Автоматика и телемеханика, № 2, 2019

Линейные системы

© 2019 г. **И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru)**
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург,
Университет ИТМО, Санкт-Петербург),
П.А. ГУЩИН, канд техн. наук (guschin.p@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург,
Российский государственный университет нефти и газа
(национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина, Москва)

АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ ВХОДНЫМ СИГНАЛОМ НА БАЗЕ СУБПРЕДИКТОРОВ РЕГУЛИРУЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ВОЗМУЩЕНИЯ[1]

Предложен алгоритм управления линейными объектами с запаздывающим входным сигналом при наличии внешних возмущений. Сначала для синтеза алгоритма используются предиктор регулируемой величины и предиктор возмущения. Предиктор регулируемой величины осуществляет асимптотический прогноз вектора состояния объекта, а уравнение замкнутой системы на базе данного предиктора содержит запаздывание по состоянию. Вследствие этого существует некоторое предельное значение запаздывания в объекте, для которого алгоритм остается работоспособным. Предиктор возмущения строится в предположении существования ограниченных производных от возмущения. Далее строятся субпредикторы регулируемой величины и возмущения в виде последовательного соединения соответствующих предикторов, осуществляющих многошаговое прогнозирование. Получены достаточные условия устойчивости замкнутой системы в виде разрешимости линейных матричных неравенств. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие эффективность предложенной схемы по сравнению с некоторыми существующими. Численные примеры показывают, что полученные достаточные условия гарантируют устойчивость регулятора, основанного на субпредикторах, при бóльших значениях запаздывания по сравнению с регулятором на базе предикторов.

Ключевые слова: объект с запаздыванием по управлению, предиктор, компенсация возмущений, линейное матричное неравенство.

DOI: 10.1134/S0005231019020016

1. Введение

Управление в условиях возмущений является одной из главных проблем в теории автоматического управления. Данная проблема усложняется наличием запаздывания во входном сигнале. Такие задачи являются типичными

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-10104) в Институте проблем машиноведения РАН.

при дистанционном управлении, управлении в химической промышленности, управлении через цифровые каналы связи и т.д.

Впервые решение задачи управления в условии запаздывания предложено О. Смитом в [1] для устойчивых объектов без возмущения. Для неустойчивых объектов А. Манитиус и А. Олброт в [2] предложили статический закон управления с использованием пропорционально-интегрального предиктора, построенного на базе решения уравнения объекта. В [3, 4] рассмотрено использование схемы [2] для подавления ограниченных возмущений за счет соответствующего распределения собственных чисел замкнутой системы. Однако в [5–8] было показано, что численная реализация предиктора [2] позволяет стабилизировать только определенный класс неустойчивых объектов с запаздыванием. Следовательно, принцип подавления возмущений [3, 4] не всегда гарантирует уменьшение влияния возмущений на качество переходных процессов. В [9] для повышения качества переходных процессов предполагалось, что возмущение описывается конечной суммой синусоидальных сигналов. Однако структура алгоритма [9] и расчет настраиваемых параметров зависели от количества синусоидальных слагаемых в возмущении, качество переходных процессов зависело от наличия несинусоидальной составляющей, а также использовался интегральный алгоритм [2] без его численной реализации.

В [10] предложен метод компенсации возмущений (ограниченных вместе с заданным количеством производных) для неустойчивых объектов с запаздыванием по управлению без использования численной реализации схемы [2]. Таким образом, в отличие от [9] в [10] рассматривались возмущения, которые раскладываются в ряд Фурье с бесконечным числом слагаемых. Однако в [10] для прогноза возмущения использовались наблюдатели, что усложняло реализацию схемы и повышало ее чувствительность к помехам измерения. В [11] независимо от [10] (статьи [10, 11] были поданы в журналы одновременно) предложена схема компенсации ограниченных вместе с заданным количеством производных возмущений на базе схемы [2]. В отличие от [10] в [11] рассмотрена численная реализация [2] и получены достаточные условия сходимости решений замкнутой системы. Дополнительно в [11] для прогноза возмущения применялась теорема Лагранжа о среднем, что позволило избежать использования наблюдателей производных возмущения в отличие от [10], где для прогноза возмущения применялся ряд Тэйлора. В [11] также показано, что метод компенсации возмущений позволяет эффективно управлять объектами с запаздывающим входным сигналом в отличие от метода подавления возмущений [2–4]. Это связано с тем, что значение сигнала компенсации возмущений противоположно значению возмущений и сигнал компенсации возмущений не влияет на собственные числа замкнутой системы. Однако алгоритм [11] слишком трудоемкий в связи с численной реализацией интегральной составляющей предиктора [2].

В [12] предложен новый предиктор, позволяющий проектировать алгоритмы управления неустойчивыми объектами. По сравнению с [2], предиктор [12] не требует численной реализации и, как следствие, гораздо проще в технической реализации и расчете параметров. В [13] на базе предиктора [12] предложен субпредиктор, осуществляющий многошаговое прогнозирование регули-

руемой переменной. Численные примеры показали, что применение субпредикторного алгоритма позволяет управлять объектами с бóльшим временем запаздывания, чем при использовании алгоритма на базе предиктора [12]. Однако результаты [12, 13] слишком чувствительны к возмущениям.

В данной статье будет предложено обобщение результатов [12, 13] на объекты с возмущениями. Дополнительно в отличие от [11] будет предложен многошаговый прогноз возмущения в виде соответствующего субпредиктора. Также в отличие от [10] будут предложены достаточные условия устойчивости замкнутой системы, представленные разрешимостью линейных матричных неравенств (ЛМН), размерность которых существенно меньше, чем в [11].

В статье, как и в публикациях [2–4, 10–13], будет рассмотрен линейный объект с возмущением и запаздыванием по управлению. Доступен измерению вектор состояния. В разделе 3 будет предложена схема управления с использованием предикторов регулируемой переменной и возмущений. В разделе 5 будет рассмотрено обобщение предложенной схемы управления с использованием субпредикторов регулируемой величины и возмущения. Достаточные условия устойчивости замкнутой системы в зависимости от параметров системы управления и запаздывания представлены в разделах 4 и 5 в виде разрешимости ЛМН. В разделе 6 будут приведены результаты расчетов, моделирования и сравнительный анализ предложенных схем управления с некоторыми существующими.

2. Постановка задачи

Рассмотрим объект с запаздыванием в канале управления, который описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-h) + Bf(t), \quad t \geqslant 0, \quad u(s) = 0, \quad s < 0, \tag{2.1}$$

где $x(t) \in \mathrm{R}^n$ — измеряемый вектор состояния, $u(t) \in \mathrm{R}^m$ — сигнал управления, $f(t) \in \mathrm{R}^m$ — внешнее возмущение с ограниченными $r+3$ производными, $r \geqslant 0$ — параметр, который будет использоваться при синтезе алгоритма управления, $h > 0$ — известное время запаздывания, A и B — известные матрицы соответствующих размеров, пара (A, B) управляема и выполнено условие $B^+B = I_m$, B^+ — псевдообратная матрица для матрицы B и I_m — единичная матрица порядка m. Отметим, что объект управления (2.1) с приведенными допущениями рассматривался в [3, 4, 10–13].

Алгоритмы [1–4, 5–8, 12, 13] обеспечивают устойчивость (2.1) по вход-состоянию (input-to-state stability) и выполнение условия

$$\varlimsup_{t\to\infty} |x(t)| \leqslant \delta, \tag{2.2}$$

где $\delta = \mathrm{O}\left(\varlimsup_{t\to\infty} |f(t)|\right)$, $\mathrm{O}(\chi)$ для $\chi \in \mathrm{R}$ означает, что $\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{O}(\chi)}{\chi} = \mathrm{const}$, $|\cdot|$ — евклидова норма соответствующего вектора, т.е. точность регулирования в установившемся режиме в [1–4, 5–8], [12, 13] зависит от сигнала возмущения.

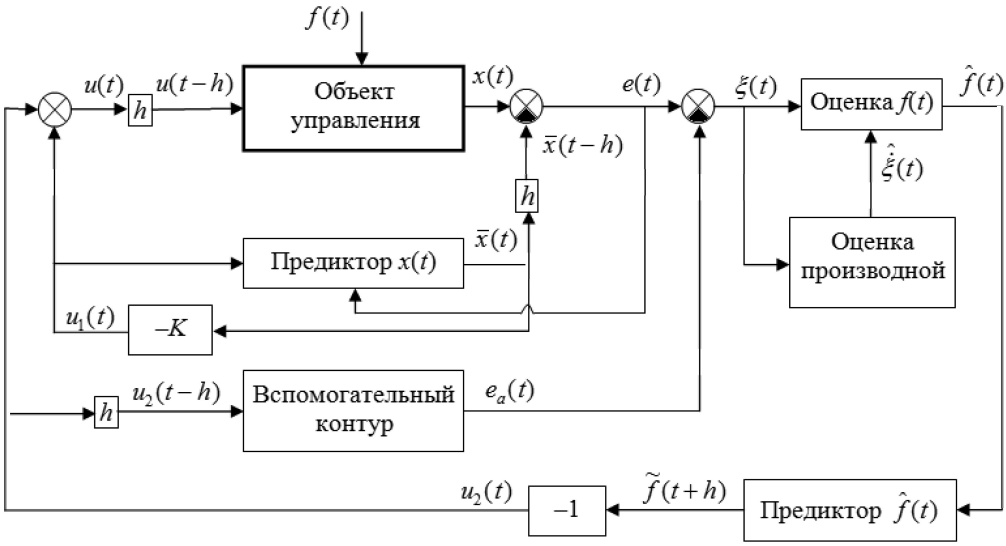

Рис. 1. Структурная схема системы управления.

В данной статье цель управления состоит в разработке алгоритма управления, который обеспечит

$$\delta = \mathrm{O}\left(h^{r+1} \overline{\lim_{t\to\infty}} \left|f^{(r+1)}(t)\right|\right),$$

т.е. в отличие от [1–4, 5–8, 12, 13] предложенный алгоритм позволит компенсировать бóльшие по амплитуде возмущения. Достаточное условие для обеспечения поставленной цели управления будет приведено в утверждении 1.

Опишем кратко схему синтеза алгоритма управления. Сигнал u представим в виде

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t). \tag{2.3}$$

С помощью сигнала u_1 будем обеспечивать устойчивость замкнутой системы, а с помощью сигнала u_2 — компенсацию возмущения f. В разделе 3 формируется предиктор регулируемой величины для синтеза u_1 (“Предиктор $x(t)$” на рис. 1). Затем формируется оценка возмущения $\hat{f}$ с использованием вспомогательного контура и алгоритма оценки производной. Для прогноза оценки возмущения $\hat{f}$ используется предиктор возмущения (“Предиктор $\hat{f}(t)$” на рис. 1). После формируется сигнал компенсации возмущения u_2.

В разделе 5 будет предложено обобщение результатов раздела 4 для управления объектами с бóльшим временем запаздывания. Также новый алгоритм позволит существенно сократить время прогноза возмущения. Для решения данной задачи будут синтезированы субпредикторы регулируемой величины и возмущения. Структурная схема такой системы управления подобна схеме, представленной на рис. 1, где вместо предикторов будут использоваться соответствующие субпредикторы.

3. Синтез предиктора регулируемой величины и предиктора возмущения

Сначала синтезируем закон управления u_1. Для этого потребуется прогноз регулируемой величины на время запаздывания h. С этой целью введем предиктор

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + D\left(x(t) - \bar{x}(t-h)\right) + Bu_1(t), \tag{3.1}$$

где матрица D выбирается так, чтобы решения уравнения

$$\dot{\kappa}(t) = A\kappa(t) - D\kappa(t-h), \quad \kappa(t) \in \mathrm{R}^n, \tag{3.2}$$

были предельно ограниченными. В утверждении 1 будет сформулировано количественное условие для выбора матрицы D в виде разрешимости ЛМН.

Зададим закон управления u_1 в виде

$$u_1(t) = -K\bar{x}(t), \tag{3.3}$$

где матрица K выбирается из условия гурвицевости матрицы $A - BK$.

Введем ошибку прогноза $e(t) = x(t) - \bar{x}(t-h)$. С учетом (2.3) продифференцируем $e(t)$ вдоль решений уравнений (2.1) и (3.1):

$$\dot{e}(t) = Ae(t) - De(t-h) + Bu_2(t-h) + Bf(t). \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, что выполнить условие $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ при наличии внешнего возмущения f невозможно, но величину $\overline{\lim}_{t\to\infty} |e(t)|$ можно уменьшить путем соответствующего выбора закона управления u_2, который обеспечит частичную компенсацию возмущения f. Поэтому далее синтезируем алгоритм компенсации возмущений.

Получим сначала информацию о возмущении f. С этой целью введем вспомогательный контур

$$\dot{e}_a(t) = Ae_a(t) - De_a(t-h) + Bu_2(t-h), \tag{3.5}$$

где $e_a(t) \in \mathrm{R}^n$. Найдем производную по времени от функции $\xi(t) = e(t) - e_a(t)$ вдоль траекторий уравнений (3.3) и (3.5):

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) - D\xi(t-h) + Bf(t). \tag{3.6}$$

Следуя структуре уравнения (3.6), зададим оценку возмущения в виде

$$\hat{f}(t) = B^+\left(\hat{\dot{\xi}}(t) - A\xi(t) + D\xi(t-h)\right), \tag{3.7}$$

где сигнал $\hat{\dot{\xi}}(t)$ определяется согласно алгоритму

$$\hat{\dot{\xi}}_i(t) = \frac{p}{\mu p + 1}\xi_i(t), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.8}$$

Здесь $\mu > 0$ – достаточно малое число, $p = d/dt$ – оператор дифференцирования.

Для частичной компенсации возмущения f закон управления u_2 требуется задать в виде $u_2(t) = -\hat{f}(t+h)$. Для построения прогноза оценки возмущения воспользуемся теоремой Лагранжа о среднем [14], согласно которой функцию $\hat{f}(t+h)$ можно записать в виде

$$\hat{f}(t+h) = \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^{j} \hat{f}(t - h(j-1)) + R(t), \tag{3.9}$$

где $C_{r+1}^{j} = \frac{(r+1)!}{(r+1-j)!j!}$, $R(t) = h^{r+1} \hat{f}^{(r+1)} \left(t - [(r+1)\theta - 1]\, h\right)$ – остаток разложения, $0 < \theta < 1$. Поскольку остаток $R(t)$ недоступен измерению, то предиктор возмущения и закон частичной компенсации возмущения определим в виде:

$$\tilde{f}(t+h) = \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^{j} \hat{f}(t - h(j-1)), \tag{3.10}$$

$$u_2(t) = -\tilde{f}(t+h). \tag{3.11}$$

Для дискретного времени алгоритм (3.10) рассмотрен в [15], для непрерывного времени – в [16]. Из (3.10) следует, что для прогноза оценки возмущения требуется время rh.

В результате сформирован алгоритм управления, состоящий из предиктора регулируемой величины (3.1), вспомогательного контура (3.5), предиктора возмущения (3.10) и закона управления (2.3), состоящего из (3.3) для обеспечения устойчивости замкнутой системы и (3.11) для компенсации возмущения. Для формулировки основного результата раздела 3 необходимо сформировать уравнение замкнутой системы.

4. Уравнение замкнутой системы и основной результат

Введем новую переменную $x_1 = x - e$ и продифференцируем ее вдоль решений (2.1) и (3.4):

$$\dot{x}_1(t) = (A - BK)\, x_1(t) + De(t-h). \tag{4.1}$$

Рассмотрим ошибку оценки производной $\eta = \dot{\xi} - \hat{\dot{\xi}}$. Принимая во внимание (3.7), (3.8) и обозначив $z = \ddot{\xi}$, запишем выражения:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= -\frac{1}{\mu}\eta(t) + z(t), \\ \dot{z}(t) &= Az(t) - Dz(t-h) + B\ddot{f}(t). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Поскольку сигнал $\ddot{f}(t)$ ограниченный и матрица D выбирается из условия обеспечения предельной ограниченности решений (3.2), то сигнал $\eta(t)$ предельно ограниченный.

Введем новые переменные $w(t) = \eta^{(r+1)}(t)$ и $g(t) = \xi^{(r+3)}(t)$. Принимая во внимание (4.2), продифференцируем η и z по времени $r+1$ раз и результат запишем в виде:

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= -\frac{1}{\mu} w(t) + g(t), \\ \dot{g}(t) &= Ag(t) - Dg(t-h) + Bf^{(r+3)}(t). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Так как сигнал $f^{(r+3)}(t)$ – ограниченный, то сигнал $w(t)$ – предельно ограниченный.

Перепишем (3.6) как $Bf(t) = \dot{\xi}(t) - A\xi(t) + D\xi(t-h)$. С учетом (3.7) и (3.9)–(3.11), составим соотношения

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= u_2(t-h) + f(t) = \hat{f}(t) - \tilde{f}(t) + f(t) - \hat{f}(t) = \\ &= R(t-h) + B^+\eta(t) = h^{r+1}\hat{f}^{(r+1)}\left(t-(r+1)\theta h\right) + B^+\eta(t) = \\ &= h^{r+1}\left[f^{(r+1)}\left(t-(r+1)\theta h\right) - B^+ w\left(t-(r+1)\theta h\right)\right] + B^+\eta(t). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Из ограниченности $f^{(r+1)}(t)$, $w(t)$ и $\eta(t)$ следует ограниченность $\lambda(t)$. Подставив (4.4) в (3.4), получим

$$\dot{e}(t) = Ae(t) - De(t-h) + B\lambda(t). \tag{4.5}$$

В результате, замкнутая система представлена уравнениями (4.1)–(4.3) и (4.5). Поскольку решения уравнений (4.2) и (4.3) – предельно ограниченные, то для исследования устойчивости замкнутой системы достаточно рассмотреть только уравнения (4.1) и (4.5).

Введем вектор и матрицы

$$x_p = col\{x_1, e\}, \quad A_p = \begin{bmatrix} A - BK & \mathrm{O}_{n\times n} \\ \mathrm{O}_{n\times n} & A \end{bmatrix},$$
$$D_p = \begin{bmatrix} \mathrm{O}_{n\times n} & D \\ \mathrm{O}_{n\times n} & -D \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} \mathrm{O}_{n\times n} \\ B \end{bmatrix},$$

где $\mathrm{O}_{n\times m}$ – нулевая матрица размеров $n \times m$. Перепишем уравнения (4.1) и (4.5) в виде

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + D_p x_p(t-h) + B_p\lambda(t)$$

или, используя формулу Ньютона–Лейбница, как

$$\dot{x}_p(t) = \left(A_p + D_p\right) x_p(t) - D_p \int\limits_{t-h}^{t} \dot{x}_p(s)ds + B_p\lambda(t). \tag{4.6}$$

Утверждение 1. Рассмотрим систему управления, состоящую из объекта (2.1), *предиктора регулируемой величины* (3.1), *вспомогательного контура* (3.5), *предиктора возмущения* (3.10) *и закона управления* (2.3), (3.3), (3.11). *Пусть для заданного числа* $\alpha > 0$ *и матриц* K *и* D *существуют коэффициент* $\beta > 0$ *и матрицы* $P > 0$, $P_2 > 0$, $P_3 > 0$, $Q > 0$, $S > 0$ *такие, что выполнено ЛМН*

$$\Psi := \begin{bmatrix} \Psi_{11} & P - P_2^{\mathrm{T}} + (A_p + D_p)^{\mathrm{T}} P_3 & \mathrm{O}_{4n\times 4n} & -hP_2^{\mathrm{T}} D_p & P_2^{\mathrm{T}} B_p \\ * & -P_3 - P_3^{\mathrm{T}} + hS & \mathrm{O}_{4n\times 4n} & -hP_3^{\mathrm{T}} D_p & P_3^{\mathrm{T}} B_p \\ * & * & -e^{-2\alpha h} Q & \mathrm{O}_{4n\times 4n} & \mathrm{O}_{4n\times(2m+n)} \\ * & * & * & -hS & \mathrm{O}_{4n\times(2m+n)} \\ * & * & * & * & -\beta I_{2m+n} \end{bmatrix} < 0, \tag{4.7}$$

где

$$\Psi_{11} = P_2^{\mathrm{T}} (A_p + D_p) + (A_p + D_p)^{\mathrm{T}} P_2 + 2\alpha P + Q. \tag{4.8}$$

Тогда решения замкнутой системы (4.1)–(4.3), (4.5) *предельно ограничены. Причем*

$$\delta = \mathrm{O}\left(h^{r+1} \sup \left| f^{(r+1)}(t) \right| \right)$$

в целевом условии (2.2) *при достаточно малом* μ.

Доказательство. Для исследования устойчивости (4.6) рассмотрим функционал Ляпунова–Красовского в виде

$$V = V_1 + V_2 + V_3, \tag{4.9}$$

где

$$V_1 = x_p^{\mathrm{T}} P x_p,$$

$$V_2 = \int\limits_{t-h}^{t} e^{2\alpha(\sigma - t)} x_p^{\mathrm{T}}(\sigma) Q x_p(\sigma) d\sigma,$$

$$V_3 = \int\limits_{-h}^{0} \int\limits_{t+\zeta}^{t} e^{2\alpha(\sigma - t)} \dot{x}_p^{\mathrm{T}}(\sigma) S \dot{x}_p(\sigma) d\sigma d\zeta.$$

Отметим, что составляющая V_3 позволяет получить условие устойчивости замкнутой системы, которое в явном виде будет зависеть от запаздывания (delay depended condition [17]). Принимая во внимание (4.6), составим выра-

жения:

$$
\begin{aligned}
\dot V_1 + 2\alpha V_1 &= x_p^{\mathrm T} P \dot x_p + 2\alpha x_p^{\mathrm T} P x_p + 2\left[x_p^{\mathrm T} P_2^{\mathrm T} + \dot x_p^{\mathrm T} P_3^{\mathrm T}\right] \times \\
&\qquad \times \left[\left(A_p + D_p\right) x_p(t) - D \int\limits_{t-h}^{t} \dot x_p(s) ds + B_p \lambda(t) - \dot x_p(t)\right], \\
\dot V_2 + 2\alpha V_2 &= x_p^{\mathrm T}(t) Q x_p(t) - e^{-2\alpha h} x_p^{\mathrm T}(t-h) Q x_p(t-h), \\
\dot V_3 + 2\alpha V_3 &= h \dot x_p^{\mathrm T} S \dot x_p - \int\limits_{t-h}^{t} e^{2\alpha(\sigma - t)} \dot x_p^{\mathrm T}(\sigma) S \dot x_p(\sigma) d\sigma.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

При составлении первого выражения в (4.10) использовался дескрипторный метод [17]. Воспользовавшись неравенством Йенсена (Jensen's inequality [17]), оценим последнее выражение в (4.10) в виде

$$
\dot V_3 + 2\alpha V_3 \leqslant h \dot x_p^{\mathrm T} S \dot x_p - \frac{e^{-2\alpha h}}{h} \int\limits_{t-h}^{t} \dot x_p^{\mathrm T}(\sigma) d\sigma \; S \int\limits_{t-h}^{t} \dot x_p(\sigma) d\sigma. \tag{4.11}
$$

Введем вектор

$$
y(t) = col\left\{x_p(t), \dot x_p(t), x_p(t-h), \frac{1}{h}\int\limits_{t-h}^{t} \dot x_p(\sigma) d\sigma, \lambda(t)\right\}
$$

и запишем выражение $\dot V + 2\alpha V - \beta \lambda^{\mathrm T} \lambda \leqslant y^{\mathrm T} \Psi y$. Очевидно, что $y^{\mathrm T} \Psi y \leqslant 0$, если выполнено условие (4.7).

Теперь покажем, что в замкнутой системе обеспечивается (2.2) с $\delta = \mathrm O\left(h^{r+1} \sup\left|f^{(r+1)}(t)\right|\right)$. Принимая во внимание (2.3) и (4.4), перепишем (2.1) в виде $\dot x(t) = Ax(t) + Bu_1(t-h) + B\lambda(t)$. Обозначим

$$
\Delta(\mu) = \overline{\lim_{t\to\infty}} |\lambda(t)|.
$$

Тогда из (4.2), (4.3) и (4.4) следует, что

$$
\lim_{\mu\to 0} \Delta(\mu) = h^{r+1} \overline{\lim_{t\to\infty}} \left|f^{(r+1)}(t)\right|.
$$

Таким образом, предложенный алгоритм обеспечивает (2.2) с точностью $\delta = \mathrm O\left(h^{r+1} \overline{\lim}_{t\to\infty} \left|f^{(r+1)}(t)\right|\right)$, в то время как существующие алгоритмы [1–4, 6–9, 12, 13] обеспечивают $\delta = \mathrm O\left(\overline{\lim}_{t\to\infty} |f(t)|\right)$. Утверждение 1 доказано.

Замечание. Покажем ограниченность всех сигналов в замкнутой системе. Так как вектор y – предельно ограниченный, то сигнал x_p – предельно ограниченный. Из предельной ограниченности x_p следует предельная ограниченность x_1 и e. Из выражения $x_1 = x - e$ следует предельная ограниченность x. Из предельной ограниченности e, x и $e(t) = x(t) - \bar x(t-h)$ следует

предельная ограниченность $\bar{x}$. Значит, из (3.4) следует предельная ограниченность u_1.

Продифференцируем (3.6): $\ddot{\xi}(t) = A\dot{\xi}(t) - D\dot{\xi}(t-h) + B\dot{f}(t)$. Из ограниченности $\dot{f}$ следует предельная ограниченность $\dot{\xi}$. Перепишем (3.8) в виде $\dot{\hat{\xi}} = -\frac{1}{\mu}\hat{\xi} + \frac{1}{\mu}\dot{\xi}$. Из предельной ограниченности $\dot{\xi}$ следует предельная ограниченность $\dot{\hat{\xi}}$. Из предельной ограниченности $\dot{\hat{\xi}}$ и ξ следует предельная ограниченность $\hat{f}$. Сигнал u_2 ограничен из (3.10) и (3.11). Значит, сигнал u предельно ограничен из (2.3). В результате все сигналы ограничены в замкнутой системе. Замечание доказано.

5. Синтез субпредиктора регулируемой величины и субпредиктора возмущения

На базе результатов разделов 3 и 4 рассмотрим синтез субпредикторов, которые осуществляют многошаговое прогнозирование вектора состояния и возмущения. Как будет показано на численных примерах в разделе 6, субпредикторный алгоритм может сократить время прогноза возмущения и обеспечить устойчивость замкнутой системы по отношению к бóльшему запаздыванию в канале управления в (2.1), чем при использовании предикторов из раздела 4.

Для прогноза регулируемой величины введем систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\bar{x}}_i(t) = A\bar{x}_i(t) + D_i\left(\bar{x}_{i+1}(t) - \bar{x}_i(t-\bar{h})\right) + Bu_1(t-(i-1)\bar{h}),\\
&\qquad i = 1,\dots,M-1,\\
&\dot{\bar{x}}_M(t) = A\bar{x}_M(t) + D_M\left(x(t) - \bar{x}_M(t-\bar{h})\right) + Bu_1(t-(M-1)\bar{h}),
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

где

$$
\bar{x}_i(t) \in \mathrm{R}^n, \quad \bar{h} = \frac{h}{M}.
$$

Число M задается разработчиком, а матрицы D_i выбираются из условия обеспечения предельной ограниченности решений следующей системы уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\kappa}_i(t) = A\kappa_i(t) - D_i\kappa_i(t-\bar{h}) + D_{i+1}\kappa_{i+1}(t-\bar{h}), \quad i = 1,\dots,M-1,\\
&\dot{\kappa}_M(t) = A\kappa_M(t) - D_M\kappa_M(t-\bar{h}),
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

где $\kappa_i \in \mathrm{R}^n$, $i = 1,\dots,M$. В утверждении 2 будет сформулировано количественное условие для выбора матриц D_i в виде разрешимости ЛМН. Систему (5.1) будем называть субпредиктором регулируемой величины, поскольку каждое уравнение системы (5.1) обеспечивает прогноз регулируемой величины на время запаздывания $\frac{h}{M}$.

Введем ошибки прогноза:

$$
\begin{aligned}
&e_i(t) = \bar{x}_{i+1}(t-(M-i)\bar{h}) - \bar{x}_i(t-(M-i+1)\bar{h}), \quad i = 1,\dots,M-1,\\
&e_M(t) = x(t) - \bar{x}_M(t-\bar{h}).
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

При $e_i(t) \to 0$, $i = 1, \ldots, M$, следует, что $\bar{x}_1(t-h) \to x(t)$ или $\bar{x}_1(t) \to x(t+h)$. С учетом (2.3) продифференцируем (5.3) вдоль решений уравнений (2.1) и (5.1):

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= Ae_i(t) - D_i e_i(t-\bar{h}) + D_{i+1} e_{i+1}(t-\bar{h}), \quad i = 1, \ldots, M-1, \\ \dot{e}_M(t) &= Ae_M(t) - D_M e_M(t-\bar{h}) + Bu_2(t-h) + Bf(t). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Если положить $u_2(t) \equiv 0$ и $f(t) \equiv 0$ и выбрать D_i, $i = 1, \ldots, M$, такими, что система (5.2) асимптотически устойчива, то из (5.3) следует, что $\lim_{t\to\infty} x(t+h) = \lim_{t\to\infty} \bar{x}_1(t)$. Следовательно, зададим закон управления u_1 в виде

$$u_1(t) = -K\bar{x}_1(t), \tag{5.5}$$

где матрица K задается из условия гурвицевости матрицы $A - BK$.

Однако $f \neq 0$ по условию задачи. Поэтому далее синтезируем алгоритм компенсации возмущений u_2 с целью уменьшения влияния возмущения f на значение ошибок прогноза e_i, $i = 1, \ldots, M$. Введем вспомогательный контур

$$\dot{e}_a(t) = Ae_a(t) - D_M e_a(t-\bar{h}) + Bu_2(t-h), \tag{5.6}$$

где $e_a(t) \in \mathrm{R}^n$. Найдем производную по времени от функции

$$\xi(t) = e_M(t) - e_a(t)$$

вдоль траекторий M-го уравнения в системе (5.4) и уравнения (5.6):

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) - D_M \xi(t-\bar{h}) + Bf(t). \tag{5.7}$$

Следуя структуре (5.7), зададим оценку возмущения в виде

$$\hat{f}(t) = B^+ \left(\hat{\dot{\xi}}(t) - A\xi(t) + D_M \xi(t-\bar{h}) \right), \tag{5.8}$$

где сигнал $\hat{\dot{\xi}}(t)$ получен с помощью алгоритма (3.8).

Теперь сформируем алгоритм прогноза оценки возмущения $\hat{f}(t)$. Для этого запишем выражение для $\hat{f}(t+\hat{h})$ в виде

$$\hat{f}(t+\hat{h}) = \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^{j} \hat{f}(t - \hat{h}(j-1)) + \hat{R}(t), \tag{5.9}$$

где $\hat{h} = \frac{h}{N}$, число $N > 0$ выбирается разработчиком, $\hat{R}(t) = \hat{h}^{r+1} \hat{f}^{(r+1)} \times$ $\times \left(t - [(r+1)\theta - 1]\, \hat{h} \right)$ – остаток разложения.

Очевидно, что значения $\hat{f}(t+\hat{h})$ недостаточно для компенсации возмущений. Следовательно, сдвинем вправо аргумент функции $\hat{f}(t+\hat{h})$ в (5.9) на

величину $\hat{h}$ последовательно N раз. Следуя данной процедуре, прогноз возмущения на величину h можно сформировать в виде:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{f}(t+\hat{h}) = \sum_{j=1}^{r+1}(-1)^{j-1}C_{r+1}^{j}\hat{f}(t-\hat{h}(j-1)),\\
&\tilde{f}(t+l\hat{h}) = \sum_{j=1}^{l-1}(-1)^{j-1}C_{r+1}^{j}\tilde{f}(t-\hat{h}(j-l)) + \sum_{j=l}^{r+1}(-1)^{j-1}C_{r+1}^{j}\hat{f}(t-\hat{h}(j-l)),\\
&\qquad l = 2,\ldots,r+1 \text{ (или } l = 2,\ldots,N, \text{ если } N < r+2),\\
&\tilde{f}(t+k\hat{h}) = \sum_{j=1}^{r+1}(-1)^{j-1}C_{r+1}^{j}\tilde{f}(t-\hat{h}(j-k)),\\
&\qquad k = r+2,\ldots,N \text{ (если } N \geqslant r+2).
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

Систему (5.10) будем называть субпредиктором возмущений. Отметим, что при $N < r+2$ субпредиктор возмущения состоит только из первых двух выражений (5.10). При $N \geqslant r+2$ субпредиктор возмущения включает в себя все уравнения (5.10). Также из (5.10) видно, что время прогноза возмущения составляет $\hat{h}r = \frac{hr}{N}$, т.е. по сравнению с (3.10) алгоритмы (5.10) позволяют уменьшить время прогноза возмущения в N раз.

Сформируем закон частичной компенсации возмущения в виде

$$
u_2(t) = -\tilde{f}(t+h). \tag{5.11}
$$

В итоге сформирован алгоритм управления, состоящий из субпредиктора регулируемой величины (5.1), вспомогательного контура (5.6), субпредиктора возмущения (5.10) и закона управления (2.3), в состав которого входят сигнал (5.5) для обеспечения устойчивости замкнутой системы и сигнал (5.11) для компенсации возмущения.

Перед формулировкой основного результата настоящего раздела предварительно сформируем уравнение замкнутой системы. С учетом (5.9)–(5.10) составим ошибки прогноза $\varepsilon_l(t) = \hat{f}(t+l\hat{h}) - \tilde{f}(t+l\hat{h})$, $l = 1,\ldots,N$, в виде

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_1(t) = \hat{R}(t),\\
&\varepsilon_l(t) = \sum_{j=1}^{l-1}(-1)^{j-1}C_{r+1}^{j}\varepsilon_{l-j}(t) + \varepsilon_1(t+(l-1)\hat{h}),\\
&\qquad l = 2,\ldots,r+2 \text{ (или } l = 2,\ldots,N, \text{ если } N \leqslant r+2),\\
&\varepsilon_v(t) = \sum_{j=1}^{r+1}(-1)^{j-1}C_{r+1}^{j}\varepsilon_{v-j}(t) + \varepsilon_1(t+(v-1)\hat{h}),\\
&\qquad v = r+3,\ldots,N \text{ (если } N > r+2).
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) = u_2(t-h) + f(t) = -\tilde{f}(t) + f(t) = \\ = \hat{f}(t) - \tilde{f}(t) + f(t) - \hat{f}(t) = \varepsilon_N(t-h) + B^+\eta(t).\end{aligned} \tag{5.13}$$

Введем новую переменную

$$x_1 = x - \sum_{i=1}^{M} e_i.$$

С учетом (5.13) продифференцируем x_1 по времени вдоль решений (2.1) и (5.4):

$$\dot{x}_1(t) = (A - BK)\, x_1(t) + D_1 e_1(t - \bar{h}). \tag{5.14}$$

Составим ошибку оценки производной $\eta = \dot{\xi} - \dot{\hat{\xi}}$ в виде (4.2). Обозначив $z = \ddot{\xi}$, найдем производную от z с учетом (5.7):

$$\dot{z}(t) = Az(t) - D_M z(t - \bar{h}) + B\ddot{f}(t). \tag{5.15}$$

Введем новые переменные $w(t) = \eta^{(r+1)}(t)$ и $g(t) = \xi^{(r+3)}(t)$. Принимая во внимание (4.2) и (5.15), продифференцируем η и z по времени $r+1$ раз и результат запишем в виде:

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) = -\frac{1}{\mu} w(t) + g(t), \\ \dot{g}(t) = Ag(t) - D_M g(t - \bar{h}) + Bf^{(r+3)}(t).\end{aligned} \tag{5.16}$$

С учетом (5.13) перепишем (5.4) как

$$\begin{aligned}\dot{e}_i(t) = Ae_i(t) - D_i e_i(t - \bar{h}) + D_{i+1} e_{i+1}(t), \quad i = 1, \ldots, M-1, \\ \dot{e}_M(t) = Ae_M(t) - D_M e_M(t - \bar{h}) + B\lambda_1(t).\end{aligned} \tag{5.17}$$

Покажем ограниченность $\lambda_1(t)$. Поскольку сигналы $f(t)$, $\ddot{f}(t)$ и $f^{(r+3)}(t)$ ограниченные, то из подобия струткур (5.15), второго уравнения (5.16) и последнего уравнения (5.2) следует предельная ограниченность $\xi(t)$ и $\eta(t)$. Продифференцируем (5.7): $\ddot{\xi}(t) = A\dot{\xi}(t) - D_M\dot{\xi}(t-h) + B\dot{f}(t)$. Из ограниченности $\dot{f}$ следует предельная ограниченность $\dot{\xi}$. Перепишем (3.8) в виде $\dot{\hat{\xi}} = -\frac{1}{\mu}\hat{\xi} + \frac{1}{\mu}\dot{\xi}$. Из предельной ограниченности $\dot{\xi}$ следует предельная ограниченность $\dot{\hat{\xi}}$. Из предельной ограниченности $\dot{\hat{\xi}}$, ξ и (5.8) следует ограниченность $\hat{f}$. Из (5.10) следует ограниченность $\tilde{f}$. Сигнал $\varepsilon_N(t)$ ограничен из (5.12). В результате $\lambda_1(t)$ ограничен из (5.13).

Поскольку решения (5.15) и (5.16) предельно ограниченные, то для исследования устойчивости замкнутой системы достаточно рассмотреть только уравнения (5.14) и (5.17).

Введем вектор и матрицы:

$$x_p = col\left\{x_1, e_1, e_2, \ldots, e_M\right\}, \quad A_p = \begin{bmatrix} A-BK & \mathrm{O}_{n\times n} & \ldots & \mathrm{O}_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} \\ \mathrm{O}_{n\times n} & A & \ldots & \mathrm{O}_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} \\ \mathrm{O}_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{O}_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} & \ldots & A & \mathrm{O}_{n\times n} \\ \mathrm{O}_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} & \ldots & \mathrm{O}_{n\times n} & A \end{bmatrix},$$

$$D_p = \begin{bmatrix} \mathrm{O}_{n\times n} & D_1 & \mathrm{O}_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} & \ldots & \mathrm{O}_{n\times n} \\ \mathrm{O}_{n\times n} & -D_1 & D_2 & \mathrm{O}_{n\times n} & \ldots & \mathrm{O}_{n\times n} \\ \mathrm{O}_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} & -D_2 & D_3 & \ldots. & \mathrm{O}_{n\times n} \\ \mathrm{O}_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} & -D_3 & \ldots & \mathrm{O}_{n\times n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{O}_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} & \ldots & -D_M \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} \mathrm{O}_{n\times m} \\ \vdots \\ \mathrm{O}_{n\times m} \\ B \end{bmatrix}.$$

Перепишем уравнения (5.14) и (5.17) в виде

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + D_p x_p(t-\bar{h}) + B_p \lambda_1(t)$$

или

$$\dot{x}_p(t) = \left(A_p + D_p\right) x_p(t) - D_p \int\limits_{t-\bar{h}}^{t} \dot{x}_p(s)ds + B_p\lambda_1(t). \tag{5.18}$$

Отметим, что в разделе 4 уравнение замкнутой системы (4.6) содержало запаздывание h. Использование субпредиктора (5.1) позволило получить новое уравнение замкнутой системы (5.18) с уменьшенным в M раз запаздыванием $\bar{h}$.

Утверждение 2. Рассмотрим систему управления, состоящую из объекта (2.1), *субпредиктора регулируемой величины* (5.1), *вспомогательного контура* (5.6), *субпредиктора возмущения* (5.10) *и закона управления* (2.3), (5.5), (5.11). *Пусть для заданного числа* $\alpha > 0$ *и матриц* K, D *существуют коэффициент* $\beta > 0$ *и матрицы* $P > 0$, $P_2 > 0$, $P_3 > 0$, $Q > 0$, $S > 0$ *такие, что выполнено ЛМН*

$$\Psi := \begin{bmatrix} \Psi_{11} & P - P_2^{\mathrm{T}} + A_0^{\mathrm{T}} P_3 & \mathrm{O}_{(3+M)n\times(3+M)n} & -\bar{h}P_2^{\mathrm{T}} D_p & P_2^{\mathrm{T}} B_p \\ * & -P_3 - P_3^{\mathrm{T}} + \bar{h}S & \mathrm{O}_{(3+M)n\times(3+M)n} & -\bar{h}P_3^{\mathrm{T}} D_p & P_3^{\mathrm{T}} B_p \\ * & * & -e^{-2\alpha\bar{h}}Q & \mathrm{O}_{(3+M)n\times(3+M)n} & \mathrm{O}_{(3+M)n\times(n+m)} \\ * & * & * & -\bar{h}S & \mathrm{O}_{(3+M)n\times(n+m)} \\ * & * & * & * & -\beta I_{n+m} \end{bmatrix} < 0, \tag{5.19}$$

где Ψ_{11} *имеет вид* (4.8). *Тогда решения замкнутой системы* (2.1), (2.3), (5.1), (5.5), (5.6), (5.10), (5.11) *предельно ограничены и выполнено целевое условие* (2.2), *где* $\delta = \mathrm{O}\left(\overline{\lim}_{t\to\infty} |\varepsilon_N(h,t)|\right)$ *при достаточно малом* μ. *Дополнительно: все сигналы ограничены в замкнутой системе.*

Доказательство. Для доказательства утверждения 2 рассмотрим функционал Ляпунова–Красовского (4.9), где только V_2 и V_3 сформируем с учетом нового запаздывания $\bar{h}$ в (5.18):

$$V_2 = \int\limits_{t-\bar{h}}^{t} e^{2\alpha(\sigma-t)} x_p^{\mathrm{T}}(\sigma) Q x_p(\sigma) d\sigma,$$

$$V_3 = \int\limits_{-\bar{h}}^{0} \int\limits_{t+\zeta}^{t} e^{2\alpha(\sigma-t)} \dot{x}_p^{\mathrm{T}}(\sigma) S \dot{x}_p(\sigma) d\sigma d\zeta.$$

В силу подобия структур систем (4.6) и (5.18) вывод условия

$$\dot{V} + 2\alpha V - \beta \lambda_1^{\mathrm{T}} \lambda_1 \leqslant y^{\mathrm{T}} \Psi y \leqslant 0$$

аналогичен выводу в утверждении 1.

Так как $y^{\mathrm{T}}\Psi y \leqslant 0$, то сигнал x_p – предельно ограниченный. Из предельной ограниченности x_p следует предельная ограниченность x_1, e_i, $i = 1, \ldots, M$, η и z. Доказательство ограниченности остальных сигналов в замкнутой системе аналогично доказательству в замечании.

Принимая во внимание (2.3) и (4.4), перепишем (2.1) в виде

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_1(t-h) + B\lambda_1(t).$$

Обозначив

$$\Delta_1(\mu) = \overline{\lim_{t\to\infty}} |\lambda_1(t)|,$$

имеем

$$\lim_{\mu\to 0} \Delta_1(\mu) = \overline{\lim_{t\to\infty}} |\varepsilon_N(h,t)|.$$

Таким образом, предложенный алгоритм управления обеспечивает (2.2) с точностью $\delta = \mathrm{O}\left(\overline{\lim}_{t\to\infty} |\varepsilon_N(h,t)|\right)$ в (2.2). Утверждение 2 доказано.

6. Примеры

Рассмотрим модель объекта управления (2.1) с параметрами [18, 19]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 10/3,$$

$$b_1 = 0{,}1, \quad b_2 = -1/30 \quad \text{и} \quad x(0) = [0{,}98 \;\; 0 \;\; 0{,}2 \;\; 0]^{\mathrm{T}}.$$

В [18] показано, что данная модель может описывать перевернутый маятник на подвижной тележке, где $x = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4]^{\mathrm{T}}$, x_1 — позиция тележки, x_2 — скорость тележки, x_3 — угол маятника относительно вертикальной оси, x_4 — угловая скорость маятника, $a_1 = -m_p g/M_c$, $a_2 = g/l$, $b_1 = 1/M_c$, $b_2 = -1/(M_c l)$, $M_c = 10$ — масса тележки, $m_p = 1$ — масса маятника, $l = 3$ — длина маятника и $g = 10$ — ускорение свободного падения. Положим, что

$$f(t) = 1 + \sin(0{,}2t) + \cos t + \sin\left(1{,}5t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{100}{(5p+1)^7}\ \mathrm{sat}\left(\frac{d(t)}{10}\right),$$

$\mathrm{sat}(\cdot)$ — функция насыщения, $d(t)$ — сигнал, моделируемый в Matlab Simulink с помощью блока “Band-Limited White Noise” с мощность шума (noise power) 0,1 и периодом (sample time) 0,1.

В [18, 19] для стабилизации данного объекта использовался закон управления $u = -Kx$, где $K = [2 \;\; 12 \;\; 378 \;\; 210]$. Далее во всех алгоритмах будем использовать одно и то же значение K. Максимальное значение запаздывания, для которого можно стабилизировать объект в [19], равно $h_{\max} = 0{,}2$. При этом система управления [19] очень чувствительна к возмущениям.

1. Синтез алгоритма на базе предикторов.

Выберем $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 2{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2{,}5 \end{bmatrix}$ в предикторе регулируемой переменной (3.1). В алгоритме оценки производной (3.8) зададим $\mu = 0{,}01$. ЛМН (4.7) разрешимо при $h_{\max}^{LMI} = 0{,}38$. Моделирование в Matlab Simulink показало, что система устойчива при $h_{\max}^{MS} = 0{,}41$, т.е. решение ЛМН имеет небольшое отклонение (7,3 %) от значения, полученного в Matlab Simulink, причем схема управления на базе предиктора позволяет стабилизировать объект при большем в 2 раза времени запаздывания в канале управления по сравнению с [19].

Теперь сравним качество переходных процессов для предложенной схемы и алгоритмов [4, 12]. Пусть $h = 0{,}35$. На рис. 2 приведены результаты переходных процессов для разработанного алгоритма при $r = 3$ и $r = 4$ в (3.10). На рис. 3 изображены графики переходных процессов при использовании алгоритмов [4, 12]. Отметим, что разработанный алгоритм и алгоритмы [4, 12] сохраняют устойчивость при максимальном запаздывании $h = 0{,}41$.

Дополнительный анализ результатов моделирования для алгоритмов [4, 12] показал, что изменение параметров K с целью подавления, а не компенсации, возмущений ведет к потере устойчивости замкнутой системы. Однако разработанный алгоритм обеспечивает компенсацию возмущений для любых значений K, при которых замкнутая система остается устойчивой, так как контур компенсации возмущений не зависит от контура стабилизации замкнутой системы.

2. Синтез алгоритма на базе субпредикторов.

Выберем $M = 2$ и $D_1 = D_2 = D$ в (5.1), т.е. каждый субпредиктор представляет собой предиктор с такими же параметрами, но с уменьшенным

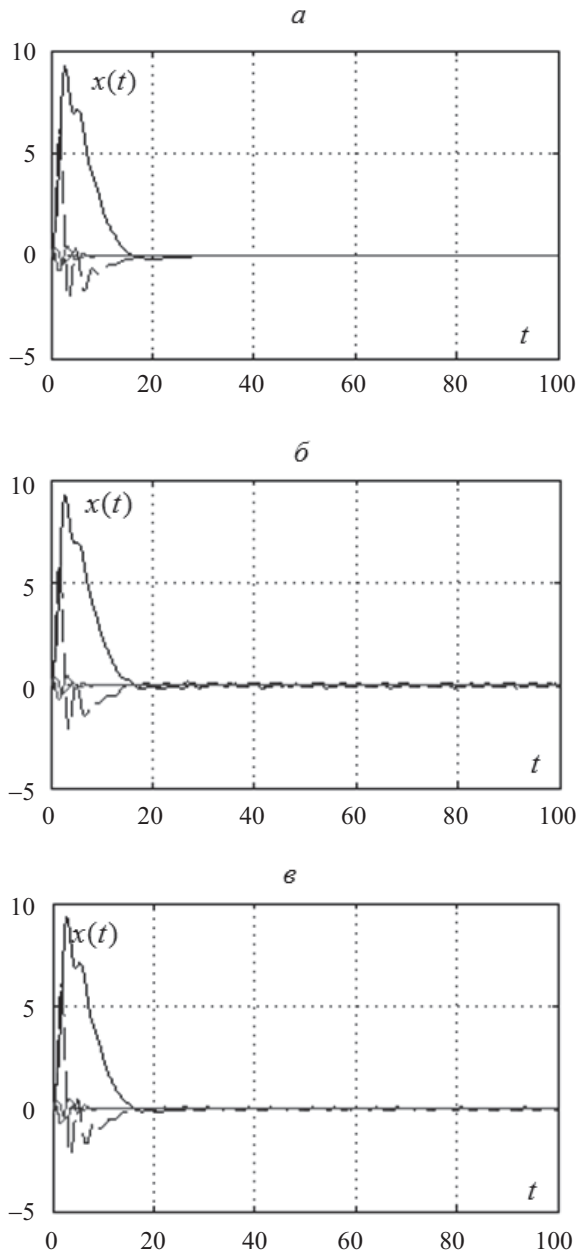

Рис. 2. Переходные процессы по $x(t)$: при $r = 3$ и $f = 0$ (*а*), при $r = 3$ (*б*) и $r = 4$ (*в*) в условиях $f \neq 0$.

в два раза временем запаздывания. Пусть $N = 4$ и $r = 4$ в (5.10), т.е. сократим время прогноза возмущения в 4 раза. ЛМН (5.19) разрешимо при $h_{\max}^{LMI} = 0{,}75$. Моделирование в Matlab Simulink показало, что система устойчива при $h_{\max}^{MS} = 0{,}8$, т.е. консервативность при использовании ЛМН составляет 6,3 %. Таким образом, схема управления на базе субпредикторов позволяет

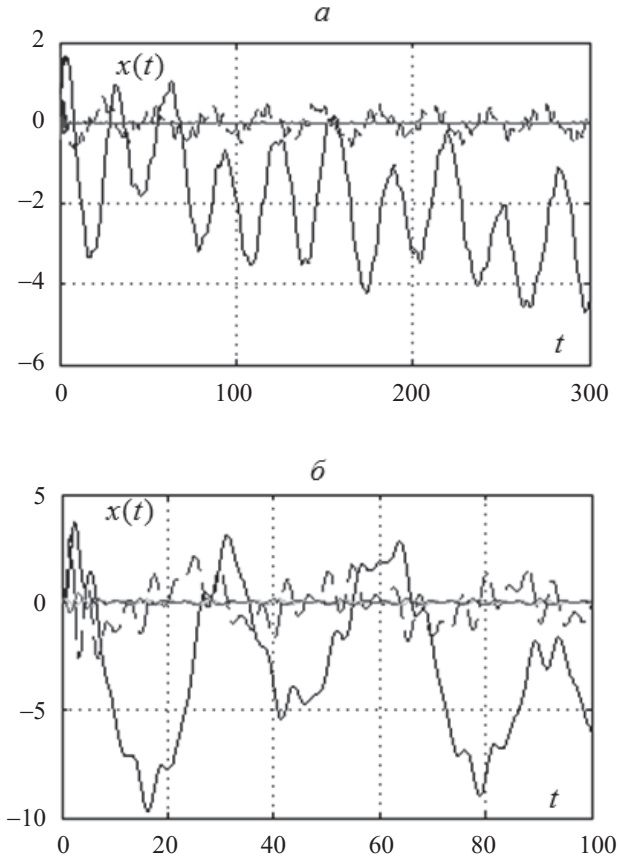

Рис. 3. Переходные процессы по $x(t)$ при использовании алгоритма [4] (a) и алгоритма [12] ($б$).

стабилизировать объект при большем времени запаздывания в канале управления в 4 раза по сравнению с [19] и в 2 раза по сравнению с разработанным алгоритмом на базе предикторов и алгоритма [4]. Результаты переходных процессов при $h = 0{,}7$ для разработанного алгоритма на базе субпредикторов и алгоритма [13] приведены на рис. 4.

7. Заключение

Синтезированы алгоритмы управления линейными объектами с запаздывающим входным сигналом при наличии внешних возмущений. Первый алгоритм основан на использовании предикторов регулируемой величины и возмущения. Второй алгоритм базируется на использовании субпредикторов регулируемой величины и возмущения. Показано, что использование принципа компенсации возмущений позволяет существенно уменьшить влияние возмущений на качество переходных процессов по сравнению с методами подавления возмущений [3, 4]. Получены достаточные условия устойчивости замкнутой системы в виде разрешимости линейных матричных неравенств.

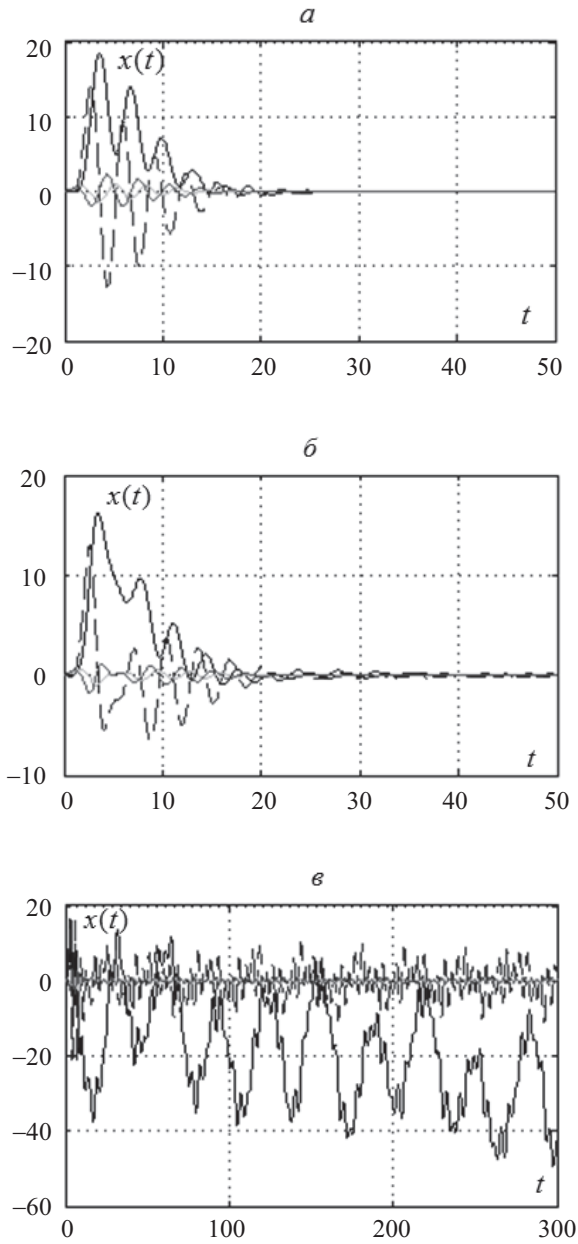

Рис. 4. Переходные процессы по $x(t)$ при использовании разработанного алгоритма на базе субпредикторов (при $f = 0$ (*а*) и $f \neq 0$ (*б*)) и алгоритма [13] при $f \neq 0$ (*в*).

Моделирование разработанных алгоритмов показало их эффективность по сравнению со схемами [4, 12, 13, 19]. Результаты моделирования также показали, что отсутствие возмущения заметно не влияет на величину предельного запаздывания, которое получено с помощью ЛМН или с помощью моделирования исследуемых алгоритмов в Matlab Simulink.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smith J.M.* Closer Control of Loops with Dead Time // Chem. Eng. Prog. 1959. No. 53. P. 2217–2219.
2. *Manitius A.Z., Olbrot A.W.* Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays // IEEE Trans. Autom. Control. 1979. V. AC-24. No. 4. P. 541–553.
3. *Kristic M.* Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems. Birkhauser, 2009.
4. *Mazenc F., Niculesqu S.-I., Krstić M.* Lyapunov–Krasovskii Functionals and Application to Input Delay Compensation for Linear Time-Invariant Systems // Automatica. 2012. V. 48. P 1317–1323.
5. *Van Assche V., Dambrine M., Lafay J.F., Richard J.P.* Some Problems Arising in the Implementation of Distributed-Delay Control Laws // Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and Control, Phoenix, 1999.
6. *Engelborghs K., Dambrine M., Rose D.* Limitations of a Class of Stabilization Methods for Delay Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2001. V. AC-46. No. 2. P. 336–339.
7. *Mondié S., Dambrine M., Santos O.* Approximation of Control Laws with Distributed Delays: a Necessary Condition for Stability // Kybernetika. 2002. V. 38. No. 5. P. 541–551.
8. *Mondié S., Michiels W.* Finite Spectrum Assignment of Unstable Time-Delay Systems With a Safe Implementation // IEEE Trans. Autom. Control. 2003. V. 48. No. 12. P. 2207–2212.
9. *Ван Ц., Арановский С.В., Бобцов А.А., Пыркин А.А.* Компенсация мультисинусоидального возмущения на основе параметризации Юлы–Кучеры // АиТ. 2017. № 9. С. 19–33.

   Wang J., Aranovskiy S.V., Bobtsov A.A., Pyrkin A.A. Compensating for a Multisinusoidal Disturbance Based on Youla-Kucera Parametrization // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1559–1571.
10. *Sanz R., Garcia P., Albertos P.* Enhanced Disturbance Rejection for a Predictor-Based Control of LTI Systems with Input Delay // Automatica. 2016. V. 72. P. 205–208.
11. *Furtat I., Fridman E., Fradkov A.* Disturbance Compensation with Finite Spectrum Assignment for Plants with Input Delay // IEEE Trans. Autom. Control. 2018. V. 63. No. 1. P. 298–305.
12. *Dugard L., Verriet E.* Stability and Control of Time-delay Systems, London: Springer, 1997.
13. *Najafi M., Hosseinnia S., Sheikholeslam F., Karimadini M.* Closed-Loop Control of Dead Time Systems via Sequential Sub-predictors // Int. J. Control. 2013. V. 86. No. 4. P. 599–609.
14. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит, 2003.
15. *Цыпкин Я.З.* Скользящая аппроксимация и принцип поглощения // Докл. РАН. 1997. Т. 357. № 6. С. 750–751.

    Tsypkin Ya.Z. Moving Approximation and the Absorption Principle // Dokl. Mathematics. 1997. V. 56. No. 3. P. 976–977.
16. *Фуртат И.Б.* Алгоритмы скользящей аппроксимации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18. № 3. С. 147–158.
17. *Fridman E.* Introduction to Time-Delay Systems. Analysis and Control. Birkhauser, 2014.

18. *Wang X., Lemmon M.D.* Self-triggered Feedback Control Systems with Finite-Gain $L2$ Stability // IEEE Trans. Autom. Control. 2009. V. 54. No. 3. P. 452–467.
19. *Selivanov A., Fridman E.* Observer-Based Input-to-State Stabilization of Networked Control Systems with Large Uncertain Delays // Automatica. 2016. V. 74. P. 63–70.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.

Поступила в редакцию 15.09.2018

После доработки 20.08.2018

Принята к публикации 08.11.2018