in\mathbb{R}^{n\times\tilde n}[\lambda]$; $\widetilde{F}_i=\widetilde{F}_i(t,\xi_0,\ldots,\xi_{\tilde n_i})$ $(t\in\mathbb{R},\ \xi_i\in\mathbb{R}^r)$ – известные непрерывные векторные функции, линейные по переменным ξ_i; числа $\tilde n\in\mathbb{N}$, $\tilde n_i \in \mathbb{N}$ $(i=1,2)$ и $\tilde t>0$ уточняются далее в процессе синтеза наблюдателя (3.1), (3.2). Решение уравнения (3.1) однозначно задается начальной функцией $z(t)=\tilde z(t)$, $t\in[\tilde t-m_1h,\tilde t]$, где число $m_1=\deg_\lambda \widetilde{A}(p,\lambda)$ (максимальная степень переменной λ элементов матрицы $\widetilde{A}(p,\lambda)$), функция $\tilde z\in\mathbf{C}\big([\tilde t-m_1h,\tilde t],\mathbb{R}^{\tilde n}\big)$, $\mathbf{C}\big([a,b],\mathbb{R}^n\big)$ – пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с равномерной нормой. Также в операторной записи системы (3.1) используются следующие обозначения (для полиномиальной матрицы $\widehat{C}(s)$ и функции f):

$$\int\limits_0^h \widehat{C}(s)\lambda^i e^{-ps}ds f(t) = \int\limits_0^h \widehat{C}(s) f(t-ih-s)ds, \quad pf(t)=\dot f(t).$$

Определение. Систему (3.1), (3.2) *назовем финитным наблюдателем для системы* (2.3), (2.4), *если*

1) *найдется число* $t_1>\tilde t$ *такое, что разность* $\varepsilon(t)=v(t)-x(t)$, $t>\tilde t$, *удовлетворяет тождеству*

$$\varepsilon(t)\equiv 0, \quad t\geqslant t_1, \tag{3.3}$$

каковы бы ни были начальные функции $\tilde x\in\widetilde{\mathbf{C}}\big([-mh,0],\ \mathbb{R}^n\big)$ *и* $\tilde z\in \mathbf{C}\big([\tilde t-m_1h,\tilde t],\ \mathbb{R}^{\tilde n}\big)$, *систем* (2.3), (2.4) *и* (3.1), (3.2) *соответственно*;

2) *уравнение* (3.1) *имеет запаздывающий тип и является асимптотически устойчивым.*

Величину $\varepsilon=v-x$ назовем ошибкой наблюдения.

Перейдем к вопросу существования финитного наблюдателя. Рассмотрим систему (2.3), (2.4). Пусть $W(p,\lambda)=p(I_n-D(\lambda))-A(\lambda)$ – характеристическая матрица системы (2.3) (при $\lambda=e^{-ph}$), $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел. Условия

$$1)\ \operatorname{rank}\begin{bmatrix} W(p,e^{-ph}) \\ C(e^{-ph})\end{bmatrix} = n \qquad \forall p\in\mathbb{C} \tag{3.4}$$

и

$$(3.5) \qquad 2)\ \operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

являются [24, 25] необходимыми и достаточными для того, чтобы в достаточно большой момент времени $t_2 > 0$ существовала непрерывная однозначная операция восстановления текущего состояния $\mathfrak{L}_{t_2} : y \to x_{t_2}$, где $y \in Y_{[0,t_2]}$, $Y_{[0,t]} = \Big\{ y(\tau, \tilde{x}),\ \tau \in [0,t] \,:\, \tilde{x} \in \widetilde{\mathbf{C}}\big([-mh, 0], \mathbb{R}^n\big)\Big\}$ – множество всех выходов (2.4), порожденных всевозможными начальными функциями $\tilde{x} \in \in \widetilde{\mathbf{C}}\big([-mh, 0], \mathbb{R}^n\big)$; $x_t = x_t(\tau) = x(t+\tau)$, $\tau \in [t - mh, t]$, – состояние уравнения (2.4) в момент времени $t > 0$, т.е. чтобы существовал однозначный непрерывный оператор $\mathfrak{L}_{t_2} : \mathbf{C}\big([0, t_2], \mathbb{R}^n\big) \to \mathbf{C}\big([-mh, 0], \mathbb{R}^n\big)$. Более детально: соотношение (3.4) обеспечивает импликацию $(y(t) \equiv 0,\ t \in [0, t_2]) \Rightarrow (x(t) \equiv 0,\ t \in \in [t_2 - mh, t_2])$, а условие (3.5) необходимо для непрерывности оператора $\mathfrak{L}_{t_2}$.

Пример. Для системы $\dot{x}(t) - \dot{x}(t-h) = x(t)$, $y(t) = x(t) - x(t-h)$, $t > 0$, условие (3.4) выполнено, а условие (3.5) нарушается. Операция восстановления текущего состояния имеет вид $x(t) = \dot{y}(t)$, $t \in [t_2 - h, t_2]$. Эта операция является однозначной, но не является непрерывной, поскольку из равномерной сходимости последовательности функций не следует равномерная сходимость производных этих же функций (см. также [14]).

Следующее утверждение является критерием существования финитного наблюдателя.

Теорема. Для того чтобы для системы (2.3), (2.4) *существовал финитный наблюдатель* (3.1), (3.2)*, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия* (3.4), (3.5).

Доказательство. Необходимость. Предположим, что финитный наблюдатель (3.1), (3.2) существует. Тогда найдется момент времени $t_2 = t_1 + +mh$ такой, что посредством наблюдателя (3.1), (3.2) точно вычисляется состояние x_{t_2} системы (2.3), (2.4). Такую процедуру определения состояния x_{t_2} можно трактовать как результат действия оператора $\mathfrak{L}_{t_2} y = x_{t_2}$, $y \in Y_{[0,t_2]}$. В силу тождества (3.3) оператор $\mathfrak{L}_{t_2}$ является однозначным. А в силу представления решения уравнения (3.1) по формуле Коши оператор $\mathfrak{L}_{t_2}$ является непрерывным. Из существования однозначного непрерывного оператора $\mathfrak{L}_{t_2}$ следует [24, 25] необходимость условий (3.4), (3.5).

Достаточность условий (3.4), (3.5) следует из процедуры синтеза наблюдателя (3.1), (3.2), описанного в разделе 4. Теорема доказана.

4. Синтез финитного наблюдателя

Считаем, что условия (3.4), (3.5) выполнены. Синтез наблюдателя разобьем на два этапа. Сначала построим наблюдатель для случая линейной автономной дифференциально-разностной системы запаздывающего типа со скалярным выходом. Затем применим эти результаты к общему случаю системы нейтрального типа (2.3), (2.4).

4.1. Случай системы запаздывающего типа со скалярным выходом

Считаем, что в уравнении (2.3) матрица $D(\lambda) = 0$, а в выходе (2.4) матрица $C(\lambda) = [c_1(\lambda), \ldots, c_n(\lambda)] \in \mathbb{R}^{1\times n}[\lambda]$, т.е. функция y является скалярной. Заметим, что условие (3.5) при $D(\lambda) = 0$ всегда выполнено.

Цель настоящего раздела – построить наблюдатель для системы (2.1), (2.2) запаздывающего типа так, чтобы: а) поведение компонент n-вектора ошибки наблюдателя описывалось первыми n компонентами решения линейной автономной системы запаздывающего типа с заданным конечным спектром; б) элементы всех строк, за исключением последней, матрицы, обратной к характеристической матрице этой системы, были целыми функциями экспоненциального типа, интегрируемыми в квадрате на мнимой оси. Тогда, применив теорему Винера–Пэли к Лаплас-образу решения системы, описывающей ошибку наблюдателя, получим, что все компоненты ее решения, за исключением последней, будут финитными функциями.

Обозначим: $a_{ij}(\lambda),\ i,j = \overline{1,n},$ – элементы матрицы $A(\lambda)$;

$$M(p,\lambda) = \big[M_1(p,\lambda), \ldots, M_{n+1}(p,\lambda)\big]'$$

– алгебраические дополнения к элементам (начиная с первого) последнего столбца матрицы

$$W_g(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \ldots & -a_{1n}(\lambda) & -g_1(p,\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1}(\lambda) & \ldots & p - a_{nn}(\lambda) & -g_n(p,\lambda) \\ -c_1(\lambda) & \ldots & -c_n(\lambda) & -g_{n+1}(p,\lambda) \end{bmatrix},$$

а $w_g(p,\lambda) = |W_g(p,\lambda)|$ – определитель этой матрицы, символ $'$ (штрих) обозначает операцию транспонирования. Столбец

$$g(p,\lambda) = [g_1(p,\lambda), \ldots, g_{n+1}(p,\lambda)]'$$

состоит из дробно-рациональных функций, вид которых конкретизируется далее.

Ввиду условия (3.4) система полиномиальных уравнений

$$M_i(p,\lambda) = 0, \quad p,\lambda \in \mathbb{C}, \quad i = \overline{1,n+1}, \tag{4.1}$$

относительно переменных p,λ может иметь лишь конечное [32], в частности пустое, множество решений (p,λ). Поэтому найдутся ненулевой полином

$$d_0(p) = \prod_{i=1}^{\mu}(p - p_i)^{l_i},$$

набор корней которого обозначим $P^* = \{p_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1,\mu}\}$, и векторный полином $\tilde{\varphi}(p,\lambda) = [\tilde{\varphi}_1(p,\lambda), \ldots, \tilde{\varphi}_{n+1}(p,\lambda)]'$ такие, что

$$\tilde{\varphi}'(p,\lambda)M(p,\lambda) = d_0(p). \tag{4.2}$$

Замечание 1. Разложение (4.2) можно получить через построение базиса Гребнера, через спектральное приведение [21, 22], а также по алгоритму Евклида, рассматривая полиномы $M_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n+1}$, как полиномы от λ с дробно-рациональными коэффициентами, зависящими от p.

Пусть

$$f(p,\lambda)=[f_1(p,\lambda),\dots,f_{n+1}(p,\lambda)]',$$

$$f_j(p,\lambda)=\tilde{f}_j(\lambda)+\sum_{k=1}^{\mu}\sum_{i=0}^{l_k}\tilde{f}_{jki}(\lambda)\int\limits_0^h e^{-(p-p_k)s}\frac{s^i}{i!}ds,\quad j=\overline{1,n+1}, \tag{4.3}$$

– дробно-рациональные при $e^{-ph}=\lambda$ функции с полиномиальными коэффициентами $\tilde{f}_j(\lambda)$ и $\tilde{f}_{jki}(\lambda)$; $p_k\in P^*$, $k=\overline{1,\mu}$. Функции $f_j(p,\lambda)$ таковы, что после применения формулы Эйлера к членам с комплексно сопряженными $p_{k_{1,2}}$ все коэффициенты выражения $f_j(p,\lambda)$ являются действительными величинами. Вычисляя, получаем ($\lambda=e^{-ph}$, $\lambda_k=e^{-p_kh}$)

$$\int\limits_0^h e^{-(p-p_k)s}\frac{s^i}{i!}ds=\frac{(-1)^{i+1}}{i!}\frac{d^i}{dp^i}\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda_k(p-p_k)}\right),\quad i=0,1,\dots$$

Лемма 1. Для произвольного полинома $\tilde{d}_0(p,\lambda)$ найдется векторная функция $g(p,\lambda)=\varphi(p,\lambda)+f(p,\lambda)$ такая, что

$$w_g(p,\lambda)=-g'(p,\lambda)M(p,\lambda)=\tilde{d}_0(p,\lambda),$$

где $f(p,\lambda)$ – функция вида (4.3), $\varphi(p,\lambda)=[\varphi_1(\lambda),\dots,\varphi_n(\lambda),\varphi_{n+1}(p,\lambda)]'$ – полиномы, причем $\varphi_{n+1}(p,\lambda)=\sum_{j=0}^{\tilde{r}+1}\breve{\varphi}_j(\lambda)p^j$, если $\tilde{r}=\nu-n-1\geqslant 0$, $\nu=\deg_p\tilde{d}_0(p,\lambda)$, $-\breve{\varphi}_{\tilde{r}+1}(\lambda)$ – коэффициент при старшей степени p полинома $\tilde{d}_0(p,\lambda)$; $\varphi_{n+1}(p,\lambda)=\breve{\varphi}_0(\lambda)$, если $\nu=n$, и $\varphi_{n+1}(p,\lambda)=0$, если $\nu<n$.

Доказательство леммы 1 см. в Приложении.

Выберем полином $d(p)$ степени $n+3$

$$d(p)=\prod_{i=1}^{\mu_1}(p-p_i)^{k_i},\quad p_i\in\widetilde{P},$$

где $\widetilde{P}=\{p_i\in\mathbb{C}, i=\overline{1,\mu_1}\}$ – множество его различных действительных или комплексно сопряженных корней с алгебраическими кратностями k_i. При формировании набора корней $\widetilde{P}$ придерживаемся правила (см. замечание (П.1) в доказательстве леммы 1): различным $p_i\in\widetilde{P}$ должны соответствовать различные $\lambda_i=e^{-p_ih}$.

Пусть множество $\widetilde{\Lambda}=\{\lambda_i=e^{-p_ih}\,|\,p_i\in\widetilde{P},\ i=\overline{1,\mu_1}\}$. Положим

$$a_1(\lambda)=\prod_{i=1}^{\mu_1}(\lambda-\lambda_i)^{k_i},\quad \lambda_i=e^{-p_ih}\in\widetilde{\Lambda}, \tag{4.4}$$

тогда все корни полинома $d(p)$ являются корнями квазиполинома $a_1(e^{-ph})$, не меньшей кратности, поэтому функция $a_1(e^{-ph})/d(p)$ – целая. Выберем (см. доказательство леммы 1) полином $a_2(\lambda)$ так, чтобы функция $\big(a_2(e^{-ph})-p\big)/d(p)$ была целой. В этом случае в выражении $\psi(\lambda) = d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda)$ все корни знаменателя являются корнями числителя, не меньшей кратности, поэтому $\psi(\lambda)$ – полином.

Обозначим через

$$\tilde{d}(p,\lambda) = \big(d(a_2(\lambda)) - d(p)\big)/\big(a_2(\lambda)-p\big) \tag{4.5}$$

полином (в силу теоремы Безу) степени $n+2$ относительно p, старший коэффициент которого равен единице. Представим его в виде

$$\tilde{d}(p,\lambda) = p\tilde{d}_1(p,\lambda) + \tilde{d}_2(\lambda), \tag{4.6}$$

где $\tilde{d}_1(p,\lambda)$, $\tilde{d}_2(\lambda)$ – некоторые полиномы. Выбором столбца $g(p,\lambda)$ согласно лемме 1 обеспечим, чтобы определитель матрицы $W_g(p,\lambda)$ был равен полиному $\tilde{d}_1(p,\lambda)$ степени $n+1$: $w_g(p,\lambda) = \tilde{d}_1(p,\lambda)$.

Введем матрицу $W_b(p,\lambda)$, которая получается из матрицы $W_g(p,\lambda)$ заменой последнего столбца $\big(-g(p,\lambda)\big)$ на столбец $\big(-b(p,\lambda)\big) = [-b_1(p,\lambda),\ldots$ $\ldots,-b_{n+1}(p,\lambda)]'$. Столбец $b(p,\lambda)$ строим согласно лемме 1, положив $\tilde{d}_0(p,\lambda) = 1$, тогда $w_b(p,\lambda)=1$, где $w_b(p,\lambda) = |W_b(p,\lambda)|$.

Определим матрицу

$$\widetilde{A}(p,\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & \ldots & a_{1n}(\lambda) & g_1(p,\lambda) & b_1(p,\lambda) & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(\lambda) & \ldots & a_{nn}(\lambda) & g_n(p,\lambda) & b_n(p,\lambda) & 0 \\ c_1(\lambda) & \ldots & c_n(\lambda) & g_{n+1}(p,\lambda)+p & b_{n+1}(p,\lambda) & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \tilde{d}_2(\lambda) & 0 & a_1(\lambda) \\ 0 & \ldots & 0 & d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda) & 0 & a_2(\lambda) \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

и вектор e_{n+1} как $(n+1)$-й столбец единичной матрицы I_{n+3}. Наблюдатель (3.1), (3.2) для системы (2.3), (2.4) ($D(\lambda)=0$, $C(\lambda)\in\mathbb{R}^{1\times n}[\lambda]$) будем строить в виде ($\widetilde{F}_2 = 0$):

$$\dot{z}(t) = \widetilde{A}(p,\lambda)z(t) - e_{n+1}y(t), \tag{4.8}$$

$$v(t) = \big[I_n, 0\big]z(t), \quad t>0 \tag{4.9}$$

(матрица $[I_n,0]\in\mathbb{R}^{n\times(n+3)}$). В силу леммы 1 переменная p, содержащаяся в элементах матрицы $\widetilde{A}(p,\lambda)$, может входить только в знаменатель дробно-рациональных функций (если все дробно-рациональные функции представить в виде правильных относительно p дробей). Поэтому система (4.8) имеет запаздывающий тип.

Погрешность $\varepsilon_0 = v - x$ оценки v наблюдателем (4.8), (4.9) решения x исходной системы (2.3), (2.4) представляет собой первые n компонент решения однородной системы (4.8) ($y=0$)

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}(t) = \widetilde{A}(p,\lambda)\tilde{\varepsilon}(t), \quad t>0, \tag{4.10}$$

где $\tilde{\varepsilon} = [\varepsilon_0, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}]'$.

Покажем, что при любом непрерывном начальном состоянии $\tilde{\varepsilon}(t)$, $t \leqslant 0$, найдется момент времени $t_1 > 0$ такой, что выполняется тождество $\varepsilon_0(t) \equiv 0$, $t \geqslant t_1$.

Разлагая определитель $|\widetilde{W}(p)|$ характеристической матрицы $\widetilde{W}(p) = pI_{n+3} - \widetilde{A}(p, e^{-ph})$ системы (4.10) по последнему столбцу, с учетом соотношений (4.5), (4.6) получаем ($\lambda = e^{-ph}$), что

$$|\widetilde{W}(p)| = \big(p - a_2(\lambda)\big)\big(pw_g(p,\lambda) + \tilde{d}_2(\lambda)w_b(p,\lambda)\big) + \\ + a_1(\lambda)\big(-d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda)\big)\big(-w_b(p,\lambda)\big) = \\ = \big(p - a_2(\lambda)\big)\big(p\tilde{d}_1(p,\lambda) + \tilde{d}_2(\lambda)\big) + d(a_2(\lambda)) = d(p).$$

Следовательно, система (4.10) имеет конечный спектр, определяемый корнями заранее выбранного полинома $d(p)$.

Элементы первых $n+2$ строк обратной матрицы $\widetilde{W}^{-1}(p)$ являются целыми функциями экспоненциального типа, поскольку таковыми являются функции $m_{ij}(p, e^{-ph})/d(p)$, $i = \overline{1, n+3}$, $j = \overline{1, n+2}$, где $m_{ij}(p,\lambda)$ – дополнительный минор к элементу $a_{ij}(p,\lambda)$ матрицы $pI_{n+3} - \widetilde{A}(p,\lambda)$. Это следует из разложения миноров $m_{ij}(p,\lambda)$ по последнему столбцу и выбора полиномов $a_i(\lambda)$, $i = 1, 2$: корни полинома $d(p)$ являются корнями функций $a_1(e^{-ph})$, $p - a_2(e^{-ph})$, не меньшей кратности, поэтому функции $m_{ij}(p, e^{-ph})/d(p)$, $i = \overline{1, n+3}$, $j = \overline{1, n+2}$, – целые. Поскольку элементы матрицы $\widetilde{A}(p, e^{-ph})$ ограничены при $p = \mathbf{i}\omega$, $-\infty < \omega < \infty$, $\mathbf{i}$ – мнимая единица, то легко видеть, что модули элементов матрицы $\widetilde{W}^{-1}(\mathbf{i}\omega)$ имеют порядок $O(|\omega|^{-1})$, когда $|\omega| \to \infty$. Таким образом, элементы первых $n+2$ строк обратной матрицы $\widetilde{W}^{-1}(p)$ образованы целыми функциями экспоненциального типа, интегрируемыми в квадрате на мнимой оси. Этот факт служит основанием [33] для применения теоремы Винера–Пэли к Лаплас-образу первых $n+2$ компонент: $\varepsilon_0(t)$, $x_{n+i}(t)$, $i = 1, 2$, $t > 0$, решения системы (4.10).

Переходя от системы (4.10) к ее Лаплас-образу, на основании теоремы Винера–Пэли заключаем [33] о существовании момента времени $t_1 > 0$ такого, что: $\varepsilon_0(t) \equiv 0$, $x_{n+i}(t) \equiv 0$, $i = 1, 2$, $t \geqslant t_1$. Если старшая степень λ в i-й строке матрицы $\big(pI_{n+3} - \widetilde{A}(p,\lambda)\big)^{-1}$ равна α_i, $i = \overline{1, n+2}$, то согласно теореме Винера–Пэли момент времени $t_1 = \alpha_0 h$, $\alpha_0 = \max\{\alpha_i, i = \overline{1, n+2}\}$. Тождество (3.3) обосновано.

Замечание 2. Поскольку полином $d(p)$ является характеристическим для системы (4.10), описывающей поведение ошибки ε_0 наблюдателя (4.8), (4.9), то согласно определению 1 его следует выбирать асимптотически устойчивым.

4.2. Общий случай системы нейтрального типа

Рассмотрим систему (2.3), (2.4). В силу условия (3.5) найдутся [28, 29] матрицы $L_1(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times r}[\lambda]$ и $L_2(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times r}[\lambda]$ такие, что справедливо тождество

$$\big|I_{n+r} - D_L(\lambda)\big| \equiv 1, \tag{4.11}$$

где матрица

$$D_L(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda) & \lambda L_1(\lambda) \\ C(\lambda) & \lambda L_2(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Обозначим через

$$\Pi(\lambda) = \begin{bmatrix} \Pi_{11}(\lambda) & \Pi_{12}(\lambda) \\ \Pi_{21}(\lambda) & \Pi_{22}(\lambda) \end{bmatrix}$$

матрицу, обратную к матрице $\big(I_{n+r} - D_L(\lambda)\big)$: $\Pi(\lambda) = \big(I_{n+r} - D_L(\lambda)\big)^{-1}$. Здесь блок $\Pi_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$, размеры остальных блоков понятны. В силу условия (4.11) матрица $\Pi(\lambda) \in \mathbb{R}^{(n+r)\times(n+r)}[\lambda]$, т.е. является полиномиальной. Введем функцию

$$\chi(t) = \big(I_n - D(\lambda)\big)x(t), \quad t \geqslant 0. \tag{4.12}$$

Пусть $\hat{\chi}(t)$, $\hat{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $t \in \mathbb{R}$, – произвольная функция. Умножая очевидное равенство

$$\begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) & -\lambda L_1(\lambda) \\ -C(\lambda) & I_r - \lambda L_2(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{\chi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi(t) \\ -y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda L_1(\lambda)\hat{\chi}(t) \\ \big(I_r - \lambda L_2(\lambda)\big)\hat{\chi}(t) \end{bmatrix}, \quad t \geqslant \gamma_1 h,$$

где $\gamma_1 = \max\big\{\deg_\lambda \Pi_{1i}(\lambda),\ i = 1, 2\big\}$, слева на матрицу $\Pi(\lambda)$, приходим к соотношению

$$x(t) = \Pi_{11}(\lambda)\chi(t) - \Pi_{12}(\lambda)y(t), \quad t \geqslant \gamma_1 h. \tag{4.13}$$

На основании формул (4.12), (4.13) систему (2.3), (2.4) перепишем в виде

$$\dot{\chi}(t) = Q(\lambda)\chi(t) + P(\lambda)y(t), \tag{4.14}$$

$$y_\chi(t) = K(\lambda)\chi(t),\ t \geqslant \gamma_2 h, \tag{4.15}$$

где матрицы $Q(\lambda) = A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)$, $P(\lambda) = -A(\lambda)\Pi_{12}(\lambda)$,

$$K(\lambda) = \begin{bmatrix} C(\lambda)\Pi_{11}(\lambda) \\ \big(I_n - D(\lambda)\big)\Pi_{11}(\lambda) - I_n \end{bmatrix},$$

выходной сигнал y_χ является известной функцией и определяется формулой

$$y_\chi(t) = \begin{bmatrix} I_r + C(\lambda)\Pi_{12}(\lambda) \\ \big(I_n - D(\lambda)\big)\Pi_{12}(\lambda) \end{bmatrix} y(t), \quad t \geqslant \gamma_2 h,$$

число $\gamma_2 = \gamma_1 + m$. Уравнение (4.14) является неоднородным линейным автономным дифференциально-разностным уравнением запаздывающего типа с соизмеримыми запаздываниями и известной неоднородной частью $P(\lambda)y$.

Решение χ уравнения (4.14) представим в виде суммы

$$\chi = \chi^0 + \chi^*, \tag{4.16}$$

где χ^0 – решения однородной системы

$$\dot{\chi}^0(t) = Q(\lambda)\chi^0(t), \quad t \geqslant \gamma_2 h, \tag{4.17}$$

с начальным условием $\chi^0(t) = \chi(t)$, $t \leqslant \gamma_2 h$, а χ^* – решение неоднородной системы (4.14) ($\chi = \chi^*$) с нулевым начальным условием $\chi^*(t) \equiv 0$, $t \leqslant \gamma_2 h$. Пусть $F^0(t)$ – матрица Коши для уравнения (4.14), тогда функция χ^* известна и определяется по формуле Коши

$$\chi^*(t) = \int\limits_{\gamma_2 h}^{t} F^0(t-\tau)P(\lambda)y(\tau)d\tau, \ t \geqslant \gamma_2 h. \tag{4.18}$$

Уравнение (4.17) снабдим известным в силу равенств (4.15), (4.18) выходным сигналом

$$y_\chi^0(t) = K(\lambda)\chi^0(t), \ t \geqslant 2\gamma_2 h, \tag{4.19}$$

где функция $y_\chi^0 = y_\chi - K(\lambda)\chi^*$.

Л е м м а 2. Если выполнено условие (3.4), *то*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} pI_n - Q(e^{-ph}) \\ K(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \qquad \forall p \in \mathbb{C}. \tag{4.20}$$

Доказательство леммы 2 см. в Приложении.

Пусть

$$K(\lambda) = \begin{bmatrix} K_1(\lambda) \\ \dots \\ K_{n+r}(\lambda) \end{bmatrix},$$

где $K_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n+r}$, – i-я строка матрицы $K(\lambda)$. Зафиксируем произвольный номер $i_0 \in \{1, \dots, n+r\}$. В силу условия (4.20) найдется [19] матрица $L_3(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times r}[\lambda]$ такая, что

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} pI_n - Q_1(e^{-ph}) \\ K_{i_0}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \qquad \forall p \in \mathbb{C}, \tag{4.21}$$

где $Q_1(\lambda) = Q(\lambda) + L_3(\lambda)K(\lambda)$.

Уравнение (4.17) представим в виде неоднородного уравнения с известной правой частью

$$\dot{\chi}^0(t) = Q_1(\lambda)\chi^0(t) - L_3(\lambda)y_\chi^0(t), \quad t \geqslant \gamma_3 h, \tag{4.22}$$

где $\gamma_3 = 2\gamma_2 + \deg_\lambda L_3(\lambda)$. Функцию χ^0 запишем как сумму

$$\chi^0 = \chi_0 + \chi_* \tag{4.23}$$

решения χ_0 однородной системы

$$\dot{\chi}_0(t) = Q_1(\lambda)\chi_0(t), \quad t \geqslant \gamma_3 h, \tag{4.24}$$

с начальным условие $\chi_0(t) = \chi^0(t)$, $t \leqslant \gamma_3 h$, и решения неоднородной системы (4.22) ($\chi^0 = \chi_*$) с нулевым начальным условием $\chi_*(t) \equiv 0$, $t \leqslant \gamma_3 h$. Функция χ_* является известной и определяется по формуле Коши

$$\chi_*(t) = -\int\limits_{\gamma_3 h}^{t} F_0(t-\tau)L_3(\lambda)y^0_\chi(\tau)d\tau, \quad t \geqslant \gamma_3 h, \tag{4.25}$$

где $F_0(t)$ – матрица Коши для уравнения (4.24). К уравнению (4.24) добавим известный в силу соотношений (4.19), (4.25) выходной сигнал

$$y^{\chi_0}_{i_0}(t) = K_{i_0}(\lambda)\chi_0(t), \quad t \geqslant \gamma_4 h, \tag{4.26}$$

где $y^{\chi_0}_{i_0}$ – i_0-я компонента функции $y^0_\chi - K(\lambda)\chi_*$, число $\gamma_4 = \gamma_2 + \gamma_3$.

На основании формул (4.16), (4.18), (4.23), (4.25) запишем равенство

$$x(t) = \Pi_{11}(\lambda)\chi_0(t) + \widetilde{F}_2\big(t, y(t), \ldots, y(t - n_2 h)\big), \quad t \geqslant (\gamma_1 + \gamma_3)h, \tag{4.27}$$

где функция $\widetilde{F}_2$ определяется выражением

$$\begin{aligned} &\widetilde{F}_2\big(t, y(t), \ldots, y(t - \tilde{n}_2 h)\big) = \\ &= \Pi_{11}(\lambda)\left(\int\limits_{\gamma_2 h}^{t} F^0(t-\tau)P(\lambda)y(\tau)d\tau - \int\limits_{\gamma_3 h}^{t} F_0(t-\tau)L_3(\lambda)y^0_\chi(\tau)d\tau\right) - \\ &- \Pi_{12}(\lambda)y(t), \quad t \geqslant (\gamma_1 + \gamma_3)h, \end{aligned} \tag{4.28}$$

число $\tilde{n}_2 \leqslant \gamma_1 + \gamma_3$.

Поскольку выполняется условие (4.21), то для системы (4.24), (4.26) существует финитный наблюдатель (4.8), (4.9), обеспечивающий тождество (3.3). Пусть такой наблюдатель определяет матрица $\widetilde{A}(p, \lambda)$, описанная формулой (4.7). На основании соотношения (4.27) для исходной системы (2.3), (2.4) существует финитный наблюдатель (3.1), (3.2), в котором число $\tilde{n} = n + 3$, матрица $\widetilde{A}(p, \lambda)$ получена в ходе построения наблюдателя для системы (4.24), (4.26) (т.е. матрица (4.7)), матрица

$$\widetilde{C}(\lambda) = \Pi_{11}(\lambda)\big[I_n,\, 0\big], \tag{4.29}$$

где $\big[I_n,\, 0\big] \in \mathbb{R}^{n\times(n+3)}$, функция

$$\widetilde{F}_1\big(t, y(t), \ldots, y(t - \tilde{n}_1 h)\big) = -e_{n+1}y^{\chi_0}_{i_0}(t), \quad t \geqslant \gamma_4 h, \tag{4.30}$$

функция $\widetilde{F}_2\big(t, y(t), \ldots, y(t - \tilde{n}_2 h)\big)$ задается выражением (4.28).

Ошибка оценивания решения x системы (2.3), (2.4) наблюдателем (3.1), (3.2) определяется выражением

$$\varepsilon(t) = \Pi_{11}(\lambda)\left(\big[I_n, 0]z(t) - \chi_0(t)\right), \quad t \geqslant \tilde{t}, \tag{4.31}$$

где $\tilde{t} = \gamma_4 h$. В силу выбора матрицы $\widetilde{A}(p,\lambda)$ найдется момент времени $\tilde{t}_1 > \tilde{t}$ такой, что

$$\big[I_n, 0]z(t) - \chi_0(t) \equiv 0, \quad t \geqslant \tilde{t}_1.$$

Поэтому $\varepsilon(t) \equiv 0$, $t \geqslant t_1$, где $t_1 = \tilde{t}_1 + h\deg_\lambda \Pi_{11}(\lambda)$, т.е. выполняется тождество (3.3).

5. Реализация наблюдателя. Пример

Конкретизируем последовательность действий, необходимых для реализации финитного наблюдателя (3.1), (3.2).

1. Строим (например, согласно [28]) матрицы $L_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, обеспечивающие тождество (4.11), после чего находим матрицу $\Pi(\lambda)$ и вычисляем матрицы $Q(\lambda)$, $P(\lambda)$, $K(\lambda)$.

2. Выбираем произвольную строку $K_{i_0}(\lambda)$, $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n + r\}$, матрицы $K(\lambda)$ и находим матрицу $L_3(\lambda)$, обеспечивающую условие (4.21). Для построения матрицы $L_3(\lambda)$ можно воспользоваться публикацией [19]. Далее выписываем матрицу $Q_1(\lambda)$.

3. Строим финитный наблюдатель (4.8), (4.9) для системы (4.24), (4.26). Для этого используем рассуждения подраздела 4.1. На протяжение данного п. 3 во избежание путаницы в обозначениях считаем, что $A(\lambda) = Q_1(\lambda)$ и $C(\lambda) = K_{i_0}(\lambda)$.

3.1. Определяем полиномы $d_0(p)$ и $\varphi_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, такие, что выполняется равенство (4.2). Процедура их построения описана в доказательстве леммы 1 (см. Приложение).

3.2. Выбираем асимптотически устойчивый полином $d(p)$ степени $n+3$, который будет характеристическим полиномом финитного наблюдателя, конструируемого в данном пункте. По формуле (4.4) выписываем полином $a_1(\lambda)$ и находим полином $a_2(\lambda)$ такой, чтобы функция $\big(a_2(e^{-ph}) - p\big)/d(p)$ была целой. Возможный способ выбора полинома $a_2(\lambda)$ приведен в доказательстве леммы 1 при описании полинома $a(\lambda)$.

3.3. По формуле (4.5) определяем полином $\tilde{d}(p,\lambda)$, после чего находим полиномы $\tilde{d}_1(p,\lambda)$ и $\tilde{d}_2(\lambda)$, обеспечивающие представление (4.6).

3.4. Находим векторные полиномы $g(p,\lambda)$ и $b(p,\lambda)$, обеспечивающие равенства $w_g(p,\lambda) = \tilde{d}_1(p,\lambda)$ и $w_b(p,\lambda) = 1$ соответственно. Для этого можно использовать доказательство леммы 1. После этого по формуле (4.7) выписываем матрицу $\widetilde{A}(p,\lambda)$. Наблюдатель (4.8), (4.9) построен.

4. По формулам (4.28) и (4.30) получаем функции $\widetilde{F}_i(t, y(t), \ldots, y(t - \tilde{n}_i h))$, $i = \overline{1,2}$, а по формуле (4.29) вычисляем матрицу $\widetilde{C}(\lambda)$. Далее выписываем наблюдатель (3.1), (3.2), используя матрицу $\widetilde{A}(p,\lambda)$, найденную в п. 3.4.

Проиллюстрируем схему синтеза наблюдателя (3.1), (3.2) конкретным примером. Рассмотрим систему (2.3), (2.4) следующего вида:

$$D(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad A(\lambda)=\begin{bmatrix}2-2\lambda & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad C(\lambda)=\big[1+\lambda,\,0\big],\quad h=\ln 2. \tag{5.1}$$

Для системы (2.3), (2.4) с матрицами (5.1) условия (3.4), (3.5) выполнены.

1. Строим матрицы $L_i(\lambda)$, $i=1,2$, обеспечивающие тождество (4.11), находим матрицы:

$$L_1(\lambda)=\left[-\frac{1}{2},\,0\right],\quad L_2(\lambda)=-\frac{1}{2},\quad \Pi(\lambda)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\lambda+1 & 0 & -\frac{1}{2}\lambda\\ 0 & 1 & 0\\ 1+\lambda & 0 & 1-\lambda\end{bmatrix}.$$

Далее вычисляем

$$Q(\lambda)=\begin{bmatrix}2-\lambda-\lambda^2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad P(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2-\lambda\\ 0\end{bmatrix},\quad K(\lambda)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{3}{2}\lambda+1 & 0\\ -\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Заметим, что для системы (4.14), (4.15) выход имеет вид

$$y_\chi(t)=\begin{bmatrix}\left(1-\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda\right)y(t)\\ \left(\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda\right)y(t)\\ 0\end{bmatrix}.$$

2. От системы (4.14), (4.15) перейдем к однородной системе (4.17), (4.19). В данном случае выполняется условие ($i_0=2$)

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}pI_2-Q(e^{-ph})\\ K_2(e^{-ph})\end{bmatrix}=2\quad \forall p\in\mathbb{C}$$

($K_2(\lambda)$ – вторая строка матрицы $-K(\lambda)$), поэтому переход к системе (4.24), (4.26) в данном случае излишен. Можно сразу перейти к построению наблюдателя (4.8), (4.9) для восстановления фазового вектора χ^0 уравнения (4.17), при этом используем известный выход (вторая компонента вектора $-y_\chi(t)$)

$$\tilde{y}(t)=-\left(\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda\right)y(t)=\left[\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda,\,0\right]\chi(t).$$

Таким образом, $L_3(\lambda)=Q_1(\lambda)=Q(\lambda)$, $K_{i_0}(\lambda)=\left[\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda,\,0\right]$, $i_0=2$.

3. Выберем характеристический полином системы (4.8) вида

$$d(p) = (1+p)(2+p)(3+p)(4+p)(5+p).$$

Выполнив пп. 3.1–3.4, получаем матрицу $\widetilde{A}(p,\lambda) = \left[\tilde{a}_{ij}(p,\lambda)\right]_{i,j=1}^{5}$, где

$$\tilde{a}_{11}(p,\lambda) = 2 - \lambda - \lambda^2, \quad \tilde{a}_{12}(p,\lambda) = 1,$$

$$\tilde{a}_{13}(p,\lambda) = \frac{1}{118219490218475520}(-173484028794378090627-$$
$$-458100524596592640\lambda - 214888552532541440\lambda^2 - 989560464998400\lambda^3+$$
$$+15393162788864\lambda^4) + \frac{1}{2485980758016000}(-685442674106302464-$$
$$-198425094626084139\lambda - 9007976348912214\lambda^2 + 1168086192092586\lambda^3-$$
$$-113713289038422\lambda^4 + 8390237771178\lambda^5 - 467931086422\lambda^6 + 19355063978\lambda^7-$$
$$-571070614\lambda^8 + 11254586\lambda^9 - 131614\lambda^{10} + 686\lambda^{11})\int\limits_0^h e^{-ps}ds+$$
$$+\frac{1}{130336987965869260800 0}(694396074392611184443392+$$
$$+5144440610792443755228 93\lambda + 145068946529896542809 7\lambda^2-$$
$$-175230777057286038012\lambda^3 + 16290022668905707536\lambda^4-$$
$$-1164313331767582656\lambda^5 + 63575827441746176\lambda^6 - 2595531887082496\lambda^7+$$
$$+75954508009472\lambda^8 - 1488082419712\lambda^9 + 17318346752\lambda^{10}-$$
$$-89915392\lambda^{11})\int\limits_0^h e^{-(p-2)s}ds,$$

$$\tilde{a}_{14}(p,\lambda) = -\frac{27}{10} - \frac{2+\lambda}{2}\int\limits_0^h e^{-ps}ds + \frac{5+4\lambda}{5}\int\limits_0^h e^{-(p-2)s}ds, \quad \tilde{a}_{15}(p,\lambda) = 0,$$

$$\tilde{a}_{21}(p,\lambda) = 0, \quad \tilde{a}_{22}(p,\lambda) = 0, \quad \tilde{a}_{23}(p,\lambda) = -\frac{215009128125}{1073741824},$$
$$\tilde{a}_{24}(p,\lambda) = -1, \quad \tilde{a}_{25}(p,\lambda) = 0,$$

$$\tilde{a}_{31}(p,\lambda) = \frac{1}{2}\lambda(1+\lambda), \quad \tilde{a}_{32}(p,\lambda) = 0,$$

$$\tilde{a}_{33}(p,\lambda) = \frac{-1886208 + 208320\lambda + 97720\lambda^2 + 450\lambda^3 - 7\lambda^4}{107520}+$$
$$+\frac{1}{2606739759317385216000}(-694396074392611184443392-$$

$$-5144440610792443755228893\lambda - 14506894652989654280 97\lambda^2 +$$

$$+1752307770572860380 12\lambda^3 - 1629002266890570753 6\lambda^4 +$$

$$+116431333176758265 6\lambda^5 - 63575827441746176\lambda^6 + 2595531887082496\lambda^7 -$$

$$-75954508009472\lambda^8 + 1488082419712\lambda^9 - 17318346752\lambda^{10} + 89915392\lambda^{11})\times$$

$$\times \int_0^h e^{-(p-2)s} ds + \frac{1}{4971961516032000}(685442674106302464+$$

$$+19842509462608413 9\lambda + 9007976348912214\lambda^2 - 1168086192092586\lambda^3 +$$

$$+113713289038422\lambda^4 - 8390237771178\lambda^5 + 467931086422\lambda^6 -$$

$$-19355063978\lambda^7 + 571070614\lambda^8 - 11254586\lambda^9 + 131614\lambda^{10} - 686\lambda^{11}) \int_0^h e^{-ps} ds,$$

$$\tilde{a}_{34}(p,\lambda) = \frac{2+\lambda}{4} \int_0^h e^{-ps} ds - \frac{5+4\lambda}{10} \int_0^h e^{-(p-2)s} ds, \quad \tilde{a}_{35}(p,\lambda) = 0,$$

$$\tilde{a}_{41}(p,\lambda) = 0, \quad \tilde{a}_{42}(p,\lambda) = 0,$$

$$\tilde{a}_{43}(p,\lambda) = \frac{1}{133646325550940160000}(566230522020759349493 76-$$

$$-414955359087649357824 00\lambda + 170957447608028626944 00\lambda^2 -$$

$$-461591354768369909760 0\lambda^3 + 897722941904410116096\lambda^4 -$$

$$-132245916683128012800\lambda^5 + 15191155963251916800\lambda^6 -$$

$$-1383001052951347200\lambda^7 + 100505365410451456\lambda^8 - 5829424235827200\lambda^9 +$$

$$+267962519283200\lambda^{10} - 9620000812800\lambda^{11} + 263244961296\lambda^{12} -$$

$$-5282877600\lambda^{13} + 72980600\lambda^{14} - 617400\lambda^{15} + 2401\lambda^{16}),$$

$$\tilde{a}_{44}(p,\lambda) = 0, \quad \tilde{a}_{45}(p,\lambda) = (-32+\lambda)(-16+\lambda)(-8+\lambda)(-4+\lambda)(-2+\lambda),$$

$$\tilde{a}_{51}(p,\lambda) = 0, \quad \tilde{a}_{52}(p,\lambda) = 0,$$

$$\tilde{a}_{53}(p,\lambda) = \frac{1}{143696529232370860032 00000}(-82944 + 8928\lambda - 436\lambda^2 + 7\lambda^3)\times$$

$$\times(-68352 + 8112\lambda - 422\lambda^2 + 7\lambda^3)(-47616 + 6648\lambda - 394\lambda^2 + 7\lambda^3)\times$$

$$\times(-30528 + 4392\lambda - 338\lambda^2 + 7\lambda^3)(-18624 + 2568\lambda - 226\lambda^2 + 7\lambda^3),$$

$$\tilde{a}_{54}(p,\lambda) = 0, \quad \tilde{a}_{55}(p,\lambda) = \frac{58368 - 100800\lambda + 9800\lambda^2 - 450\lambda^3 + 7\lambda^4}{107520}.$$

4. Теперь строим наблюдатель для восстановления фазового вектора исходной системы (2.3), (2.4) с матрицами (5.1). Он будет иметь вид (3.1), (3.2), где матрица $\widetilde{A}(p,\lambda)$ построена выше,

$$\widetilde{C}(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{F}_1\big(t, y(t), y(t-h)\big) = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \left(\tilde{y}(t) - \left[\frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda,\, 0\right] \int\limits_{\gamma_2 h}^{t} F^0(t-\tau) \begin{bmatrix} \lambda^2 - \lambda \\ 0 \end{bmatrix} y(\tau)d\tau \right),$$

$$\widetilde{F}_2(t, y(t), y(t-h)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \int\limits_{\gamma_2 h}^{t} F^0(t-\tau) \begin{bmatrix} \lambda^2 - \lambda \\ 0 \end{bmatrix} y(\tau)d\tau - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\lambda \\ 0 \end{bmatrix} y(t)$$

(напомним, что $F^0(t)$ – матрица Коши для уравнения (4.14)).

Проверяем, что $\big|\widetilde{W}(p)\big| = d(p)$, где $\widetilde{W}(p) = pI_5 - \widetilde{A}(p, e^{-ph})$. Вычислив матрицу $\widetilde{W}^*(p)$, присоединенную к $\widetilde{W}(p)$, убеждаемся, что корни полинома $d(p)$: $\{-1,\ldots,-5\}$ являются корнями элементов первых четырех строк матрицы $\widetilde{W}^*(p)$. Это означает, что элементы первых четырех строк матрицы $\widetilde{W}^{-1}(p)$ – целые функции. Максимальная степень переменной λ в этих строках матрицы $\big(pI_{n+3} - \widetilde{A}(p,\lambda)\big)^{-1}$ равна 18. Для данной системы $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 2$, $\gamma_3 = 4$, $\gamma_4 = 6$, $\deg_\lambda \Pi_{11}(\lambda) = 1$. Поэтому в формуле (4.31) число $\tilde{t} = 6h$, число $\tilde{t}_1 = \tilde{t} + 18h$ и тождество (3.3) выполняется при $t_1 = \tilde{t} + 19h = 25h$. Таким образом, начиная с момента времени $t_1 = 25h$ имеем точное равенство

$$x(t) = v(t), \quad t \geqslant 25h,$$

где $x(t)$ – решение системы системы (2.3), (2.4) с матрицами (5.1), $v(t)$ – выход наблюдателя (3.1), (3.2) с полученными здесь матрицами.

6. Заключение

Для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями предложены критерий существования и метод синтеза финитного наблюдателя в виде линейной автономной системы запаздывающего типа, выход которой представляет собой оценку решения исходной системы, причем погрешность такой оценки является финитной за конечное время функцией. Спектр уравнения (3.1), входящего в систему уравнений (3.1), (3.2), задающих наблюдатель, является конечным и определяется выбором полинома $d(p)$, что позволяет управлять динамическими свойствами системы (4.10), описывающей поведение погрешности оценки решения исходной системы (2.3), (2.4).

Особенностью синтеза финитного наблюдателя является необходимость оперировать полиномами более высоких степеней, нежели в операторной записи исходной системы (2.3), (2.4) (см. в доказательстве леммы 1 формулу (П.6) и вид функции $\tilde{f}(p,\lambda)$). Тем не менее операции с полиномами, относящиеся к процессу синтеза наблюдателя, являются стандартными и легко реализуются посредством использования современных систем компьютерной математики.

В заключение отметим, что наряду с предложенным финитным наблюдателем можно, используя традиционный подход [19] и результаты решения задачи модальной управляемости [26, 28, 34], построить для исходного объекта исследования асимптотические наблюдатели. Однако их ошибка оценивания будет обращаться в ноль только лишь асимптотически.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Обозначим: $\Lambda^* = \{\lambda_i = e^{-p_i h} \mid p_i \in P^*, i = \overline{1,\mu}\}$; $\Lambda = \{\lambda_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1,\mu_2}\}$ – множество всех различных чисел таких, что при некотором $p_0 \in \mathbb{C}$ пара чисел (p_0, λ_k), $\lambda_k \in \Lambda$, является решением системы (4.1). Построим полином $a(\lambda)$ таким, чтобы функция $\big(a(e^{-ph}) - p\big)/d_0(p)$ была целая. Это равносильно тому, что для всех $p_i \in P^*$ значения функции $a(e^{-ph}) - p$ и ее производных в точках $p = p_k$ обращаются в нуль

$$\big(a(e^{-ph}) - p\big)^{(k)}\Big|_{p=p_i} = 0, \quad i = \overline{1,\mu}, \quad k = \overline{0, l_i - 1}.$$

Поэтому для всех $\lambda_i = e^{-p_i h} \in \Lambda^*$ $(p_i \in P^*)$ должны выполняться равенства

$$\text{(П.1)} \quad a(\lambda_i) = p_i, \quad a^{(k)}(\lambda_i) = \frac{(-1)^k (k-1)!}{h\lambda_i^k}, \quad k = \overline{1, l_i - 1}, \text{ если } l_i > 1, \quad i = \overline{1,\mu}.$$

Замечание П.1. Если набор корней полинома $d_0(p)$ содержит комплексно сопряженные корни, то возможна ситуация, когда $p_{k_1} \neq p_{k_2}$, но $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = e^{-p_{k_{1,2}} h}$ и первое равенство в (П.1) выполнить нельзя, так как в этом случае $a(\lambda_{k_1}) = a(\lambda_{k_2})$, а $p_{k_1} \neq p_{k_2}$. Для преодоления такой ситуации введем [21, 22] в регуляторе новое дробное запаздывание: $h_1 = h/k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда матрица системы (2.3): $A(\lambda) = A_0 + A_1\lambda^k + \ldots + A_m\lambda^{km}$ и $\lambda^i x_j(t) = x_j(t - ih_1)$. Натуральное k можно выбрать так, что различным значениям $p_i \in P^*$ будут соответствовать различные $\lambda_i = e^{-p_i h/k}$. Легко видеть, что множество P^* при этом не изменится. Считаем далее это условие выполненным.

Потребуем, кроме того, чтобы одновременно

$$\text{(П.2)} \qquad M(a(\lambda_i), \lambda_i) \neq 0, \quad \lambda_i \in \Lambda \backslash \Lambda^*.$$

Эти неравенства понадобятся далее.

Чтобы обеспечить неравенства (П.2), достаточно [22] к интерполяционным условиям (П.1) добавить равенства (если они не следуют из (П.1))

$$\text{(П.3)} \qquad a(\lambda) = p_0 \ (p_0 \in \mathbb{R} \mid p_0 \notin P^*, \, \lambda \in \Lambda \backslash \Lambda^*) \, .$$

Значение p_0 можно взять одно и то же для всех $\lambda \in \Lambda\backslash\Lambda^*$. Вместо (П.3) можно потребовать, чтобы

$$\text{(П.4)} \qquad a(\lambda^0) = p^0 \ \left(p^0 \in \mathbb{C} \mid e^{-p^0 h} = \lambda^0, \, \lambda^0 \in \Lambda \backslash \Lambda^* \right).$$

При этом паре комплексно сопряженных значений $\lambda^0_{1,2}$ ставим в соответствие пару комплексно сопряженных значений $p^0_{1,2}$.

Таким образом, полином $a(\lambda)$ найдем как решение известной в теории полиномов интерполяционной задачи (П.1), (П.3), т.е. как полином Лагранжа–Сильвестра [35, с. 104].

Теперь покажем, что существует векторный полином $\tilde q(\lambda)$ такой, что

$$\text{(П.5)} \qquad \tilde q'(\lambda) M(a(\lambda), \lambda) \equiv 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Полиномы $M_i(a(\lambda), \lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, – взаимно просты. В противном случае найдется $\lambda^0 \in \mathbb{C}$ такое, что $M_i(a(\lambda^0), \lambda^0) = 0$, $i = \overline{1, n+1}$, где $a(\lambda^0) = p^0 \in P^*$, $\lambda^0 \in \Lambda$. Заметим, что $\lambda^0 \notin \Lambda^*$. Действительно, предположим противное. Тогда в силу (П.1) выполняется $a(\lambda^0) = p^0$, а по определению множества Λ^* будет $\lambda^0 = e^{-p^0 h}$. Значит, $M_i(e^{-p^0 h}, \lambda^0) = 0$, $i = \overline{1, n}$, что противоречит (3.4).

Для числа $\lambda^0 \in \Lambda\backslash\Lambda^*$ ввиду (П.3) $p^0 \notin P^*$ (или (p^0, λ^0) не является решением (4.1), если реализовано (П.4)) – получили противоречие. Таким образом, уравнение (П.5) имеет решение относительно полинома $\tilde q'(\lambda)$.

Полином $\tilde q(\lambda)$ находим с помощью алгоритма Евклида или методом неопределенных коэффициентов. Используя заданный полином $\tilde d_0(p, \lambda)$, записываем полином

$$\text{(П.6)} \qquad k_1(p, \lambda) = -\big(q'(\lambda) M(p, \lambda) + \tilde d_0(p, \lambda)\big), \quad q'(\lambda) = -\tilde d_0(a(\lambda), \lambda) \tilde q'(\lambda).$$

Берем функции $\tilde f'(p, \lambda) = \tilde\varphi'(p, \lambda) k_1(p, \lambda)/d_0(p)$ и

$$\tilde g'(p, \lambda) = [\tilde g_1(p, \lambda), \ldots, \tilde g_{n+1}(p, \lambda)] = q'(\lambda) + \tilde f'(p, \lambda).$$

Поскольку согласно теореме Безу функция $k_1(p, \lambda)/(a(\lambda) - p)$ — полином, а функция $(a(e^{-ph}) - p)/d_0(p)$ — целая, то компоненты вектор-функции $\tilde f(p, e^{-ph})$ — также целые функции. Проверим, что

$$w_g(p, \lambda) = -\tilde g'(p, \lambda) M(p, \lambda) = \tilde d_0(p, \lambda).$$

Действительно,

$$\text{(П.7)} \qquad \begin{aligned} -\tilde g'(p, \lambda) M(p, \lambda) &= -\big(q'(\lambda) + \tilde f'(p, \lambda)\big) M(p, \lambda) = \\ &= -q'(\lambda) M(p, \lambda) - k_1(p, \lambda) = \tilde d_0(p, \lambda) \end{aligned}$$

ввиду (4.2), (П.6).

Если все компоненты вектора $\tilde{f}(p,\lambda)$ есть правильные относительно p дроби, то полагаем $f(p,\lambda) = \tilde{f}(p,\lambda)$ и $\varphi(p,\lambda) = q(\lambda)$.

Пусть среди компонент вектора $\tilde{f}'(p,\lambda)$ есть неправильные относительно p дроби. Выполнив деление на $d_0(p)$, получаем

$$\tilde{f}'(p,\lambda) = \tilde{\varphi}'(p,\lambda)k_1(p,\lambda)/d_0(p) = \bar{\varphi}'(p,\lambda) + f'(p,\lambda), \tag{П.8}$$

где компоненты $\bar{\varphi}(p,\lambda) = \big[\bar{\varphi}_1(p,\lambda), \dots, \bar{\varphi}_{n+1}(p,\lambda)\big]'$ – полиномы, компоненты $f'(p,\lambda)$ – правильные относительно p дробно-рациональные функции. Ввиду (П.7) имеем

$$-\big(q'(\lambda) + \bar{\varphi}'(p,\lambda) + f'(p,\lambda)\big)M(p,\lambda) = \tilde{d}_0(p,\lambda).$$

Отсюда

$$-\bar{\varphi}'(p,\lambda)M(p,\lambda) = \tilde{d}_0(p,\lambda) + \big(f'(p,\lambda) + q'(\lambda)\big)M(p,\lambda) = \bar{d}_0(p,\lambda).$$

Введем матрицу $W_{\bar{\varphi}}(p,\lambda)$, которая получается из матрицы $W_g(p,\lambda)$ посредством замены столбца $g(p,\lambda)$ столбцом $\bar{\varphi}(p,\lambda) = \big[\bar{\varphi}_1(p,\lambda), \dots, \bar{\varphi}_{n+1}(p,\lambda)\big]'$. Проделав элементарные преобразования над столбцами матрицы $W_{\bar{\varphi}}(p,\lambda)$, приводим ее к матрице $W_{\hat{\varphi}}(p,\lambda)$, которая получена из матрицы $W_{\bar{\varphi}}(p,\lambda)$ заменой столбца $\bar{\varphi}(p,\lambda)$ на столбец $\hat{\varphi}(p,\lambda) = \big[\hat{\varphi}_1(\lambda), \dots, \hat{\varphi}_n(\lambda), \hat{\varphi}_{n+1}(p,\lambda)\big]'$, где $\hat{\varphi}_i(\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, – полиномы переменной λ, $\hat{\varphi}_{n+1}(p,\lambda)$ – полином переменных p и λ (возможно, зависящий только от λ или число). После этого полагаем $\varphi(p,\lambda) = q(\lambda) + \hat{\varphi}(p,\lambda)$. Из равенства

$$\big|W_{\hat{\varphi}}(p,\lambda)\big| = \bar{d}_0(p,\lambda)$$

заключаем, что функция $\varphi(p,\lambda)$ имеет оговоренный в условии леммы 1 вид. Лемма 1 доказана.

З а м е ч а н и е П.2. Чтобы получить из матрицы $W_{\bar{\varphi}}(p,\lambda)$ матрицу $W_{\hat{\varphi}}(p,\lambda)$, можно использовать, например, следующие преобразования. Выберем среди первых n строк матрицы $W_{\bar{\varphi}}(p,\lambda)$ ту, в которой полином $\bar{\varphi}_i(p,\lambda)$, $i \in \{1,\dots,n\}$, имеет максимальную степень переменной p (если таких строк несколько, то выбираем любую). Предположим, что выбранная строка имеет номер i_0 и

$$\bar{\varphi}_{i_0}(p,\lambda) = \sum_{j=0}^{\bar{n}_0} \hat{g}_i(\lambda)p^i,$$

где $\bar{n}_0 = \deg_p \bar{\varphi}_{i_0}(p,\lambda)$, $\hat{g}_i(\lambda)$ – полиномы. Умножим столбец с номером i_0 матрицы $W_{\bar{\varphi}}(p,\lambda)$ на полином $\big(-\hat{g}_{\bar{n}_0}(\lambda)p^{\bar{n}_0-1}\big)$ и прибавим к столбцу с номером $n+1$. Описанные действия повторяем до тех пор, пока в первых n строках последнего столбца полученной матрицы полиномы будут зависеть от переменной p.

Доказательство леммы 2. Предположим противное, что условие (3.4) выполнено, а равенство (4.20) нарушается при некотором $p = p_0 \in \mathbb{C}$. Выберем ненулевой вектор $q \in \mathbb{R}^n$ как решение алгебраической системы

$$\big(p_0 I_n - Q(e^{-p_0 h})\big)q = 0, \quad K(e^{-p_0 h})q = 0. \tag{П.9}$$

Положим $q_1 = \Pi_{11}(e^{-p_0 h})q$. Тогда в силу (П.9) запишем, что $W(p_0, e^{-p_0 h})q_1 = 0$ и $C(e^{-p_0 h})q_1 = 0$. А эти равенства противоречат условию (3.4). Лемма 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Besancon G. (Ed.)* Nonlinear Observers and Applications // Lect. Notes Control Inform. Sci. V. 363. Springer, 2007.
2. *Meurer T., Graichen K., Gilles E.D. (Eds.)* Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems // Lect. Notes Control Inform. Sci. V. 322. Springer, 2005.
3. *Luenberger D.G.* An Introduction to Observers // IEEE Trans. Automat. Contr. 1971. V. AC-16. No. 6. P. 596–602.
4. *Sename O.* New Trends in Design of Observers for Time-Delay Systems // Kybernetika. 2001. V. 37. No. 4. P. 427–458.
5. *Lee E.B., Olbrot A.W.* Observability and Related Structural Results for Linear Hereditary Systems // Int. J. Control. 1981. No. 34. P. 1061–1078.
6. *Pourboghrat F., Chyung D.H.* Exact State-Variable Reconstruction of Delay Systems // Int. J. Control. 1986. V. 44. No. 3. P. 867–877.
7. *Emre E., Khargonekar P.P.* Regulation of Split Linear Systems over Rings: Coefficient-Assignment and Observers // IEEE Trans. Automat. Control. 1982. V. 27. No. 1. P. 104–113.
8. *Morse A.S.* Ring Models for Delay Differential Systems // Automatica. 1976. No. 12. P. 529–531.
9. *Sontag E.D.* Linear Systems over Commutative Rings: a Survey // Ricerche Automat. 1976. No. 7. P. 1–16.
10. *Lee E.B., Zak S.H.* On Spectrum Placement for Linear Time-Invariant Delay Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1982. V. AC-27. No. 2. P. 446–449.
11. *Eising R.* Pole Assignment for Systems over Rings // Syst. Control Lett. 1982. V. 2. No. 1. 225–229.
12. *Марченко В.М.* Управление системами с последействием в шкалах линейных регуляторов по типу обратной связи // Дифф. уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 1003–1017.
13. *Lee E.B., Lu W.S.* Coefficient Assignability for Linear Systems with Delays // IEEE Trans. Automat. Control. 1984. V. AC-29. No. 11. P. 128–131.
14. *Ильин А.В., Буданова А.В., Фомичев В.В.* Синтез наблюдателей для асимптотически наблюдаемых систем с запаздыванием // Докл. РАН. 2013. Т. 448. № 4. С. 399–402.
15. *Manitius A., Triggiani R.* Function Space Controllability of Linear Retarded Systems: a Derivation from Abstract Operator Conditions // SIAM J. Control Optim. 1978. V. 16. No. 4. P. 599–645.

16. *Bhat K.P., Koivo H.N.* Modal Characterization of Controllability and Observability of Time-Delay Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1976. V. AC-21. No. 2. P. 292–293.

17. *Метельский А.В.* Задача идентификации в факторизованном пространстве состояний дифференциально-разностной системы с соизмеримыми запаздываниями // Дифф. уравнения. 1995. Т. 31. № 8. С. 1353–1360.

18. *Хартовский В.Е.* К задаче о полной управляемости линейных систем со многими запаздываниями // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2006. № 2. С. 33–38.

19. *Watanabe K.* Finite Spectrum Assignment and Observer for Multivariable Systems with Commensurate Delays // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. V. AC-31. No. 6. P. 543–550.

20. *Wang Q.G., Lee T.H., Tan K.K.* Finite Spectrum Assignment Controllers for Time Delay Systems. London: 1995.

21. *Метельский А.В.* Задача назначения конечного спектра для дифференциальной системы нейтрального типа // Дифф. уравнения. 2015. Т. 51. № 1. С. 70–83.

22. *Метельский А.В.* Алгебраический подход к стабилизации дифференциальной системы запаздывающего типа // Дифф. уравнения. 2018. Т. 54. № 8. С. 1119–1131.

23. *Sename O., Lafay J.F., Rabah R.* Controllability indices of linear systems with delays // Kybernetika. 1995. No. 6. P. 559–580.

24. *Минюк С.А., Метельский А.В.* Критерии конструктивной идентифицируемости и полной управляемости линейных стационарных систем нейтрального типа // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 5. С. 15–23.

25. *Хартовский В.Е., Павловская А.Т.* Полная управляемость и управляемость линейных автономных систем нейтрального типа // АиТ. 2013. № 5. С. 59–80.

    Khartovskii V.E., Pavlovskaya A.T. Complete Controllability and Controllability for Linear Autonomous Systems of Neutral Type // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 5. P. 769–784.

26. *Павловская А.Т., Хартовский В.Е.* Управление линейными системами с запаздыванием нейтрального типа регуляторами с обратной связью динамической структуры // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 3. С. 3–18.

27. *Метельский А.В.* Назначение конечного спектра и полное успокоение дифференциальной системы нейтрального типа одним регулятором // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52. № 1. С. 94–111.

28. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52. № 11. С. 1506–1521.

29. *Метельский А.В., Хартовский В.Е., Урбан О.И.* Регуляторы успокоения решения линейных систем нейтрального типа // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 391–403.

30. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Синтез регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием // Дифф. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 547–558.

31. *Хартовский В.Е.* Критерий модальной управляемости вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием // Дифф. уравнения. 2018. Т. 54. № 4. С. 514–529.

32. *Метельский А.В.* Полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием через спектральное приведение // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 1. С. 3–21.

33. *Kappel F.* On Degeneracy of Functional-Differential Equations // J. Diff. Equats. 1976. V. 22. No. 2. P. 250–267.

34. *Хартовский В.Е.* Модальная управляемость линейных систем нейтрального типа в классах дифференциально-разностных регуляторов // АиТ. 2017. № 11. С. 3–18.

Khartovskii V.E. Modal Controllability for Systems of Neutral Type in Classes of Differential-Difference Controllers // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 11. P. 1941–1954.

35. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.

Поступила в редакцию 27.11.2018

После доработки 31.05.2019

Принята к публикации 18.07.2019