Автоматика и телемеханика, № 12, 2019

© 2019 г. **А.А. НАЗАРОВ, д-р техн. наук (nazarov.tsu@gmail.com), Д.Д. ДАММЕР, канд. физ.-мат. наук (di.dammer@yandex.ru) (Национальный исследовательский Томский государственный университет)**

ИССЛЕДОВАНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНО ФОРМИРУЕМОГО ПОТОКА В СИСТЕМЕ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ПРИБОРОВ И РЕКУРРЕНТНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ МЕТОДОМ МАРКОВСКОГО СУММИРОВАНИЯ

Исследуются дополнительные потоки событий, которые формируются заявками, находящимися в системе массового обслуживания с неограниченным числом приборов и произвольным временем обслуживания заявок. Предлагается и реализуется метод марковского суммирования для получения характеристик анализируемых дополнительных потоков.

Ключевые слова: система массового обслуживания, метод марковского суммирования, характеристическая функция, дополнительные потоки событий.

DOI: 10.1134/S0005231019120080

1. Введение

В настоящее время широко используются различные методы теории массового обслуживания [1–3] для исследования моделей различных реальных систем: экономических [4–6], производственных [7, 8], вычислительных [9], информационных [10] и др. В основном используемые методы принадлежат к так называемому классу марковских моделей, где предполагается, что входящий поток заявок пуассоновский и время обслуживания экспоненциальное. Наблюдения за реальными системами показывают, что необходимо развивать методы исследования немарковских систем [11]. Объектом анализа при исследовании систем массового обслуживания могут быть, например, входящие или выходящие потоки заявок, процесс изменения во времени числа занятых приборов и др. В данной работе исследуется поток событий, формируемый заявками, находящимися на обслуживании в системе с произвольно распределенным временем обслуживания, и для трех типов входящего потока заявок. Примерами таких сгенерированных (дополнительных) потоков могут быть потоки страховых случаев клиентов, находящихся «на обслуживании» в страховой компании; результаты исследований таких потоков при экспоненциальном обслуживании представлены в [12]. Также в своих исследованиях Бартлетт использовал такие дополнительные потоки для анализа транспортных потоков [13], а П. Льюис рассматривал их в качестве модели отказов вычислительных машин [14].

В данной работе для исследования дополнительных потоков в системах с рекуррентным обслуживанием и неограниченным числом приборов применяется новый метод марковского суммирования, в результате получены характеристики рассматриваемого потока.

2. Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим систему (рис. 1) с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает некоторый поток заявок. Ниже будут рассмотрены входящие потоки трех классов: простейший с параметром λ, рекуррентный, заданный функцией распределения $A(x)$ длин интервалов между моментами поступления его заявок, и коррелированный $MMPP$-поток (подробнее такой поток опишем в разделе 5).

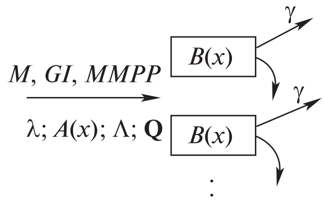

Рис. 1. Модель системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов и d-потоком.

Времена обслуживания заявок — независимые случайные величины с функцией распределения $B(x)$. За время обслуживания каждая заявка формирует события простейшего с параметром γ потока.

Введем следующие определения.

Определение 1. *Последовательность моментов наступления событий, сформированных одной поступившей в систему заявкой, будем называть локальным d-потоком.*

Определение 2. *Последовательность моментов наступления событий, сформированных всеми поступившими в систему заявками, будем называть суммарным d-потоком.*

Обозначим: $n(t)$ — число событий суммарного d-потока, сформированных заявками, поступившими на интервале $[0, t]$, причем функция $n(t)$ не является считающей функцией d-потока, так как в d-потоке учитываются события, наступившие и после момента времени t; $P(n, t) = \mathsf{P}\{n(t) = n\}$ — распределение вероятностей. Количество событий локального d-потока является случайной величиной, количество заявок входящего потока, поступивших в систему за время t, также является случайной величиной. Следовательно, значение $n(t)$ числа событий суммарного d-потока является суммой случайного числа случайных величин. Такое суммирование выполнить достаточно сложно, когда неизвестно распределение вероятностей числа слагаемых, что естественно для непуассоновских входящих потоков.

Целью работы является исследование d-потока, т.е. нахождение распределения $n(t)$. Для решения поставленной задачи будет применен предлагаемый метод марковского суммирования, приведенный ниже.

3. Метод марковского суммирования

На рис. 2 представлена схема формирования суммарного d-потока. Величинами t_i обозначены моменты поступления заявок в систему, которые яв-

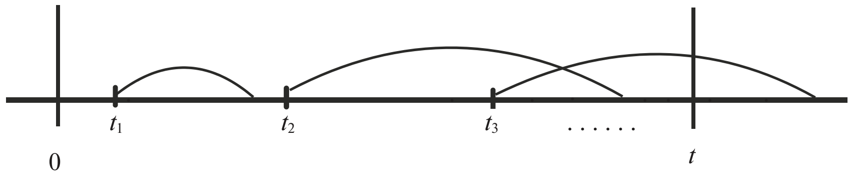

Рис. 2. Схема формирования суммарного d-потока.

ляются моментами начала их обслуживания, $t_i \in [0, t]$. Точками обозначены моменты наступления событий в d-потоке.

Для непуассоновских входящих потоков нахождение распределения вероятностей числа заявок, поступивших в систему за время t, является нетривиальной задачей, поэтому суммирование будем выполнять, применяя свойства марковских процессов, а предлагаемый подход будем называть методом марковского суммирования.

Метод марковского суммирования реализуется следующими этапами:

— выбирается характеристика суммарного d-потока в виде распределения вероятностей $P(n, t)$ числа $n(t)$ событий, наступивших в d-потоке, сформированных всеми заявками входящего потока, поступившими в систему на интервале $[0, t]$;

— определяется распределение вероятностей $r(i, t)$ числа i событий локального d-потока, сформированных (на интервале $[t, \infty)$) заявкой входящего потока, поступившей в систему в момент времени t, и устанавливается его характеристическая функция $g(u, t)$;

— в зависимости от типа входящего потока (пуассоновский, рекуррентный, MMPP) составляется уравнение Колмогорова, определяющее распределение вероятностей числа событий суммарного d-потока, сформированных всеми заявками входящего потока, поступившими в систему до момента времени t;

— решая уравнение Колмогорова, получаем искомое распределение.

4. Распределение вероятностей числа событий локального d-потока

Найдем $r(i, t)$ — вероятность того, что одна заявка, поступившая в систему в момент времени t формирует i событий d-потока. Так как события локального d-потока формируются с интенсивностью γ, т.е. образуют простейший поток с параметром γ, то за время x их количество будет случайной величиной, имеющей пуассоновское распределение с параметром γx. Количество событий локального d-потока, наступивших за время обслуживания с функцией распределения $B(x)$, будет иметь следующее распределение вероятностей:

$$r(i, t) = \int_0^\infty \frac{(\gamma x)^i}{i!} e^{-\gamma x} dB(x).$$

Так как правая часть выражения, определяющего $r(i, t)$, не зависит от t, то аргумент t можно исключить и обозначить $r(i, t)$ как $r(i)$. Характеристическая функция, соответствующая $r(i)$, будет иметь следующий вид:

$$g(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} r(i) = \int_0^{\infty} \exp\{(\gamma x)(e^{ju} - 1)\} dB(x), \tag{1}$$

где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Так как для рассматриваемой системы времена обслуживания заявок независимы, то количество событий суммарного d-потока, сформированных различными заявками, также независимы, поэтому для решения поставленной в работе задачи будем рассматривать суммирование случайного числа независимых случайных величин, которые определяются характеристической функцией (1).

5. Исследование d-потока в системе $M/GI/\infty$

Рассмотрим систему $M/GI/\infty$, на вход которой поступает простейший с параметром λ поток заявок.

Так как за время t в простейшем с параметром λ входящем потоке поступает число заявок, имеющих пуассоновское с параметром λt распределение вероятностей, то нетрудно найти характеристическую функцию $h(u,t)$ величины $n(t)$:

$$h(u,t) = M\{e^{jun(t)}\} = e^{\lambda t (g(u) - 1)}, \tag{2}$$

где функция $g(u)$ определяется выражением (1).

Для иллюстрации метода марковского суммирования эту характеристическую функцию найдем, излагая его в соответствии с приведенными выше этапами.

В силу свойств простейшего входящего потока и независимости случайных величин, определяемых распределением $r(i)$, случайный процесс $n(t)$ является цепью Маркова. Тогда для его распределения вероятностей $P(n,t)$ можно записать равенства [15]:

$$P(n, t + \Delta t) = P(n,t)(1 - \lambda \Delta t) + \lambda \Delta t \sum_{i=0}^{n} P(n-i, t) r(i) + o(\Delta t),$$

из которых получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial P(n,t)}{\partial t} = -\lambda P(n,t) + \lambda \sum_{i=0}^{n} P(n-i,t) r(i). \tag{3}$$

Из системы (3) запишем дифференциальное уравнение для характеристической функции $h(u,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(n,t)$:

$$\frac{\partial h(u,t)}{\partial t} = \lambda h(u,t)(g(u) - 1).$$

Нетрудно показать, что решение $h(u,t)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $h(u,0)=1$, имеет вид (2).

Теперь, зная характеристическую функцию $h(u,t)$ числа n событий, наступивших в суммарном d-потоке, от всех заявок входящего потока, поступивших за время t, найдем распределение вероятностей $P(n,t)$, используя обратное преобразование Фурье:

$$P(n,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-jun}h(u,t)du, \tag{4}$$

которое нетрудно реализовать численно, что показано в разделе 7.

6. Исследование d-потока в системе $GI/GI/\infty$

Рассмотрим систему $GI/GI/\infty$, на вход которой поступает рекуррентный поток заявок, а длины его интервалов имеют функцию распределения $A(x)$.

Для такой системы массового обслуживания процесс $n(t)$ немарковский, поэтому введем величину $z(t)$ — длину интервала от момента времени t до момента поступления следующей заявки входящего рекуррентного потока. Тогда двумерный процесс $\{n(t),z(t)\}$ является марковским, а для его распределения вероятностей

$$P(n,z,t)=\mathsf{P}\{n(t)=n,z(t)<z\}$$

можно записать равенство

$$P(n,z-\Delta t,t+\Delta t)=P(n,z,t)-P(n,\Delta t,t)+\\ +A(z)\sum_{i=0}^{n}P(n-i,\Delta t,t)r(i)+o(\Delta t).$$

Обозначив $\left.\frac{\partial P(n,z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{\partial P(n,0,t)}{\partial z}$, из последнего равенства получим уравнение

$$\frac{\partial P(n,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial P(n,z,t)}{\partial z}-\frac{\partial P(n,0,t)}{\partial z}+A(z)\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial P(n-i,0,t)}{\partial z}r(i). \tag{5}$$

Определим частичные характеристические функции

$$H(u,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}P(n,z,t).$$

Тогда с учетом (5) для $H(u,z,t)$ можно записать уравнение:

$$\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial z}+\frac{\partial H(u,0,t)}{\partial z}\{A(z)r(u)-1\}, \tag{6}$$

решение $H(u,z,t)$ которого удовлетворяет начальному условию

$$H(u,z,0)=R(z)=\lambda\int\limits_0^z(1-A(x))dx, \tag{7}$$

где $R(z)$ — функция распределения величины перескока рекуррентного потока, а $\lambda=\frac{1}{\int\limits_0^\infty(1-A(x))dx}$. Решение уравнения (6), удовлетворяющее (7), определяет характеристическую функцию

$$h(u,t)=H(u,\infty,t) \tag{8}$$

числа $n(t)$ событий в суммарном d-потоке.

В задаче (6)–(7) выполним преобразование Лапласа–Стилтьеса по z, обозначив

$$H^*(u,\alpha,t)=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha z}dH(u,z,t),\ A^*(\alpha)=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha z}dA(z),\ R^*(\alpha)=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha z}dR(z).$$

Для функции $H^*(u,\alpha,t)$ получим уравнение

$$\frac{\partial H^*(u,\alpha,t)}{\partial t}=\alpha H^*(u,\alpha,t)+\frac{\partial H(u,0,t)}{\partial z}\{A^*(\alpha)r(u)-1\}, \tag{9}$$

решение $H^*(u,\alpha,t)$ которого удовлетворяет начальному условию

$$H^*(u,\alpha,0)=R^*(\alpha) \tag{10}$$

и в силу равенства (8) определяет характеристическую функцию

$$h(u,t)=H(u,\infty,t)=H^*(u,0,t). \tag{11}$$

Решение задачи Коши (9)–(10) имеет вид

$$H^*(u,\alpha,t)=e^{\alpha t}\left\{R^*(\alpha)+\int\limits_0^t e^{-\alpha x}\frac{\partial H(u,0,x)}{\partial z}dx[A^*(\alpha)r(u)-1]\right\}. \tag{12}$$

В силу равенства (11) из (12) при $\alpha=0$ получим

$$h(u,t)=1+(g(u)-1)\int\limits_0^t\frac{\partial H(u,0,x)}{\partial z}dx. \tag{13}$$

В последнем выражении не известна функция $\frac{\partial H(u,0,x)}{\partial z}$, которую найдем из (12), совершая предельный переход $t\to\infty$. В результате получим следующее равенство:

$$R^*(\alpha)+\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\partial H(u,0,x)}{\partial z}dx[A^*(\alpha)r(u)-1]=0,$$

которое перепишем в виде

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\partial H(u,0,x)}{\partial z} dx = \frac{R^*(\alpha)}{1 - A^*(\alpha) r(u)}. \tag{14}$$

В последнем выражении обозначим: $-\alpha = jw$. Сохраняя обозначения $A^*(u)$ и $R^*(u)$ для характеристических функций, выражение (14) перепишем в виде преобразования Фурье:

$$\int_0^\infty e^{jwx} \frac{\partial H(u,0,x)}{\partial z} dx = \frac{R^*(w)}{1 - A^*(w) r(u)},$$

из которого обратным преобразованием Фурье получим выражение для функции $\frac{\partial H(u,0,x)}{\partial z}$:

$$\frac{\partial H(u,0,x)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-jwx} \frac{R^*(w)}{1 - A^*(w) r(u)} dw. \tag{15}$$

Так как

$$R(z) = \lambda \int_0^z (1 - A(x)) dx,$$

то

$$R^*(w) = \int_0^z e^{jwz} dR(z) = \lambda \int_0^\infty e^{jwz} (1 - A(z)) dz = \lambda \frac{A^*(w) - 1}{jw},$$

поэтому (15) можно переписать в виде

$$\frac{\partial H(u,0,x)}{\partial z} = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-jwx} \frac{A^*(w) - 1}{jw(1 - A^*(w) r(u))} dw.$$

Теперь запишем выражение для интеграла из (13):

$$\int_0^t \frac{\partial H(u,0,x)}{\partial z} dx = \int_0^t \frac{\lambda}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-jwx} \frac{A^*(w) - 1}{jw(1 - A^*(w) r(u))} dw \right) dx.$$

После изменения порядка интегрирования получим следующее выражение:

$$\int_0^t \frac{\partial H(u,0,x)}{\partial z} dx = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1 - e^{-jwt}}{w^2} \frac{A^*(w) - 1}{jw(1 - A^*(w) r(u))} dw.$$

Тогда равенство (13) перепишем в виде

$$h(u,t) = 1 - (1-g(u))\frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-jwt}}{w^2}\frac{A^*(w)-1}{jw(1-A^*(w)r(u))}dw. \tag{16}$$

Далее по формуле (4) находим распределение вероятностей $P(n,t)$ числа n событий суммарного d-потока от всех заявок входящего потока, поступивших в систему $GI/GI/\infty$ за время t.

7. Исследование d-потока в системе $MMPP/GI/\infty$

Рассмотрим систему $MMPP/GI/\infty$, на вход которой поступает $MMPP$-поток (Markov Modulated Poisson Process) [16, 17] заявок, управляемый цепью Маркова $k(t)$. Эта цепь определяется матрицей $\mathbf{Q}$ инфинитезимальных характеристик $q_{\nu k}$, $\nu = 1,\dots,K$, $k = 1,\dots,K$.

Определим диагональную матрицу $\mathbf{\Lambda}$ с элементами λ_k на главной диагонали. Здесь λ_k – условная интенсивность поступления заявок в систему, когда цепь Маркова находится в состоянии k, $k = 1,\dots,K$.

Для такой системы случайный процесс $\{k(t), n(t)\}$ является двумерной цепью Маркова, а для его распределения вероятностей

$$P_k(n,t) = \mathsf{P}\{k(t) = k, n(t) = n\}$$

можно записать равенства

$$P_k(n,t+\Delta t) = P_k(n,t)(1-\lambda_k\Delta t)(1+q_{kk}) + \sum_{\nu\neq k} P_\nu(n,t)q_{\nu k}\Delta t +$$
$$+ \lambda_k \Delta t \sum_{i=0}^{n} P_k(n-i,t)r(i) + o(\Delta t),$$

из которых получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P_k(n,t)}{\partial t} = -\lambda_k P_k(n,t) + \sum_{\nu} P_\nu(n,t)q_{\nu k} + \lambda_k \sum_{i=0}^{n} P_k(n-i,t)r(i). \tag{17}$$

Обозначим частичные характеристические функции:

$$H_k(u,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun}P_k(n,t).$$

Тогда систему (17) для этих функций перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial H_k(u,t)}{\partial t} = -\lambda_k H_k(u,t)(g(u)-1) + \sum_{\nu} H_\nu(u,t)q_{\nu k}. \tag{18}$$

Определив векторную характеристическую функцию

$$\mathbf{H}(u,t) = \{H_1(u,t), \ldots, H_K(u,t)\},$$

систему (18) перепишем в виде матричного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u,t)\{\mathbf{Q} + (g(u) - 1)\mathbf{\Lambda}\} \tag{19}$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(u,0) = \mathbf{R}. \tag{20}$$

Так как векторная характеристическая функция $\mathbf{H}(u,t)$ определяет двумерное распределение вероятностей состояний *MMPP*-потока (значений управляющей цепи) и числа событий суммарного d-потока, то при $t = 0$ получаем одномерное стационарное распределение вероятностей $\mathbf{R}$ состояний входящего *MMPP*-потока, которое определяется системой

$$\mathbf{RQ} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{RE} = 1,$$

где $\mathbf{E}$ — это единичный вектор-столбец.

Обозначим: $\mathbf{A}(u) = \mathbf{Q} + (g(u) - 1)\mathbf{\Lambda}$. Решение задачи Коши (19)–(20) для однородной системы (19) линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами выполним, используя метод матричной экспоненты [18], в соответствии с которым решение $\mathbf{H}(u,t)$ запишем в виде матричной экспоненты:

$$\mathbf{H}(u,t) = \mathbf{R}e^{\mathbf{A}(u)t},$$

тогда искомая скалярная характеристическая функция $h(u,t)$ будет иметь вид

$$h(u,t) = \mathbf{H}(u,t)\mathbf{E} = \mathbf{R}e^{\mathbf{A}(u)t}\mathbf{E}. \tag{21}$$

Для удобства численной реализации будем предполагать, что все собственные числа $\alpha_k(u)$ матрицы $\mathbf{A}(u)$ простые, $k = 1, \ldots, K$. Обозначим собственные векторы этой матрицы $\beta_1(u), \ldots, \beta_K(u)$. Тогда значение матричной экспоненты можно найти, используя следующую формулу [18]:

$$e^{\mathbf{A}(u)t} = \mathbf{T}\mathrm{diag}\,(e^{\alpha_1(u)t}, \ldots, e^{\alpha_K(u)t})\mathbf{T}^{-1}, \tag{22}$$

где $\mathbf{T}$ — матрица, составленная из собственных векторов матрицы $\mathbf{A}(u)$, $\mathrm{diag}\,(e^{\alpha_1(u)t}, \ldots, e^{\alpha_K(u)t})$ — диагональная матрица, составленная из экспонент в степени соответствующих собственных чисел матрицы $\mathbf{A}(u)$.

Таким образом, равенство (4) для $h(u,t)$ из (21) определяет распределение вероятностей числа $n(t)$ событий d-потока, сформированных заявками *MMPP*-потока, поступившими в систему за время t.

8. Численный эксперимент

В настоящем разделе представлена численная реализация, выполненная с помощью приложения Mathcad, в результате которой при заданных значениях параметров рассматриваемой модели получено распределение вероятностей числа n событий в d-потоке, сформированных заявками входящего потока, поступившими в систему на интервале $[0, t]$.

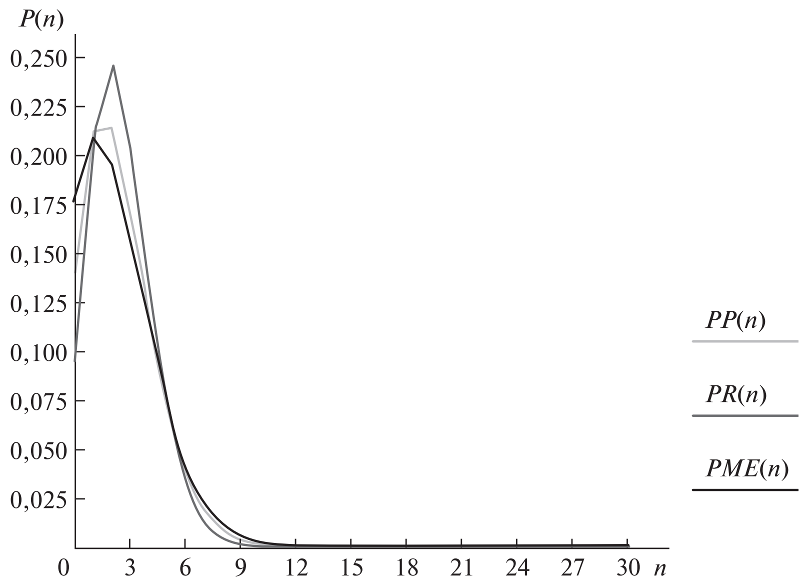

Рис. 3. Распределение числа событий в d-потоке при $\gamma = 0{,}5$.

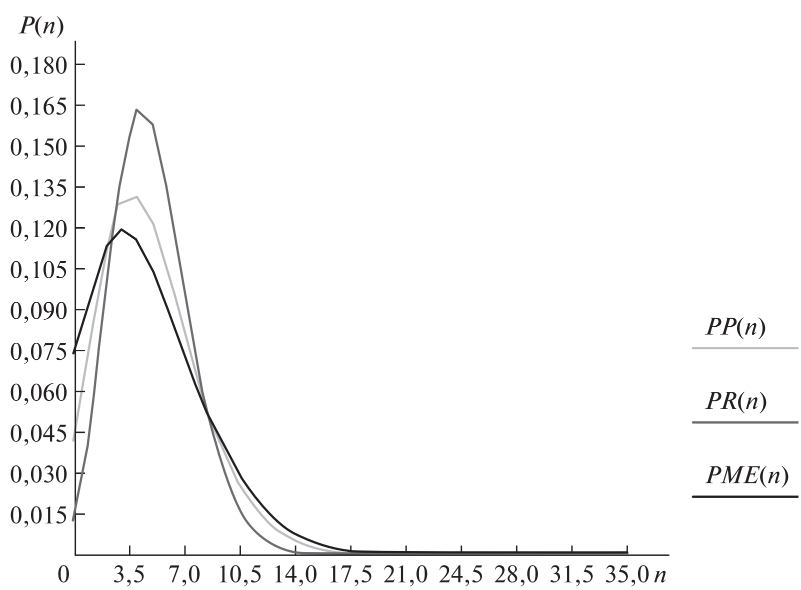

Рис. 4. Распределение числа событий в d-потоке при $\gamma = 1$.

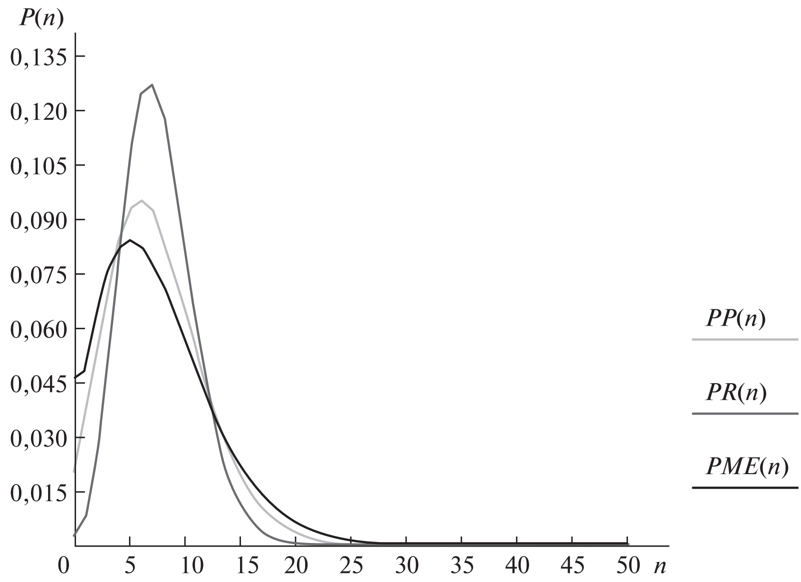

Рис. 5. Распределение числа событий в d-потоке при $\gamma = 1{,}5$.

Пусть время обслуживания имеет гамма-распределение с параметром формы α и параметром масштаба β; интенсивность наступления событий в d-потоке определяется параметром γ.

На рис. 3–5 представлено распределение вероятностей $P(n, t)$ при γ, равном соответственно: 0,5; 1; 1,5. Другие параметры постоянны: $\alpha = \beta = 0{,}5$, $t = 5$. Численная реализация проведена для трех типов входящих потоков с одинаковой интенсивностью, для которых обозначены распределения вероятностей:

$PP(n)$ — для модели с простейшим входящим потоком с параметром $\lambda = 1$;

$PR(n)$ — для модели с рекуррентным входящим потоком, где функция распределения $A(x)$ есть функция гамма-распределения с параметром формы $a = 5$ и параметром масштаба $b = 5$;

$PME(n)$ — для модели с $MMPP$-входящим потоком, который задан матрицей $\mathbf{Q}$ инфинитезимальных характеристик $q_{\nu k}$, $k = 1, 2, 3$, $\nu = 1, 2, 3$

$$\begin{bmatrix} -0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & -0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & -0{,}6 \end{bmatrix},$$

а также диагональной матрицей $\mathbf{\Lambda}$ с элементами λ_k, $k = 1, 2, 3$ на главной диагонали

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}293 \end{bmatrix}.$$

В таблице представлены значения математического ожидания m и дисперсии D числа $n(t)$ событий в суммарном d-потоке при заданных значениях

Математическое ожидание и дисперсия числа событий в суммарном d-потоке

	$\gamma = 0{,}5$	$\gamma = 1$	$\gamma = 1{,}5$
$PP(n)$	$m = 2{,}5,\ D = 3{,}750$	$m = 5,\ D = 10{,}000$	$m = 7{,}5,\ D = 18{,}750$
$PR(n)$	$m = 2{,}5,\ D = 2{,}792$	$m = 5,\ D = 6{,}173$	$m = 7{,}5,\ D = 10{,}138$
$PME(n)$	$m = 2{,}5,\ D = 4{,}586$	$m = 5,\ D = 13{,}346$	$m = 7{,}5,\ D = 26{,}281$

параметров. Из данных, приведенных в таблице, следует, что среднее m числа событий в суммарном d-потоке одинаково для различных входящих потоков. Но дисперсии D этого числа существенно различаются, что естественно объясняется различием в типах потоков.

9. Заключение

В работе с помощью метода марковского суммирования исследованы дополнительные потоки, формируемые заявками, находящимися в системе массового обслуживания с неограниченным числом приборов. Рассмотрены модели с тремя типами входящего потока заявок: простейшим, рекуррентным и *MMPP*-потоком.

Для трех моделей получены характеристические функции числа событий суммарного d-потока применением нового метода марковского суммирования. Проведена численная реализация при заданных значениях параметров, которые подобраны таким образом, чтобы результаты были сравнимы между собой (интенсивность входящего потока равна 1).

Полученные результаты могут быть полезны при анализе финансовой деятельности страховых компаний (например, при расчетах общей суммы страховых выплат), а также других экономических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bocharov P.P., D'Apice C., Pechinkin A.V., Salerno S.* Queueing Theory. Boston: Utrecht, 2004.
2. *Narayan Bhat U.* An Introduction to Queueing Theory: Modeling and Analysis in Applications. Boston: Birkhauser, 2008.
3. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания /Пер. И.И. Грушко; ред. В.И. Нейман. М.: Машиностроение, 1979.
4. *Dammer D.* Research of Mathematical Model of Insurance Company in the Form of Queueing System with Unlimited Number of Servers Considering "Implicit Advertising" // Commun. Comput. Inform. Sci. 2015. V. 564. P. 163–174.
5. *Даммер Д.Д.* Исследование математической модели страховой компании в виде системы массового обслуживания в случайной среде и с учетом единовременных страховых выплат // Компьютерные науки и информационные технологии. Матер. Междунар. науч. конф. 2018. С. 117–121.
6. *Жидкова Л.А., Моисеева С.П.* Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторным обращением к блокам // Изв. Том. политех. ун-та. 2013. Т. 322. № 6. С. 5–9.

7. *Balsamo S., De Nitti Persone V., Inverardi P.* A review on Queueing Network Models with Finite Capacity Queues for Software Architectures Performance Prediction // Performance Evaluat. 2003. V. 51. Iss. 2. P. 269–288.
8. *Маталыцкий М.А., Станкевич С.Э.* НМ-сети как новые стохастические модели прогнозирования доходов различных объектов // Вестн. ГрГУ. Сер. 5. Экономика. 2009. № 1. С. 107–115.
9. *Клейнрок Л.* Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979.
10. *Тихоненко О.М.* Модели массового обслуживания в информационных системах. Минск: Технопринт, 2003.
11. *Назаров А.А., Моисеев А.Н.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2015.
12. *Dammer D.D.* Research of Mathematical Model of Insurance Company in the Form of Queueing System in a Random Environment / Inform. Technol. Math. Modell. Queueing Theory App. Commun. Comput. Inform. Sci. 2017. V. 800. Cham: Springer. P. 204–215. doi: 10.1007/978-3-319-68069-9_17
13. *Bartlett M.S.* The spectral analysis of point processes // J. Royal Stat. Soc. 1963. B 25. P. 264–296.
14. *Cox D.R., Lewis P.A.W.* The statistical analysis of series of events. London: Methuen, 1966.
15. *Назаров А.А., Терпугов. А.Ф.* Теория массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2010.
16. *Cox D.R.* Some statistical methods connected with series of events // J. Royal Stat. Soc. 1955. Ser. B. P. 129–164.
17. *Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И.* Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М.: Рекламно-издат. центр Техносфера, 2018.
18. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М: Наука, 1969.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневским.

Поступила в редакцию 13.11.2018

После доработки 24.12.2018

Принята к публикации 07.02.2019