Автоматика и телемеханика, № 12, 2019

© 2019 г. **А.И. ПЕСЧАНСКИЙ, д-р техн. наук (peschansky_sntu@mail.ru)**
(Севастопольский государственный университет)

ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ СИСТЕМЫ С ПОЭЛЕМЕНТНЫМ ВРЕМЕННЫ́М РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ[1]

Построена модель функционирования многокомпонентной восстанавливаемой системы, каждый элемент которой после выхода из строя остается функционально работоспособным благодаря мгновенно пополняемому временно́му резерву. Элемент считается отказавшим в том случае, когда время его восстановления превышает объем резерва. При этом не происходит отключения элементов, функционально с ним связанных. Предполагается, что все случайные величины, описывающие эволюцию системы во времени, имеют распределения общего вида. Аппаратом исследования является полумарковский процесс с дискретно-непрерывным множеством состояний. В результате решения системы интегральных уравнений найдено стационарное распределение вложенной цепи Маркова. Получены формулы для вычисления стационарного коэффициента готовности, средних стационарных времен пребывания системы в работоспособном и отказовом состояниях. Стационарные характеристики системы выражаются через стационарные коэффициенты готовности ее элементов и структурную функцию системы. Приведен пример вычисления характеристик системы “три из четырех” в зависимости от различных объемов временно́го резерва ее элементов.

Ключевые слова: ненадежная восстанавливаемая система, временно́й резерв, полумарковский процесс, вложенная цепь Маркова, стационарное распределение, стационарный коэффициент готовности.

DOI: 10.1134/S0005231019120092

1. Введение

Проблемам надежности сложных систем посвящены многочисленные публикации. Обзоры существующих методов расчета надежности таких систем содержатся, например, в [1–8]. Одним из действенных способов, позволяющих достичь высокого уровня показателей безотказности систем, является временно́е резервирование [9–11]. Это такой способ повышения надежности, при котором в процессе функционирования системе предоставляется возможность израсходовать некоторое время, называемое резервом, для восстановления ее технических характеристик. На практике такой способ применяется, например, для автоматизированных производственных систем [11] и ресурсоснабщающих сетей (трубопроводных, электрических, энергетических) [12].

[1] Работа выполнена в рамках Государственного задания Министерства образования и науки РФ (№ 1.10513.2018/11.12) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00704).

Основой аналитических методов для анализа надежности служит теория случайных процессов, в частности марковских. С точки зрения приложений важно отказаться от “экспоненциальности” отказа или восстановления элементов системы, но это приводит к значительному усложнению построения моделей. Одной из возможностей исследования систем в этом случае является использование полумарковских процессов с дискретно-непрерывным пространством состояний. Именно с помощью этого аппарата найдены стационарные характеристики надежности сложных восстанавливаемых систем [13, 14], систем с учетом технического обслуживания [15] и ненадежных систем массового обслуживания [16].

Модели надежности одноканальной системы, в предположении общего вида распределений случайных величин, описывающих ее эволюцию во времени, и различных видах временно́го резерва, построены в [9, 10, 17, 18]. Для сложной системы с последовательной структурой, простейшими потоками отказов ее элементов, произвольными временами их восстановления и мгновенно пополняемым временны́м резервом расчетные формулы для показателей надежности получены в [4]. В данной статье строится модель функционирования ненадежной многокомпонентной восстанавливаемой системы, элементы которой имеют мгновенно пополняемые резервы времени и все случайные величины, ее описывающие, имеют распределения общего вида. Цель статьи — найти средние стационарные времена пребывания системы в работоспособном и отказовом состояниях, вычислить стационарный коэффициент готовности системы и оценить влияние объемов временно́го резерва на эти характеристики.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему, состоящую из N восстанавливаемых элементов, каждый из которых имеет временно́й резерв. Время безотказной работы i-го элемента системы — случайная величина (СВ) α_i с функцией распределения (ФР) $F_i(t) = P(\alpha_i \leq t)$, $i = \overline{1, N}$. Отказ i-го элемента обнаруживается мгновенно и начинается его восстановление, которое длится случайное время β_i с ФР $G_i(t) = P(\beta_i \leq t)$, $i = \overline{1, N}$. В результате ремонта надежностные свойства элемента полностью восстанавливаются. Отказ элемента не становится отказом резервированного элемента, если время восстановления не превышает объема резервного времени, которое описывается СВ γ_i с ФР $R_i(t) = P(\gamma_i \leq t)$, $i = \overline{1, N}$. Резервное время мгновенно пополняется до объема γ_i сразу же после отказа и начала восстановления i-го элемента. Отказ резервированного элемента наступает в момент времени, когда время восстановления превысит объем резерва, т.е. $\beta_i > \gamma_i$.

Предполагается, что в результате отказа элемента не происходит отключения элементов, функционально с ним связанных. Будем считать, что СВ α_i, β_i и γ_i имеют плотности $f_i(t)$, $g_i(t)$, $r_i(t)$ и конечные математические ожидания $\mathrm{E}\alpha_i$, $\mathrm{E}\beta_i$ и $\mathrm{E}\gamma_i$ соответственно. Кроме этого, выполняются условия: $0 < P(\gamma_i < \beta_i) < 1$, $i = \overline{1, N}$.

Прежде чем ввести понятие отказа системы, введем коды физических состояний ее элементов: 1 — элемент работоспособен в исправном состоянии;

0 — восстанавливается и работоспособен за счет временно́го резерва; 2 — восстанавливается (временно́й резерв исчерпан). Тогда физическое состояние системы описывается вектором $\mathbf{d}$, компоненты которого указывают на состояние соответствующего элемента системы. Множество всех физических состояний системы обозначим через D, т.е.

$$D = \left\{ \mathbf{d} |\, \mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_N),\ d_k = 0, 1, 2;\ k = \overline{1, N} \right\}.$$

Будем считать, что элемент находится в работоспособном состоянии, если он пребывает в состояниях 1 или 0, и в отказовом, если он пребывает в состоянии 2. Пусть множество состояний системы D допускает разбиение $D = D_+ \cup D_-$, $D_+ \cap D_- = \varnothing$, где D_+ интерпретируется как множество работоспособных состояний системы, а D_- — как множество отказовых состояний. Следуя [5], векторы из подмножества D_+ будем называть векторами пути, векторы из подмножества D_- — векторами сечений.

Требуется найти стационарные надежностные характеристики системы: средние времена T_+, T_- пребывания системы в работоспособном D_+ и отказовом D_- состояниях соответственно; коэффициент готовности системы K — и определить влияние объемов временно́го резерва на эти характеристики.

3. Построение полумарковской модели системы

Поскольку СВ, описывающие функционирование системы, имеют распределения общего вида, то ее состояния, описываемые векторами $\mathbf{d}$, не являются марковскими. Поэтому для построения математической модели используем полумарковский процесс $S(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [13, 14]. Определим этот процесс с помощью процесса марковского восстановления $\{S_n, \Theta_n; n \geq 0\}$, где $\{S_n; n \geq 0\}$ — вложенная цепь Маркова (ВЦМ), Θ_n — времена пребывания полумарковского процесса в состояниях. Для того чтобы система обладала марковским свойством в моменты изменения физических состояний, укажем номер i элемента, изменившего свое физическое состояние последним, и добавим к вектору $\mathbf{d}$ непрерывные составляющие. В результате фазовое пространство состояний системы будет иметь вид

$$E = \left\{ i\mathbf{dxzu},\ i = \overline{1, N} \right\},$$

где

$\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_N)$; $d_k = 1$ — k-й элемент работоспособен в исправном состоянии; $d_k = 0$ — k-й элемент восстанавливается и остается в работоспособном состоянии за счет временно́го резерва; $d_k = 2$ — k-й элемент восстанавливается и временно́й резерв исчерпан;

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, x_k — время, оставшееся до выхода из строя k-го элемента, причем $x_k > 0$, если $d_k = 1$, $k \neq i$, и $x_k = 0$ для случаев $d_k \neq 1$, $k = i$;

$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$, z_k — время, оставшееся до конца резерва для k-го элемента, причем $z_k > 0$, если $d_k = 0$, $k \neq i$, и $z_k = 0$ для случаев $d_k \neq 0$, $k = i$;

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$, u_k — время, оставшееся до конца восстановления k-го элемента, причем $u_k > 0$, если $d_k = \{0, 2\}$, и $u_k = 0$, если $d_k = 1$.

Для примера опишем содержательный смысл состояния

$$2(1,0,2,0)(x_1,0,0,0)(0,0,0,z_4)(0,0,u_3,u_4).$$

Последним вышел из строя второй элемент, начинается его восстановление, функционирование продолжается за счет резерва. В этот момент первый элемент пребывает в работоспособном состоянии, до выхода его из строя остается время x_1; третий элемент восстанавливается, до конца восстановления — время u_3; четвертый элемент функционирует за счет резерва, оставшийся объем которого равен z_4, а оставшееся время до конца восстановления — u_4.

Время $\Theta_{i\mathbf{dxzu}}$ пребывания системы в состоянии $i\mathbf{dxzu}$ определяются формулой

$$\Theta i\mathbf{dxzu} = \begin{cases} \alpha_i \wedge \omega, & d_i = 1, \\ \gamma_i \wedge \beta_i \wedge \omega, & d_i = 0, \\ \omega, & d_i = 2, \end{cases}$$

где $\omega = (\underset{x_k>0}{\wedge x_k}) \wedge (\underset{z_k>0}{\wedge z_k}) \wedge (\underset{u_k>0}{\wedge u_k})$, $\wedge$ — знак минимума.

Опишем вероятности переходов ВЦМ из состояния $i\mathbf{dxzu}$. Прежде введем обозначение: $\Omega^m_{\mathbf{d}}$ — совокупность номеров компонент вектора $\mathbf{d}$, равных соответственно $m = 0, 1, 2$. Учтем, что каждый элемент системы может перейти из состояния 1 в состояние 0; а из состояния 0 — в состояния 1 или 2; из состояния 2 — в состояние 1.

В случае $d_i = 1$ события переходов определяются значением минимума $\alpha_i \wedge \omega$. Для определенности будем считать, что $\omega = z_j$, $j \in \Omega^0_{\mathbf{d}}$.

Если $\alpha_i < \omega$, то система переходит в состояние $i\mathbf{d}'\mathbf{x}'\mathbf{z}'\mathbf{u}'$ с плотностью вероятности

$$p\left\{i\mathbf{dxzu} \to i\mathbf{d}'\mathbf{x}'\mathbf{z}'\mathbf{u}'\right\} = f_i(\omega - y), \quad y < \omega,$$

где

$$d'_i = 0, \quad d'_k = d_k, \quad k \neq i; \qquad u'_k = u_k - (\omega - y), \quad k \in \Omega^2_{\mathbf{d}};$$
$$z'_k = \begin{cases} z_k - (\omega - y), & k \in \Omega^0_{\mathbf{d}}, \ k \neq j, \\ y, & k = j; \end{cases} \qquad x'_k = \begin{cases} x_k - (\omega - y), & k \in \Omega^1_{\mathbf{d}}, \ k \neq i, \\ 0, & k = i. \end{cases}$$

Если $\omega = z_j < \alpha_i$, то

$$p\left\{i\mathbf{dxzu} \to j\mathbf{d}'\mathbf{x}'\mathbf{z}'\mathbf{u}'\right\} = f_i(\omega + y), \quad y > 0,$$

где

$$d'_j = 2, \quad d'_k = d_k, \quad k \neq j; \qquad x'_i = y, \quad x'_k = x_k - \omega, \quad k \in \Omega^1_{\mathbf{d}}, \quad k \neq i;$$
$$z'_k = z_k - \omega, \quad k \in \Omega^0_{\mathbf{d}}; \qquad u'_k = u_k - \omega, \quad k \in \Omega^0_{\mathbf{d}} \cup \Omega^2_{\mathbf{d}}.$$

Аналогично выписываются вероятности переходов для случаев $d_i = 2$, $d'_i = 1$ и $d_i = 0$, $d'_i = 1$ или $d'_i = 2$.

4. Стационарные характеристики системы

Для нахождения стационарных характеристик системы потребуется определить стационарное распределение ВЦМ полумарковского процесса $S(t)$, описывающего ее функционирование.

Теорема 1. *Стационарное распределение вложенной цепи Маркова $\{S_n; n \geq 0\}$ полумарковского процесса $S(t)$ определяется формулами:*

$$\rho(i\mathbf{dxzu}) = \rho_0 \prod_{\substack{k\in\Omega^1_{\mathbf{d}}\\ k\neq i}} \overline{F_k}(x_k) \prod_{\substack{k\in\Omega^0_{\mathbf{d}}\\ k\neq i}} \int_0^\infty r_k(s+z_k)g_k(s+u_k)ds \times \tag{1}$$
$$\times \prod_{k\in\Omega^2_{\mathbf{d}}} \int_0^\infty r_k(s)\overline{G_k}(s+u_k)ds,$$

если $i \in \Omega^0_{\mathbf{d}} \cup \Omega^1_{\mathbf{d}}$, и

$$\rho(i\mathbf{dxzu}) = \rho_0 \int_0^\infty r_i(s)g_i(s+u_i)ds \prod_{k\in\Omega^1_{\mathbf{d}}} \overline{F_k}(x_k)\times \tag{2}$$
$$\times \prod_{k\in\Omega^0_{\mathbf{d}}} \int_0^\infty r_k(s+z_k)g_k(s+u_k)ds \prod_{\substack{k\in\Omega^2_{\mathbf{d}}\\ k\neq i}} \int_0^\infty r_k(s)\overline{G_k}(s+u_k)ds,$$

если $i \in \Omega^2_{\mathbf{d}}$, где

$$\overline{F_k}(x_k) = 1 - F_k(x_k), \quad \overline{G_k}(x_k) = 1 - G_k(x_k),$$
$$\rho_0 = \left[\sum_{i=1}^N (2 + P(\gamma_i < \beta_i)) \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^N (\mathrm{E}\alpha_k + \mathrm{E}\beta_k)\right]^{-1}.$$

Доказательство теоремы 1 приводится в Приложении.

В следующей теореме 2 находится выражение для стационарного коэффициента готовности системы.

Теорема 2. *Стационарный коэффициент готовности системы определяется формулой*

$$K = \sum_{\mathbf{d}\in D_+} \prod_{k=1}^N T_k^{(d_k)} \left[\prod_{k=1}^N (\mathrm{E}\alpha_k + \mathrm{E}\beta_k)\right]^{-1}, \tag{3}$$

где

$$T_k^{(d_k)} = \begin{cases} \mathrm{E}\alpha_k, & d_k = 1,\\ \mathrm{E}\,(\beta_k \wedge \gamma_k), & d_k = 0,\\ \mathrm{E}\beta_k - \mathrm{E}\,(\beta_k \wedge \gamma_k), & d_k = 2. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 2 приводится в Приложении.

Выразим стационарный коэффициент готовности системы K через стационарные коэффициенты готовности ее элементов K_i, которые определяются формулами $K_i = \left(T_i^{(1)} + T_i^{(0)}\right)(\mathrm{E}\alpha_i + \mathrm{E}\beta_i)^{-1}$, $i = \overline{1, N}$ [9]. Каждому вектору пути $\mathbf{d} \in D_+$ поставим в соответствие множество элементов пути M_j — номера работоспособных элементов этого пути [5], т.е. M_j выступает исключительно как множество индексов. Заметим, что элементы, не принадлежащие множеству элементов пути, находятся в состоянии 2, т.е. в отказовом состоянии. Каждому вектору сечения $\mathbf{d} \in D_-$ поставим в соответствие множество элементов сечения Φ_j — номера элементов этого сечения, которые находятся в состоянии 2. При этом все элементы, номера которых не принадлежат этому множеству, находятся в состоянии 1 или 0.

Из (3) вытекает, что

$$K = \sum_{j=1}^{W} \prod_{n \in M_j} K_n \prod_{\substack{n=1 \\ n \notin M_j}}^{N} (1 - K_n),$$

где M_j, $j = \overline{1, W}$, — все различные множества элементов путей системы (W — количество путей). Коэффициент K выразим через структурную функцию $\varphi(\mathbf{d})$ системы, которая определяется на множестве D следующим условием: $\varphi(\mathbf{d}) = 1$, если система работоспособна при данном сочетании ее элементов, и $\varphi(\mathbf{d}) = 0$ в противном случае. Получаем, что

$$K = \varphi(K_1, \ldots, K_N), \tag{4}$$

где структурная функция системы $\varphi(z_1, \ldots, z_N)$ задана в совершенной дизъюнктивной нормальной форме [1, 4] или линейной форме [7].

В следующей теореме 3 устанавливаются формулы для определения средних стационарные времен пребывания системы в работоспособном и отказовом состояниях. Прежде чем ее сформулировать, введем множество пограничных физических состояний D'_+. Это множество определяется, как множество таких векторов $\mathbf{d} \in D_+$, для которых изменение одной из компонент с значения 0 на значение 2 (резерв соответствующего элемента исчерпывается) переводит вектор $\mathbf{d}$ в множество D_- (система попадает в отказ). Множество номеров вектора $\mathbf{d} \in D'_+$, обеспечивающих это свойство, обозначим через $G_0^2(\mathbf{d})$.

Т е о р е м а 3. *Среднее стационарное время T_+ пребывания системы в работоспособном состоянии и среднее время T_- пребывания в отказовом состоянии определяются формулами:*

$$(5)\qquad \begin{aligned} T_+ &= \sum_{\mathbf{d} \in D_+} \prod_{k=1}^{N} T_k^{(d_k)} \left[\sum_{d \in D'_+} \sum_{m \in G_0^2(\mathbf{d})} P(\gamma_m < \beta_m) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{N} T_k^{(d_k)} \right]^{-1}, \\ T_- &= \sum_{\mathbf{d} \in D_-} \prod_{k=1}^{N} T_k^{(d_k)} \left[\sum_{d \in D'_+} \sum_{m \in G_0^2(\mathbf{d})} P(\gamma_m < \beta_m) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{N} T_k^{(d_k)} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3 приводится в Приложении.

Стационарные времена (5) пребывания системы в работоспособном и отказовом состояниях выражаются через стационарные коэффициенты готовности ее элементов следующими выражениями:

$$T_+ = \sum_{j=1}^{W} \prod_{n \in M_j} K_n \prod_{\substack{n=1 \\ n \notin M_j}}^{N} (1 - K_n)\, Z^{-1}; \quad T_- = \sum_{j=1}^{S} \prod_{n \notin \Phi_j} K_n \prod_{\substack{n=1 \\ n \in \Phi_j}}^{N} (1 - K_n)\, Z^{-1},$$

где Φ_j, $j = \overline{1, S}$, — множества элементов сечений системы; S— количество сечений;

$$Z = \sum_{i=1}^{W'} \sum_{m \in G(M_i')} P(\gamma_m < \beta_m) \left(\mathrm{E}\alpha_m + \mathrm{E}\beta_m\right)^{-1} \prod_{\substack{n \in M_i' \\ n \neq m}} K_n \prod_{\substack{n=1 \\ n \notin M_i'}}^{N} (1 - K_n),$$

где M_i', $i = \overline{1, W'}$, — множества элементов пограничных путей; $G(M_i')$ — множество элементов пограничного пути M_i', соответствующих номерам тех элементов, переход которых из состояния 0 в состояние 2 приводит к отказу системы.

В частном случае, когда объемы временны́х резервов элементов — постоянные величины, равные h_k, в (3) и (5) следует полагать

$$T_k^{(0)} = \int_0^{h_k} \overline{G_k}(t)dt, \quad T_k^{(2)} = \int_{h_k}^{\infty} \overline{G_k}(t)dt. \tag{6}$$

Если СВ α_k, β_k и γ_k имеют экспоненциальные распределения с параметрами λ_k, μ_k и ν_k соответственно, то в (3) и (5) следует подставить $T_k^{(1)} = \lambda_k^{-1}$, $T_k^{(0)} = (\mu_k + \nu_k)^{-1}$ и $T_k^{(2)} = \nu_k[\mu_k(\mu_k + \nu_k)]^{-1}$.

5. Численный пример

Рассмотрим систему “3 из 4”, которая считается работоспособной, если работают по крайней мере три из четырех ее элементов. Время восстановления каждого из элементов имеет распределение Вейбулла–Гнеденко с плотностью $g_i(t) = \sigma_i t^{\sigma_i - 1} \delta^{-\sigma_i} \exp[-(t/\delta_i)^{\sigma_i}]$, $i = \overline{1, 4}$. Средние времена безотказной работы $\mathrm{E}\alpha_i$ (в часах) и восстановления $\mathrm{E}\beta_i$ (в часах) элементов, значения параметров σ_i и δ_i плотностей распределений $g_i(t)$ приводятся в табл. 1.

Таблица 1. Значения параметров системы

Номер элемента i	Значение параметра σ_i	Значение параметра δ_i	Среднее время работы $\mathrm{E}\alpha_i$, ч	Среднее время восстановления $\mathrm{E}\beta_i$, ч
1	2	2	20	1,772
2	5	4	23	3,673
3	4	2,5	18	2,266
4	4,5	3	25	2,738

Таблица 2. Стационарные характеристики системы

h, ч	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
T_+,ч	21,601	23,255	25,343	27,985	31,361	35,738	41,524	49,394	60,305
T_-,ч	1,359	1,243	1,135	1,035	0,940	0,852	0,769	0,692	0,620
K	0,941	0,949	0,957	0,964	0,971	0,977	0,982	0,986	0,990

Каждый элемент имеет неслучайный резерв времени h часов, который изменяется от 0 до 1,6 ч с шагом 0,2 ч. Формула (4) для вычисления коэффициента готовности системы K с учетом структурной функции системы в линейной форме принимает вид

$$K = K_1K_2K_3 + K_1K_2K_4 + K_1K_3K_4 + K_2K_3K_4 - 3K_1K_2K_3K_4.$$

Результаты расчетов в системе компьютерной математики Mathcad-15 стационарных характеристик по формулам (4) и (5), в которых $T_k^{(0)}$ и $T_k^{(2)}$ определяются по (6), помещены в табл. 2.

Наличие временнóго резерва объемом 1,6 ч для каждого элемента увеличивает стационарный коэффициент готовности системы на 5,2 % по сравнению с системой без резерва. Поскольку коэффициент готовности K есть монотонная функция от h, то нетрудно определить объем временнóго резерва элементов для достижения заданного уровня надежности системы. Так, например, значение $K = 0{,}97$ достигается при $h = 0{,}771$ ч.

6. Заключение

С помощью аппарата теории полумарковских процессов с дискретно-непрерывным множеством состояний построена модель функционирования многокомпонентной системы с произвольными временами безотказной работы и восстановлений ее элементов, которые имеют мгновенно пополняемые временны́е резервы. С помощью найденного стационарного распределения вложенной цепи Маркова установлены формулы для вычисления стационарного коэффициента готовности, средних стационарных времен пребывания системы в работоспособном и отказовом состояниях. Эти характеристики зависят от структуры, понятия отказа системы и с помощью структурной функции системы выражаются через коэффициенты готовности ее элементов, которые зависят от объема временнóго резерва. На приведенном численном примере продемонстрировано влияние объема временнóго резерва на характеристики системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Система интегральных уравнений для определения стационарного распределения $\rho(B)$ ВЦМ составляется на основании уравнения [13, 14]

$$\rho(B) = \int\limits_E \rho(de)P(e,B), \tag{П.1}$$

где $P(e,B)$ — вероятность перехода из состояния e в множество B.

Справедливость утверждения теоремы 1 доказывается непосредственной подстановкой выражений (1) и (2) в систему уравнений (П.1). Проделаем это для одного из них. Выпишем уравнение для случая $i \in \Omega^0_{\mathbf{d}}$, т.е. последним изменил свое состояние i-й элемент, он начал восстанавливаться и продолжает функционировать за счет резерва ($d_i = 0$):

$$\begin{aligned}\rho(i\mathbf{dxzu}) = &\int\limits_0^\infty f_i(t)\rho(i\mathbf{d}'(\mathbf{x}+t)(\mathbf{z}+t)(\mathbf{u}+t))dt + \\ &+ \sum_{j\in\Omega^1_{\mathbf{d}}}\int\limits_0^\infty f_j(x_j+t)\rho(j\mathbf{d}'((\mathbf{x}+t)^{(j)},t)^{(i)}(\mathbf{z}+t)(\mathbf{u}+t))dt + \\ &+ \sum_{\substack{j\in\Omega^0_{\mathbf{d}}\\ j\neq i}}\int\limits_0^\infty r_j(z_j+t)g_j(u_j+t)\rho(j\mathbf{d}'((\mathbf{x}+t),t)^{(i)}(\mathbf{z}+t)^{(j)}(\mathbf{u}+t)^{(j)})dt + \\ &+ \sum_{j\in\Omega^2_{\mathbf{d}}}\int\limits_0^\infty ds\int\limits_0^\infty r_j(s)g_j(u_j+t+s)\rho(j\mathbf{d}'((\mathbf{x}+t),t)^{(i)}(\mathbf{z}+t)(\mathbf{u}+t))dt.\end{aligned} \tag{П.2}$$

Здесь $d'_i = 1$, $d'_k = d_k$, $k \neq i$, а через $(\mathbf{x}+t)^{(j)}$ и $((\mathbf{x}+t),t)^{(i)}$ обозначены векторы с координатами

$$\left[(\mathbf{x}+t)^{(j)}\right]_k = \begin{cases} x_k+t, & x_k>0, \\ 0, & x_k = 0, \quad k=j; \end{cases}$$

$$\left[((\mathbf{x}+t),t)^{(i)}\right]_k = \begin{cases} x_k+t, & x_k>0, \\ 0, & x_k = 0, \\ t, & k=i. \end{cases}$$

Подставим в правую часть уравнения выражения для стационарной плотности, определяемые по (1) и (2). Выполним преобразования, учитывая, что $\Omega^1_{\mathbf{d}'} - \{i\} = \Omega^1_{\mathbf{d}}$, $\Omega^0_{\mathbf{d}} - \{i\} = \Omega^0_{\mathbf{d}'}$, $\Omega^2_{\mathbf{d}'} = \Omega^2_{\mathbf{d}}$. В результате первое слагаемое в (П.2) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^\infty f_i(t)\rho(i\mathbf{d}'(\mathbf{x}+t)(\mathbf{z}+t)(\mathbf{u}+t))dt = \\ &= \rho_0\int\limits_0^\infty f_i(t)\prod_{\substack{k\in\Omega^1_{\mathbf{d}'}\\ k\neq i}}\overline{F_k}(x_k+t)dt\prod_{k\in\Omega^0_{\mathbf{d}'}}\int\limits_0^\infty r_k(s+z_k+t)g_k(s+u_k+t)ds\times \\ &\times\prod_{k\in\Omega^2_{\mathbf{d}'}}\int\limits_0^\infty r_k(s)\overline{G_k}(s+u_k+t)ds = \rho_0\int\limits_0^\infty f_i(t)\prod_{k\in\Omega^1_{\mathbf{d}}}\overline{F_k}(x_k+t)dt\times\end{aligned}$$

$$\times \prod_{\substack{k\in\Omega^0_{\mathbf{d}}\\ k\neq i}} \int\limits_t^\infty r_k(z_k+y)g_k(u_k+y)dy \prod_{k\in\Omega^2_{\mathbf{d}}} \int\limits_0^\infty r_k(s)\overline{G_k}(s+u_k+t)ds.$$

Слагаемые второй группы из правой части (П.2) преобразуются к виду

$$\int\limits_0^\infty f_j(x_j+t)\rho(j\mathbf{d}'((\mathbf{x}+t)^{(j)},t)^{(i)}(\mathbf{z}+t)(\mathbf{u}+t))dt =$$

$$= \rho_0 \int\limits_0^\infty f_j(x_j+t)\overline{F_i}(t) \prod_{\substack{k\in\Omega^1_{\mathbf{d}'}\\ k\neq i,j}} \overline{F_k}(x_k+t)dt \prod_{k\in\Omega^0_{\mathbf{d}'}} \int\limits_0^\infty r_k(s+z_k+t)g_k(s+u_k+t)ds\times$$

$$\times \prod_{k\in\Omega^2_{\mathbf{d}'}} \int\limits_0^\infty r_k(s)\overline{G_k}(s+u_k+t)ds = \rho_0 \int\limits_0^\infty f_j(x_j+t)\overline{F_i}(t) \prod_{\substack{k\in\Omega^1_{\mathbf{d}}\\ k\neq j}} \overline{F_k}(x_k+t)dt\times$$

$$\times \prod_{\substack{k\in\Omega^0_{\mathbf{d}}\\ k\neq i}} \int\limits_t^\infty r_k(z_k+y)g_k(u_k+y)dy \prod_{k\in\Omega^2_{\mathbf{d}}} \int\limits_0^\infty r_k(s)\overline{G_k}(s+u_k+t)ds.$$

В результате аналогичных преобразований для оставшихся слагаемых правую часть (П.2) приведем к виду

$$-\rho_0 \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \overline{F_i}(t) \prod_{k\in\Omega^1_{\mathbf{d}}} \overline{F_k}(x_k+t) \prod_{\substack{k\in\Omega^0_{\mathbf{d}}\\ k\neq i}} \int\limits_t^\infty r_k(s+z_k)g_k(s+u_k)ds\times \right.$$

$$\left. \times \prod_{k\in\Omega^2_{\mathbf{d}}} \int\limits_0^\infty r_k(s)\overline{G_k}(s+u_k+t)ds \right\} dt =$$

$$= \rho_0 \prod_{k\in\Omega^1_{\mathbf{d}}} \overline{F_k}(x_k) \prod_{\substack{k\in\Omega^0_{\mathbf{d}}\\ k\neq i}} \int\limits_0^\infty r_k(s+z_k)g_k(s+u_k)ds\times$$

$$\times \prod_{k\in\Omega^2_{\mathbf{d}}} \int\limits_0^\infty r_k(s)\overline{G_k}(s+u_k)ds = \rho(i\mathbf{dxzu}).$$

Аналогично проверяется справедливость утверждения теоремы 1 для остальных уравнений системы (П.1). Значение постоянной ρ_0 находится из условия нормировки.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Обозначим через E_+ подмножество фазовых состояний полумарковского процесса $S(t)$, дискретная составляющая которых принадлежит D_+, т.е. $E_+ = \left\{i\mathbf{dxzu},\ \mathbf{d} \in D_+,\ i = \overline{1,N}\right\}$. Аналогично определим подмножество $E_- = \left\{i\mathbf{dxzu},\ \mathbf{d} \in D_-,\ i = \overline{1,N}\right\}$. Очевидно, что $E = E_+ \cup E_-$, $E_+ \cap E_- = \varnothing$. Тогда, как известно [13, 14], стационарный коэффициент готовности системы K определяется формулой

$$K = \int\limits_{E_+} m(e)\rho(de) \left[\int\limits_{E} m(e)\rho(de)\right]^{-1},$$

где $m(e)$ — среднее время пребывания системы в состоянии $e \in E$, а $\rho(\cdot)$ — стационарное распределение ВЦМ $\{S_n; n \geq 0\}$.

Средние времена $\mathrm{E}(\Theta_{i\mathbf{dxzu}})$ пребывания системы в состояниях определяются формулами: $\mathrm{E}(\Theta_{i\mathbf{dxzu}}) = \int_0^\omega \overline{F_i}(t)dt$, если $d_i = 1$; $\mathrm{E}(\Theta_{i\mathbf{dxzu}}) = \omega$, если $d_i = 2$; $\mathrm{E}(\Theta_{i\mathbf{dxzu}}) = \int_0^\omega \overline{R_i}(t)\overline{G_i}(t)dt$, если $d_i = 0$.

Обозначим через $E_{\mathbf{d}}$ подмножество состояний пространства E, дискретная составляющая которых есть фиксированный вектор $\mathbf{d}$. Учитывая средние времена пребывания системы в состояниях и вид стационарного распределения, после преобразований получаем

$$\rho_0^{-1}\int\limits_{E_{\mathbf{d}}} m(e)\rho(de) = \rho_0^{-1}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{R_{\mathbf{x}}^+}\int\limits_{R_{\mathbf{z}}^+}\int\limits_{R_{\mathbf{u}}^+} \mathrm{E}(\Theta_{i\mathbf{dxzu}})\rho(i\mathbf{dxzu})d\mathbf{x}d\mathbf{z}d\mathbf{u} =$$

$$= \sum_{i\in\Omega_{\mathbf{d}}^1}\int\limits_0^\infty \overline{F_i}(t)dt \prod_{\substack{k\in\Omega_{\mathbf{d}}^1\\ k\neq i}}\int\limits_t^\infty \overline{F_k}(s)ds \prod_{k\in\Omega_{\mathbf{d}}^0}\int\limits_t^\infty \overline{R_k}(s)\overline{G_k}(s)ds\times$$

$$\times\prod_{k\in\Omega_{\mathbf{d}}^2}\int\limits_t^\infty du\int\limits_0^\infty r_k(s)\overline{G_k}(s+u)ds + \sum_{i\in\Omega_{\mathbf{d}}^0}\int\limits_0^\infty \overline{R_i}(t)\overline{G_i}(t)dt\times$$

$$\times\prod_{k\in\Omega_{\mathbf{d}}^1}\int\limits_t^\infty \overline{F_k}(s)ds \prod_{\substack{k\in\Omega_{\mathbf{d}}^0\\ k\neq i}}\int\limits_t^\infty \overline{R_k}(s)\overline{G_k}(s)ds\times$$

$$\times\prod_{k\in\Omega_{\mathbf{d}}^2}\int\limits_t^\infty du\int\limits_0^\infty r_k(s)\overline{G_k}(s+u)ds + \sum_{i\in\Omega_{\mathbf{d}}^2}\int\limits_0^\infty dt\int\limits_0^\infty r_i(s)\overline{G_i}(s+t)ds \prod_{k\in\Omega_{\mathbf{d}}^1}\int\limits_t^\infty \overline{F_k}(s)ds\times$$

$$\times\prod_{k\in\Omega_{\mathbf{d}}^0}\int\limits_t^\infty \overline{R_k}(s)\overline{G_k}(s)ds \prod_{\substack{k\in\Omega_{\mathbf{d}}^2\\ k\neq i}}\int\limits_t^\infty du\int\limits_0^\infty r_k(s)\overline{G_k}(s+u)ds =$$

$$= -\int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}\left\{\prod_{k\in\Omega_{\mathbf{d}}^1}\int\limits_t^\infty \overline{F_k}(s)ds \prod_{k\in\Omega_{\mathbf{d}}^0}\int\limits_t^\infty \overline{R_k}(s)\overline{G_k}(s)ds \prod_{k\in\Omega_{\mathbf{d}}^2}\int\limits_t^\infty du\int\limits_0^\infty r_k(s)\overline{G_k}(s+u)ds\right\}dt =$$

$$= \prod_{k\in\Omega^1_{\mathbf{d}}} \mathrm{E}\alpha_k \prod_{k\in\Omega^0_{\mathbf{d}}} \mathrm{E}(\beta_k \wedge \gamma_k) \prod_{k\in\Omega^2_{\mathbf{d}}} [\mathrm{E}\beta_k - \mathrm{E}(\beta_k \wedge \gamma_k)] = \prod_{k=1}^{N} T_k^{(d_k)}.$$

Здесь

$$\int\limits_{R^+_{\mathbf{x}}}\int\limits_{R^+_{\mathbf{z}}}\int\limits_{R^+_{\mathbf{u}}} d\mathbf{x}d\mathbf{z}d\mathbf{u} =$$

$$= \underbrace{\int\limits_0^\infty \ldots \int\limits_0^\infty dx_{s_1}\ldots dx_{s_m}}_{x_{s_1}>0\ldots x_{s_m}>0} \underbrace{\int\limits_0^\infty \ldots \int\limits_0^\infty dz_{s_1}\ldots dz_{s_k}}_{z_{s_1}>0\ldots z_{s_k}>0} \underbrace{\int\limits_0^\infty \ldots \int\limits_0^\infty du_{s_1}\ldots du_{s_l}}_{u_{s_1}>0\ldots u_{s_l}>0}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{E_+} m(e)\rho(de) = \rho_0 \sum_{\mathbf{d}\in D_+} \prod_{k=1}^{N} T_k^{(d_k)}$$

и

$$\int\limits_{E} m(e)\rho(de) = \rho_0 \sum_{\mathbf{d}\in D} \prod_{k=1}^{N} T_k^{(d_k)} = \rho_0 \sum_{\mathbf{d}\in D} \prod_{k=1}^{N} (\mathrm{E}\alpha_k + \mathrm{E}\beta_k).$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Известно [13, 14], что средние стационарные времена пребывания системы в работоспособном и отказовом состояниях определяются соответственно формулами:

$$T_+ = \int\limits_{E_+} m(e)\rho(de) \left[\int\limits_{E_+} P(e, E_-)\rho(de)\right]^{-1},$$

$$T_- = \int\limits_{E_-} m(e)\rho(de) \left[\int\limits_{E_+} P(e, E_-)\rho(de)\right]^{-1},$$

где $P(e, E_-)$ — вероятности переходов ВЦМ из работоспособного состояния $e \in E_+$ в отказовые.

Возьмем вектор $\mathbf{d}$ из подмножества пограничных состояний D'_+ и предположим, что изменение состояния элемента с номером m со значения 0 на значение 2 переводит систему в отказовое состояние, т.е. $\mathbf{d} \in D'_+$ и $m \in G^2_0(\mathbf{d})$. Рассмотрим слагаемые из выражения

$$\text{(П.3)} \qquad \int\limits_{E_+} P(e, E_-)\rho(de),$$

содержащие этот вектор. Учтем, что

$$P(i\mathbf{dxzu}, E_-) = P(\alpha_i \wedge \omega^{(m)} > z_m) = \overline{F_i}(z_m)\overline{1}_{\omega^{(m)}}(z_m) = \begin{cases} \overline{F_i}(z_m), z_m < \omega^{(m)}, \\ 0, z_m > \omega^{(m)}, \end{cases}$$

где $i \in \Omega^1_{\mathbf{d}}$, $\omega^{(m)} = (\underset{x_k>0}{\wedge x_k}) \wedge (\underset{z_k>0, k\neq m}{\wedge z_k}) \wedge (\underset{u_k>0}{\wedge u_k})$. Поэтому слагаемые из (П.3), для которых $i \in \Omega^1_{\mathbf{d}}$, преобразуются к виду

$$\int\limits_{R^+_{\mathbf{x}}}\int\limits_{R^+_{\mathbf{z}}}\int\limits_{R^+_{\mathbf{u}}} \rho(i\mathbf{dxzu})\overline{F_i}(z_m)\overline{1}_{\omega^{(m)}}(z_m)d\mathbf{x}d\mathbf{z}d\mathbf{u} = \int\limits_0^\infty \overline{F_i}(z_m)dz_m \int\limits_{z_m}^\infty r_m(y)G_m(y)dy\times$$

$$\times \prod_{\substack{k\in\Omega^1_{\mathbf{d}} \\ k\neq i}} \int\limits_{z_m}^\infty \overline{F_k}(s)ds \prod_{\substack{k\in\Omega^0_{\mathbf{d}} \\ k\neq m}} \int\limits_{z_m}^\infty \overline{R_k}(s)\overline{G_k}(s)ds \prod_{k\in\Omega^2_{\mathbf{d}}} \int\limits_{z_m}^\infty du \int\limits_0^\infty r_k(s)\overline{G_k}(s+u)ds.$$

Выполняя аналогичные преобразования для остальных слагаемых из (П.3), получаем, что

$$\sum_{i=1}^N \int\limits_{R^+_{\mathbf{x}}}\int\limits_{R^+_{\mathbf{z}}}\int\limits_{R^+_{\mathbf{u}}} \rho(i\mathbf{dxzu})P(i\mathbf{dxzu}, E_-)d\mathbf{x}d\mathbf{z}d\mathbf{u} = -\rho_0 \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}\left\{ \int\limits_t^\infty r_m(y)\overline{G_m}(y)dy \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{k\in\Omega^1_{\mathbf{d}}} \int\limits_t^\infty \overline{F_k}(s)ds \prod_{\substack{k\in\Omega^0_{\mathbf{d}} \\ k\neq m}} \int\limits_t^\infty \overline{R_k}(s)\overline{G_k}(s)ds \prod_{k\in\Omega^2_{\mathbf{d}}} \int\limits_t^\infty du \int\limits_0^\infty r_k(s)\overline{G_k}(s+u)ds \right\} dt =$$

$$= \rho_0 P(\gamma_m < \beta_m) \prod_{k\in\Omega^1_{\mathbf{d}}} T^{(1)}_k \prod_{\substack{k\in\Omega^0_{\mathbf{d}} \\ k\neq m}} T^{(0)}_k \prod_{k\in\Omega^2_d} T^{(2)}_k = \rho_0 P(\gamma_m < \beta_m) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq m}}^N T^{(d_k)}_k.$$

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Половко А.М., Гуров С.В.* Основы теории надежности. СПб.: БХВ-Петербург, 2006.
2. *Ushakov I.* Is reliability theory still alive? // Reliability: Theory and Applications. 2007. V. 2. No. 1. P. 6–19.
3. *Каштанов В.А., Медведев А.И.* Теория надежности сложных систем (теория и практика). М.: Евр. центр по качеству, 2002.
4. *Черкесов Г.Н.* Надежность аппаратно-программных комплексов. СПб.: Питер, 2005.
5. *Beichelt F., Franken P.* Zuverlässigkeit und Instanphaltung, Mathematische Methoden. Berlin: VEB Verlag Technik, 1983.

6. *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.* Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965.
7. *Barlow R., Proschan F.* Mathematical theory of reliability. N.Y.: Wiley, 1965.
8. *Ushakov I.A.* Probabilistic Reliability Models. San Diego: Wiley, 2012.
9. *Креденцер Б.П.* Прогнозирование надежности систем с временной избыточностью. Киев: Наук. думка, 1978.
10. *Черкесов Г.Н.* Надежность технических систем с временной избыточностью. М.: Сов. радио, 1974.
11. *Копп В.Я., Обжерин Ю.Е., Песчанский А.И.* Стохастические модели автоматизированных производственных систем с временным резервированием. Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2001.
12. *Сеннова Е.В., Смирнов А.В., Ионин А.А. и др.* Надежность систем энергетики и их оборудования: Справ. в 4 Т. / Под общ. ред. Ю.Н. Руденко. Т. 4. Надежность систем теплоснабжения. Новосибирск: Наука, 2000.
13. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. Киев: Наук. думка, 1982.
14. *Корлат А.Н., Кузнецов В.Н., Новиков М.И. и др.* Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. Кишинев: Штиинца, 1991.
15. *Obzherin Yu.E., Peschansky A.I.* Calendar Maintenance of Arbitrarily Structured Systems // Cybern. Syst. Anal. 2006. V. 42. No. 2. P. 219–233.
16. *Песчанский А.И.* Стационарные характеристики ненадежной двухканальной системы обслуживания с потерями и мгновенно пополняемым резервом времени // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. 2018. № 2(58). С. 36–46.
17. *Obzherin Yu.E., Peschansky A.I.* Reliability Analysis of a System with Gradually Refilled Time Reserve // Cybern. Syst. Anal. 2001. V. 37. No. 3. P. 361–372.
18. *Obzherin Yu.E., Peschansky A.I.* Reliability Analysis of a System with Combined Time Reserve // Cybern. Syst. Anal. 2004. V. 40. No. 5. P. 747–754.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневским.

Поступила в редакцию 14.02.2019

После доработки 07.05.2019

Принята к публикации 18.07.2019