

© 2019 г. А.Н. ЖИРАБОК, д-р техн. наук (zhirabok@mail.ru),
А.Е. ШУМСКИЙ, д-р техн. наук (a.e.shumsky@yandex.com)
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток,
Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток)

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ДИАГНОСТИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ¹

Рассматривается задача функционального диагностирования нелинейных динамических систем непараметрическим методом, особенность которого состоит в том, что значения некоторых параметров диагностируемой системы могут быть неизвестными. Предлагается подход, позволяющий производить локализацию дефектов. Устанавливаются необходимые и достаточные условия возможности преобразования системы к каноническому виду, необходимому для применения непараметрического метода при диагностировании заданной нелинейной системы.

Ключевые слова: нелинейные системы, диагностирование, поиск дефектов, непараметрический метод.

DOI: 10.1134/S0005231019020028

1. Введение и постановка задачи

Настоящая статья является логическим продолжением работы [1], где рассматривалась задача диагностирования технических систем, описываемых динамическими линейными моделями, на основе непараметрического метода, особенность которого состоит том, что знание значений постоянных параметров системы не является обязательным для реализации процедуры диагностирования, в линейном случае достаточно знать только размерности векторов входа, состояния и выхода и места вхождения этих параметров в описание системы [2–6].

В настоящей работе рассматриваются системы, описываемые нелинейными динамическими моделями. Напомним, что для применения непараметрического метода исходная система должна быть представлена в виде вход-выходных соотношений, что всегда можно сделать для линейных моделей. В отличие от этого далеко не всякая нелинейная система может быть представлена в таком виде, поэтому основное внимание в работе уделяется разработке условий такого представления и процедур его получения.

Для формулирования этих условий и процедур используется специальный математический аппарат – алгебра функций, разработанная в [7] для решения

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-19-00046).

задач анализа нелинейных динамических систем и позволяющая рассматривать системы с негладкими нелинейностями, к числу которых относятся такие типичные нелинейности, как сухое трение, люфт, гистерезис, насыщение. Кроме этого, для решения задачи используется логико-динамический подход [8], позволяющий при ограничении на класс используемых преобразований исходной системы применять для решения задачи только методы линейной алгебры.

Рассматривается класс систем, описываемых нелинейной динамической моделью

$$(1.1) \quad x(t+1) = f(x(t), u(t), \gamma), \quad y(t) = h(x(t)).$$

Здесь $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$ – векторы состояния, управления и выхода; $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)^T$ – вектор параметров, i -й дефект ρ_i в системе проявляется в виде недопустимого отклонения i -го параметра γ_i от его номинального значения, f и h – нелинейные функции, при этом функция f может быть недифференцируемой.

Для решения задачи диагностирования непараметрическим методом требуется произвести преобразование векторов состояния и выхода

$$(1.2) \quad x_{*i}(t) = \varphi^{(i)}(x(t)), \quad i = 1, \dots, N, \quad y_*(t) = \psi(y(t))$$

с помощью некоторых функций $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(N)}$ и ψ такое, что в новых координатах преобразованная система описывается моделью без обратных связей:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} x_{*1}(t+1) &= f_*^{(1)}(x_{*2}(t), \dots, x_{*N}(t), y(t), u(t)), \\ x_{*i}(t+1) &= f_*^{(i)}(x_{*i+1}(t), \dots, x_{*N}(t), y(t), u(t)), \quad i = 2, \dots, N-1, \\ x_{*N}(t+1) &= f_*^{(N)}(y(t), u(t)), \\ y_*(t) &= h_*(x_{*1}(t)) \end{aligned}$$

для некоторых функций $f_*^{(1)}, \dots, f_*^{(N)}$, h_* ; для упрощения будем опускать вектор γ там, где это возможно. Отметим, что в нелинейном случае некоторые переменные x_{*i} могут быть векторными.

В ряде случаев исходная модель может быть приведена к более простому виду, нежели (1.3):

$$(1.4) \quad \begin{aligned} x_{*1}(t+1) &= f_*^{(1)}(x_{*2}(t), y(t), u(t)), \\ x_{*i}(t+1) &= f_*^{(i)}(x_{*i+1}(t), y(t), u(t)), \quad i = 2, \dots, N-1, \\ x_{*N}(t+1) &= f_*^{(N)}(y(t), u(t)), \\ y_*(t) &= h_*(x_{*1}(t)). \end{aligned}$$

Условия и способы приведения модели (1.1) к виду (1.3) или (1.4) рассмотрены в разделах 3 и 4. Остановимся вначале на использовании полученных моделей для целей диагностирования.

2. Основные конструкции непараметрического метода

2.1. Преобразование построенной модели

Для применения непараметрического метода произведем в представлениях (1.3) и (1.4) ряд временных сдвигов и подстановок, для конкретности рассмотрим только (1.4):

$$\begin{aligned} x_{*1}(t+2) &= f_*^{(1)}(x_{*2}(t+1), y(t+1), u(t+1)) = \\ &= f_*^{(1)}(f_*^{(2)}(x_{*3}(t), y(t), u(t)), y(t+1), u(t+1)), \\ x_{*1}(t+3) &= f_*^{(1)}(f_*^{(2)}(f_*^{(3)}(x_{*4}(t), y(t), u(t)), y(t+1), u(t+1)), y(t+2), u(t+2)), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$x_{*1}(t+N) = F_*(y(t), u(t), y(t+1), u(t+1), \dots, y(t+N-1), u(t+N-1))$$

для некоторой функции F_* . В результате с учетом $y_* = h_*(x_{*1})$ получаем

$$(2.1) \quad y_*(t+N) = F_{**}\left(y(t), u(t), y(t+1), u(t+1), \dots, y(t+N-1), u(t+N-1)\right),$$

где $F_{**} = h_*(F_*)$.

Будем полагать, что функция F_{**} представляет собой сумму нелинейных членов вида

$$F_{**} = \sum_{i=1}^p \Gamma_i(\gamma) P_i(y(t), u(t), y(t+1), u(t+1), \dots, y(t+N-1), u(t+N-1)),$$

где $\Gamma_i(\gamma)$ – алгебраическое выражение, представляющее собой функцию элементов вектора параметров γ , значения которых могут быть неизвестными, функция $P_i(*)$ может содержать только такие элементы вектора γ , значения которых известны, $i = 1, \dots, p$, p – число слагаемых. Отметим, что искомое представление всегда может быть получено для полиномиальных функций. Если функция $P_i(*)$ содержит параметр, значение которого может быть неизвестно, то для возможности применения непараметрического метода ее следует представить степенным рядом, коэффициенты которого будут зависеть от этого параметра.

Из сказанного следует, что равенство (2.1) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} y_*(t+N) &= F_{**}(y(t), u(t), \dots, y(t+N-1), u(t+N-1)) = \\ &= (\Gamma_1(\gamma) \ \Gamma_2(\gamma) \ \dots \ \Gamma_p(\gamma)) \begin{pmatrix} P_1(t, \dots, t+N-1) \\ P_2(t, \dots, t+N-1) \\ \dots \\ P_p(t, \dots, t+N-1) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$P_i(t, \dots, t+N-1) := P_i(y(t), u(t), \dots, y(t+N-1), u(t+N-1)).$$

Имея последнее представление в виду, запишем, как и в линейном случае [1], выражение для значения величины y_* для T моментов времени:

$$(2.2) \quad Y_T(t) = (y_*(t) \ y_*(t-1) \ \dots \ y_*(t-T+1)) = (\Gamma_1(\gamma) \ \Gamma_2(\gamma) \ \dots \ \Gamma_p(\gamma))P_T(t),$$

$$P_T(t) = \begin{pmatrix} P_1(t-1, \dots, t-N) & P_1(t-2, \dots, t-N-1) & \dots & P_1(t-T, \dots, t-N-T+1) \\ P_2(t-1, \dots, t-N) & P_2(t-2, \dots, t-N-1) & \dots & P_2(t-T, \dots, t-N-T+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_p(t-1, \dots, t-N) & P_p(t-2, \dots, t-N-1) & \dots & P_p(t-T, \dots, t-N-T+1) \end{pmatrix}.$$

Характерной особенностью полученного выражения является то, что параметры, значения которых могут быть неизвестны, находятся в строке $(\Gamma_1(\gamma) \ \Gamma_2(\gamma) \ \dots \ \Gamma_p(\gamma))$, строка $Y_T(t)$ и матрица $P_T(t)$ зависят только от измеряемых значений векторов управления и выхода и элементов вектора γ , значения которых известны. Последнее позволяет осуществлять диагностирование с использованием строки $Y_T(t)$ и матрицы $P_T(t)$, т.е. без знания значений ряда или всех параметров системы.

2.2. Генерация невязки

Для генерации невязки, на основе которой принимается решение о возникших дефектах, используется несколько методов [1], остановимся на методе, основанном на анализе ядра матрицы $P_T(t)$. В [2, 5] размер временного окна T выбирается минимальным, при котором $\text{rank}(P_T(t)) = \text{rank}(P_{T-1}(t))$. Отсюда следует, что последний столбец матрицы $P_T(t)$ линейно выражается через предыдущие столбцы, т.е. существует ненулевой вектор $v(T)$, для которого $P_T(t)v(T) = 0$; это означает, что матрица $P_T(t)$ имеет непустое ядро. Из (2.2) тогда следует $Y_T(t)v(T) = 0$, которое является соотношением избыточности.

Из сказанного следует, что правило генерации невязки

$$(2.3) \quad r_T(t) = Y_T(t)v(T), \quad v(T) \in \ker(P_T(t)),$$

рассмотренное для непрерывных систем в [2, 5], является робастным в том смысле, что оно строится без знания значений некоторых параметров системы. Вычисление элементов соотношения (2.3), однако должно производиться непосредственно в процессе диагностирования в реальном масштабе времени. Этим правило (2.3) отличается от известных методов генерации невязки, опирающихся на полное описание системы, что дает возможность выполнить ряд вычислений предварительно – перед проведением процесса диагностирования. Отметим, что невязка $r_T(t)$ генерируется для каждого момента t , т.е. временное окно является скользящим.

Недостатком рассмотренного подхода является то, что при наличии погрешностей в результатах измерений равенство невязки $r_T(t)$ нулю не будет выполняться даже при отсутствии дефектов. Этот недостаток можно устранить за счет использования пороговой логики принятия решений путем сравнения невязки с неким адаптивным порогом, некоторые правила построения которого приведены в [8].

Ясно, что операции определения T , при котором $\text{rank}(P_T(t)) = \text{rank}(P_{T-1}(t))$, требуют определенных ресурсов времени и не всегда мо-

гут быть реализованы в реальном масштабе времени. Кроме того, вычисление рангов матриц, сформированных на основе экспериментальных данных, является плохой обусловленной задачей. Для устранения этих недостатков можно выбирать T заранее так, чтобы число столбцов матрицы $P_T(t)$ было больше числа ее строк, так будет при $T \geq p + 1$; в этом случае заведомо выполняется равенство $\text{rank}(P_T(t)) = \text{rank}(P_{T-1}(t))$.

2.3. Поиск дефектов

При решении задачи поиска дефектов необходимо построить банк преобразованных моделей, каждая из которых будет чувствительна к одной группе дефектов и нечувствительна к остальным. Детальный анализ дефектов с этой точки зрения содержится в [8], не останавливаясь на нем, уточним, что модель, нечувствительная к дефекту ρ_i , строится на основе результатов рассматриваемой ниже теоремы 2.

Отметим, что модель, нечувствительная к дефекту ρ_i , может оказаться нечувствительной и к некоторым другим дефектам, это можно выяснить по виду системы уравнений (1.3) или (1.4): если в ее описание не входят параметры $\gamma_i, \gamma_j, \dots, \gamma_k$, то модель нечувствительна к дефектам $\rho_i, \rho_j, \dots, \rho_k$ и чувствительна к остальным. Для отражения этих особенностей и принятия решения о возникшем дефекте используется матрица синдромов S . Для параметра γ_i строится вектор-синдром S_i по следующему правилу: если этот параметр входит в описание k -й модели, полагаем $S_{ki} = 1$, в противном случае $S_{ki} = 0$ (см. пример).

Совпадение синдромов S_i и S_j для некоторых параметров γ_i и γ_j означает, что дефекты ρ_i и ρ_j в рамках рассматриваемого подхода неразличимы. В этом случае параметры γ_i и γ_j помещаются в одно множество K_d для некоторого d . Параметры, имеющие индивидуальные синдромы, образуют множества, включающие в себя только один параметр. В результате компоненты вектора параметров $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)^T$ раскладываются в семейство непересекающихся множеств $K = \{K_1, K_2, \dots, K_w\}$. Матрица синдромов S строится из множества векторов-синдромов, соответствующих элементам множества K , как из столбцов.

3. Преобразование исходной модели

Условия и способы приведения исходной системы к виду (1.3) или (1.4), рассматриваемые ниже, опираются на математический аппарат алгебры функций, который детально изложен в [7]. Основные конструкции этого аппарата – отношение частичного порядка на множестве функций $\leq$, бинарные операции $\times$ и $\oplus$, бинарное отношение Δ , а также операторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{m}$ – кратко описаны в Приложении.

3.1. Общий результат

Теорема 1. Система (1.1) преобразуема к виду (1.3) или (1.4) тогда и только тогда, когда

$$(3.1) \quad \mathbf{m}(h \times (\mathbf{m}(h \times \dots \times \mathbf{m}(h) \dots))) \oplus h \neq 1$$

(оператор $\mathbf{m}$ используется N раз).

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(N)}$ и ψ – функции с необходимыми свойствами, т.е. преобразованные координаты (1.2) подчиняются уравнениям (1.3) (для конкретности рассмотрим только эти уравнения). Заменим в последнем из них переменную $x_{*N}(t+1)$ на $\varphi^{(N)}(x(t+1))$ и $y(t)$ на $h(x(t))$:

$$\varphi^{(N)}(x(t+1)) = \varphi^{(N)}(f(x(t), y(t))) = f_*^{(N)}(h(x(t)), u(t)).$$

По определению отношения Δ и оператора $\mathbf{m}$ отсюда следует включение $(h, \varphi^{(N)}) \in \Delta$ и неравенство $\varphi^{(N)} \geq \mathbf{m}(h)$. По аналогии из второго уравнения в (1.3) следует неравенство

$$(3.2) \quad \varphi^{(i)} \geq \mathbf{m}\left(h \times \varphi^{(i+1)} \times \dots \times \varphi^{(N)}\right), \quad i = N-1, \dots, 2.$$

С учетом свойств операции $\times$ и оператора $\mathbf{m}$ получаем
при $i = N-1$

$$\varphi^{(N-1)} \geq \mathbf{m}\left(h \times \varphi^{(N)}\right) \geq \mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h));$$

при $i = N-2$

$$\varphi^{(N-2)} \geq \mathbf{m}\left(h \times \varphi^{(N-1)} \times \varphi^{(N)}\right) \geq \mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h) \times \mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h))).$$

Так как

$$h \geq h \times \mathbf{m}(h),$$

то

$$\mathbf{m}(h) \geq \mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h)),$$

а тогда

$$\mathbf{m}(h) \times \mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h)) \cong \mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h)),$$

что в итоге дает

$$\varphi^{(N-2)} \geq \mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h))).$$

Продолжая аналогично, получим в итоге из (3.2)

$$\varphi^{(1)} \geq \mathbf{m}(h \times (\mathbf{m}(h \times \dots \times \mathbf{m}(h) \dots)))$$

(оператор $\mathbf{m}$ используется N раз). Запишем равенство $y_* = \psi(y)$ при $y_* = h_*(x_{*1}) = h_*(\varphi^{(1)}(x))$ и $y = h(x)$ в виде $h_*(\varphi^{(1)}) = \psi(h)$. Поскольку h_* и ψ – нетривиальные функции, то из последнего равенства имеем $\varphi^{(1)} \oplus h \neq \mathbf{1}$, откуда с учетом полученного выше выражения для функции $\varphi^{(1)}$ следует неравенство (3.1).

Достаточность. На основе неравенства (3.1) можно задать различные функции $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(N)}$ и, следовательно, получить различные модели без обратных связей. Для простоты рассмотрим случай приведения исходной модели к (1.4). Положим

$$\begin{aligned}\varphi^{(N)} &= \mathbf{m}(h), \quad x_{*N} = \varphi^{(N)}(x), \\ \varphi^{(i)} &= \mathbf{m}(h \times \varphi^{(i+1)}), \quad x_{*i} = \varphi^{(i)}(x), \quad i = N-1, \dots, 1.\end{aligned}$$

Заметим, что если при некотором i функция $\mathbf{m}(h \times \varphi^{(i+1)})$ является векторной, то для уменьшения размерности строящейся модели в качестве $\varphi^{(i)}$ можно выбрать скалярную функцию такую, что $\varphi^{(i)} \geq \mathbf{m}(h \times \varphi^{(i+1)})$; сказанное относится и к выбору функции $\varphi^{(N)}$. Отметим, что такой выбор не всегда приводит к требуемому результату, в этом случае необходимо выбирать векторную функцию $\mathbf{m}(h \times \varphi^{(i+1)})$. По определению оператора $\mathbf{m}$ имеем $(\alpha, \mathbf{m}(\alpha)) \in \Delta$ для произвольной функции α , поэтому

$$(h, \mathbf{m}(h)) \in \Delta \quad \text{и} \quad (h \times \varphi^{(i+1)}, \mathbf{m}(h \times \varphi^{(i+1)})) \in \Delta,$$

что после подстановки дает

$$(h, \mathbf{m}(\varphi^{(N)})) \in \Delta \quad \text{и} \quad (h \times \varphi^{(i+1)}, \varphi^{(i)}) \in \Delta, \quad i = N-1, \dots, 1.$$

По определению отношения Δ это означает, что для некоторых функций $f_*^{(1)}, \dots, f_*^{(N)}$ справедливы уравнения (1.4). Из определения функций $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(N)}$ получаем

$$\varphi^{(1)} = \mathbf{m}(h \times (\mathbf{m}(h \times \dots \times \mathbf{m}(h) \dots)))$$

(оператор $\mathbf{m}$ используется N раз). Отсюда и из неравенства (3.3) следует существование функций h_* и ψ таких, что

$$h_*(\varphi^{(1)}) = \psi(h) = \varphi^{(1)} \oplus h \neq \mathbf{1},$$

или

$$y_* = h_*(\varphi^{(1)}(x)) = \psi(y).$$

■

Отметим, что теорема справедлива и для систем с непрерывным временем, это следует из результатов [7].

Пример 1. Рассмотрим дискретную систему

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= (x_2(t)(x_3(t) + x_5(t)) + x_4(t))x_4(t)u(t), \\ x_2(t+1) &= x_1(t)/x_4(t), \\ x_3(t+1) &= x_1(t)x_5(t)/x_4(t) - |x_3(t) + x_5(t)| - u(t), \\ x_4(t+1) &= x_2(t)(x_3(t) + x_5(t)) + x_4(t), \\ x_5(t+1) &= |x_3(t) + x_5(t)| + u(t), \\ y_1(t) &= x_5(t), \quad y_2(t) = x_4(t).\end{aligned}$$

Проверим выполнение условия (3.1) для $h(x) = (x_5, x_4)^T$: так как

$$(h \times u) \oplus f = x_4 = f_1/f_4,$$

то

$$\mathbf{m}(h) = x_1/x_4.$$

Аналогичные вычисления дают следующее:

$$\begin{aligned}\mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h)) &= (x_1/x_4, x_2, x_3 + x_5)^T, \\ \mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h))) &= (x_1/x_4, x_2, x_3 + x_5, x_4, x_5)^T.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при $N = 3$ условие (3.1) выполняется, при этом

$$\mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h \times \mathbf{m}(h))) \leq h.$$

Положим

$$\varphi^{(3)}(x) = \mathbf{m}(h) = x_1/x_4.$$

Так как

$$\mathbf{m}(h \times x_1/x_4) = (x_1/x_4, x_2, x_3 + x_5)^T,$$

примем

$$\varphi^{(2)}(x) = (x_2, x_3 + x_5)^T,$$

а поскольку

$$\mathbf{m}(h \times \varphi^{(2)}) = (x_1/x_4, x_2, x_3 + x_5, x_4, x_5)^T,$$

положим

$$\varphi^{(1)}(x) = (x_4, x_5)^T.$$

Отметим, что выбор в качестве $\varphi^{(i)}$ скалярных функций приводит к невозможности построения преобразованной модели, о чем было сказано в доказательстве достаточности.

Положим $x_{*5} = x_1/x_4$, $x_{*4} = x_2$, $x_{*3} = x_3 + x_5$, $x_{*2} = x_5$, $x_{*1} = x_4$. В результате преобразованная модель принимает вид

$$\begin{aligned}x_{*1}(t+1) &= x_{*3}(t)x_{*4}(t) + y_2(t), \\ x_{*2}(t+1) &= |x_{*3}(t)| + u(t), \\ x_{*3}(t+1) &= x_{*5}(t)y_1(t), \\ x_{*4}(t+1) &= x_{*5}(t), \\ x_{*5}(t+1) &= y_2(t)u(t), \\ y_1(t) &= x_{*2}(t), \quad y_2(t) = x_{*1}(t).\end{aligned}$$

Проведя серию временных сдвигов и подстановок на основе полученной модели, нетрудно получить ее вход-выходное описание:

$$\begin{aligned}y_1(t+3) &= |y_1(t+1)y_2(t)u(t)| + u(t+2), \\y_2(t+3) &= y_2(t+2) + y_1(t+1)(y_2(t)u(t))^2.\end{aligned}$$

Отметим, что получение аналогичного вход-выходного описания путем временных сдвигов и подстановок на основе исходной модели – нетривиальная задача из-за громоздкости получаемых выражений и необходимости их детального анализа. Так, например, заменяя $x_5(t)$ на $y_1(t)$ и $x_4(t)$ на $y_2(t)$, получаем

$$\begin{aligned}y_2(t+1) &= x_2(t)(x_3(t) + y_1(t)) + y_2(t), \\y_2(t+2) &= \frac{x_1(t)}{y_2(t)} \left(\frac{x_1(t)y_1(t)}{y_2(t)} - |x_3(t) + y_1(t)| - u(t) + y_1(t+1) \right) + y_2(t+1);\end{aligned}$$

ясно, что только сложный анализ последнего выражения даст нужный результат.

3.2. Преобразование к модели, свободной от параметра

Для решения задачи локализации дефектов введем для i -й компоненты вектора параметров γ векторную функцию $\alpha^{(i)}$ с максимальным числом компонент такую, что композиция $\alpha^{(i)}(f(x, u, \gamma))$ не содержит параметр γ_i . Если функция f дифференцируема по этому параметру, сформулированное условие может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_i} \alpha^{(i)}(f(x, u, \gamma)) = 0, \quad i = 1, \dots, s.$$

Известно [8], что модель, заданная в новых координатах с помощью преобразования $\varphi = \varphi^{(1)} \times \varphi^{(2)} \times \dots \times \varphi^{(N)}$, не будет зависеть от i -й компоненты вектора параметров, т.е. будет нечувствительной к i -му дефекту, если выполняется следующее условие:

$$(3.3) \quad \alpha^{(i)} \leq \varphi.$$

Условия построения модели, заданной в новых координатах и не зависящей от i -й компоненты вектора параметров, даются следующей теоремой.

Теорема 2. Система (1.1) преобразуема к модели (1.4) с тождественной функцией h_ , не зависящей от i -й компоненты вектора параметров, тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

$$(3.4) \quad \alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m}(h) \neq \mathbf{1},$$

$$(3.5) \quad \mathbf{m} \left(h \times \left(\alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m} \left(h \times \dots \times \left(\alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m}(h) \right) \dots \right) \right) \right) \oplus \left(\alpha^{(i)} \oplus h \right) \neq \mathbf{1}$$

(оператор $\mathbf{m}$ используется N раз).

Доказательство. Необходимость. Пусть система (1.1) преобразуема к модели (1.4), не зависящей от i -й компоненты вектора параметров. Это означает, что существуют функции $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(N)}, \psi$, реализующие преобразования (1.2), при этом $\alpha^{(i)} \leq \varphi = \varphi^{(1)} \times \varphi^{(2)} \times \dots \times \varphi^{(N)}$. Из последнего условия получаем $\alpha^{(i)} \leq \varphi^{(j)}$ для всех j . Из теоремы 1 следует $(h \times \varphi^{(j+1)}, \varphi^{(j)}) \in \Delta$, $j = 1, \dots, N-1$, $(h, \varphi^{(N)}) \in \Delta$, что с учетом свойств оператора $\mathbf{m}$ и неравенства $\alpha^{(i)} \leq \varphi^{(j)}$ дает $\varphi^{(j)} \geq \alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m}(h \times \varphi^{(j+1)})$ и $\varphi^{(N)} \geq \alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m}(h)$ соответственно. Из последнего неравенства следует условие (3.4). Рассмотрим для простоты случай $N = 3$, тогда

$$(3.6) \quad \varphi^{(2)} \geq \alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m}(h \times \varphi^{(3)}) \geq \alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m}(h \times (\alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m}(h))),$$

$$\varphi^{(1)} \geq \alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m}(h \times \varphi^{(2)}) \geq \alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m}(h \times (\alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m}(h \times (\alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m}(h)))))$$

Так как $y_* = h_*(x_{*1})$ и $y_* = \phi(y)$, то $(\phi(h))(x) = (h_*(\varphi^{(1)}))(x)$. Это означает, что $h \oplus \varphi^{(1)} \neq \mathbf{1}$, а тогда с учетом (3.6) получаем условие (3.5).

Достаточность. Из (3.5) следует существование функций γ_1, γ_2 и $\varphi^{(1)}$ таких, что

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= \gamma_1 \left(\mathbf{m} \left(h \times \left(\alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m} \left(h \times \dots \times \left(\alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m}(h) \right) \dots \right) \right) \right) \right) = \\ &= \gamma_2 \left(\alpha^{(i)} \oplus h \right) \neq \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Из равенства $\varphi^{(1)} = \gamma_2(\alpha^{(i)} \oplus h)$ следует $\varphi^{(1)} \geq h$ и $\varphi^{(1)} \geq \alpha^{(i)}$. Из определения функции $\varphi^{(1)}$, условия (3.5) и свойств операторов $\mathbf{m}$ и $\mathbf{M}$ получаем

$$h \times \left(\alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m} \left(h \times \dots \times \left(\alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m}(h) \right) \dots \right) \right) \leq \mathbf{M}(\varphi^{(1)}).$$

Выберем в качестве $\varphi^{(2)}$ максимальную функцию, удовлетворяющую условиям $h \times \varphi^{(2)} \leq \mathbf{M}(\varphi^{(1)})$ и

$$\alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m} \left(h \times \dots \times \left(\alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m}(h) \right) \dots \right) \leq \varphi^{(2)}$$

(оператор $\mathbf{m}$ используется $N-1$ раз), тогда справедливо включение $(h \times \varphi^{(2)}, \varphi^{(1)}) \in \Delta$. Из предыдущего следует, что это можно сделать всегда, положив

$$\varphi^{(2)} = \alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m} \left(h \times \dots \times \left(\alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m}(h) \right) \dots \right).$$

Тогда

$$\varphi^{(2)} \geq \mathbf{m} \left(h \times \dots \times \left(\alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m}(h) \right) \dots \right) \quad \text{и} \quad \varphi^{(2)} \geq \alpha^{(i)}.$$

По аналогии строятся функции $\varphi^{(3)}, \dots, \varphi^{(N-1)}$, для которых справедливы включения $(h \times \varphi^{(j+1)}, \varphi^{(j)}) \in \Delta$ и неравенство $\varphi^{(j)} \geq \alpha^{(i)}$, $j = 3, \dots, N-1$.

Используя оператор $\mathbf{M}$ $N - 1$ раз, получим из (3.5) нетривиальную (в силу условия (3.4)) функцию $\varphi^{(N)} = \alpha^{(i)} \oplus \mathbf{m}(h)$, откуда следует $\varphi^{(N)} \geq \mathbf{m}(h)$ и $\varphi^{(N)} \geq \alpha^{(i)}$, т.е. справедливо включение $(h, \varphi^{(N)}) \in \Delta$. Так как $\varphi = \varphi^{(1)} \times \varphi^{(2)} \times \dots \times \varphi^{(N)}$ и $\varphi^{(j)} \geq \alpha^{(i)}$ для всех j , то $\varphi \geq \alpha^{(i)}$, т.е. справедливо условие (3.3). Из всего сказанного и определения отношения Δ следует, что для некоторых функций $f_*^{(1)}, \dots, f_*^{(N)}$ справедливы уравнения (1.4). Из неравенства $\varphi^{(1)} \geq h$ следует существование функции ψ такой, что $\varphi^{(1)} = \psi(h)$, откуда $y_* = \psi(y) = \psi(h(x)) = \varphi^{(1)}(x)$, т.е. h_* – тождественная функция. ■

Пример 2. Рассмотрим дискретную систему

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \gamma_2 x_2(t) + x_3(t) - x_2(t), \\ x_2(t+1) &= u(t)|x_1(t)|, \\ x_3(t+1) &= u(t)|x_1(t)| + x_1(t)x_4(t), \\ x_4(t+1) &= \gamma_1 x_5(t)(x_3(t) - x_2(t)), \\ x_5(t+1) &= u(t)x_1(t), \\ y_1(t) &= x_1(t), \quad y_2(t) = x_3(t) - x_2(t). \end{aligned}$$

Проверим выполнение условий теоремы 2 для первого дефекта, которому соответствует функция $\alpha^{(1)} = (x_1, x_2, x_3, x_5)^T$. Так как $\mathbf{m}(h) = (x_2, x_5)^T$, то $\alpha^{(1)} \oplus \mathbf{m}(h) = (x_1, x_2, x_3, x_5)^T \oplus (x_2, x_5)^T = (x_2, x_5)^T \neq \mathbf{1}$, т.е. выполняется условие (3.4). Далее

$$h \times (\alpha^{(1)} \oplus \mathbf{m}(h)) = (x_1, x_2, x_3, x_5)^T$$

и

$$\mathbf{m}(h \times (\alpha^{(1)} \oplus \mathbf{m}(h))) = (x_1, x_2, x_4, x_5)^T,$$

а так как $\alpha^{(1)} \oplus h = (x_1, x_3 - x_2)^T$, то выполняется условие (3.5).

Положим $\varphi^{(1)}(x) = (x_1, x_2, x_4, x_5)^T \oplus (x_1, x_3 - x_2)^T = x_1$; так как $\varphi^{(2)}$ должно удовлетворять условию

$$\varphi^{(2)} \geq \alpha^{(1)} \oplus \mathbf{m}(h) = (x_1, x_2, x_3, x_5)^T \oplus (x_2, x_5)^T = (x_2, x_5)^T,$$

примем $\varphi^{(2)}(x) = x_2$.

Положим $x_{*1} = x_1$, $x_{*2} = x_2$; преобразованная модель, нечувствительная к первому дефекту, имеет вид

$$\begin{aligned} x_{*1}(t+1) &= \gamma_2 x_{*2}(t) + y_2(t), \\ x_{*2}(t+1) &= u(t)|y_1(t)|, \\ y_1(t) &= x_{*1}(t). \end{aligned}$$

Для второго дефекта, которому соответствует функция

$$\alpha^{(2)}(x) = (x_2, x_3, x_4, x_5)^T,$$

аналогичным образом можно показать, что $x_{*1} = x_2$, $x_{*2} = x_3$, $x_{*3} = x_4$, $x_{*4} = x_5$; модель, нечувствительная к этому дефекту, принимает вид

$$\begin{aligned}x_{*1}(t+1) &= u(t)|y_1(t)|, \\x_{*2}(t+1) &= u(t)|y_1(t)| + y_1(t)x_{*3}(t), \\x_{*3}(t+1) &= \gamma_1 x_{*4}(t)y_2(t), \\x_{*4}(t+1) &= u(t)y_1(t), \\y_2(t) &= x_{*2}(t) - x_{*1}(t).\end{aligned}$$

На основе этих моделей нетрудно получить вход-выходное описание системы.

4. Решение на основе логико-динамического подхода

Теоремы 1 и 2 дают исчерпывающий ответ на вопрос о возможности представления исходной системы в виде, необходимом для применения непараметрического метода. Они дают общее решение задачи, когда преобразование (1.2) исходной системы к форме (1.3) или (1.4) может быть нелинейным, и требуют применения сложного математического аппарата алгебры функций. В случае ограничения класса преобразований линейными функциями решение может быть получено методами линейной алгебры на основе логико-динамического подхода [8]. Для возможности его применения исходная система должна быть представлена в виде

$$(4.1) \quad \begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) + C \begin{pmatrix} \psi_1(A_1x(t), u(t)) \\ \dots \\ \psi_q(A_qx(t), u(t)) \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^s D_i d_i(t), \\y(t) &= Hx(t),\end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$ – векторы состояния, управления и выхода; F , G и C – матрицы при номинальных значениях параметров, F и G описывают линейную динамику; H , $D_1, \dots, D_s$ – известные постоянные матрицы, $d_1(t), \dots, d_s(t)$ – скалярные функции, описывающие дефекты: если i -й параметр имеет номинальное значение, то $d_i(t) = 0$, в противном случае $d_i(t)$ становится неизвестной функцией времени, $i = 1, \dots, s$; $\psi_1, \dots, \psi_q$ – произвольные нелинейности, $A_1, \dots, A_q$ – матрицы-строки. Модель (4.1) всегда может быть получена из нелинейной модели (1.1) путем ряда эквивалентных преобразований, детально описанных в [8].

Известно [8], что логико-динамический подход реализуется в три этапа, на первом из которых из модели (4.1) удаляется нелинейная составляющая, на втором рассматриваемая задача решается для линейной системы с дополнительным ограничением линейного же характера, на третьем к полученному линейному решению добавляется преобразованная нелинейная составляющая. Коротко опишем решение на втором этапе, в основе которого лежит процедура синтеза модели, представленной в канонической форме [8], на основе которой нетрудно получить вход-выходные соотношения, лежащие в основе непараметрического метода.

Приведем описание преобразованной модели:

$$\begin{aligned}
 x_{*i}(t+1) &= x_{*i+1}(t) + J_i y(t) + G_{*i} u(t), \quad i = 1, \dots, k-1, \\
 x_{*k}(t+1) &= J_k y(t) + G_{*k} u(t), \\
 y_*(t) &= x_{*1}(t),
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

где $x_* \in \mathbb{R}^k$ – вектор состояния модели, $x_* = \Phi x$, $y_* = Ry$. Известно, что матрицы, описывающие исходную систему и эту модель, в также матрицы Φ и R удовлетворяют следующим уравнениям [8]:

$$RH = \Phi_1, \quad \Phi_i F = \Phi_{i+1} + J_i H, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad \Phi_k F = J_k H,
 \tag{4.3}$$

где Φ_i и J_i – i -е строки матриц Φ и J , $i = 1, \dots, k$, k – размерность модели. Дополнительное ограничение на матрицу Φ имеет вид

$$A = A_* \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}
 \tag{4.4}$$

для некоторой матрицы A_* , где

$$A = \begin{pmatrix} A_1^T & \dots & A_q^T \end{pmatrix}^T.$$

Равенство (4.4) эквивалентно условию [8]

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \Phi^T & H^T \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi^T & H^T & A^T \end{pmatrix}.
 \tag{4.5}$$

Известно, что уравнения (4.3) можно свернуть в одно:

$$RHF^k = J_1 HF^{k-1} + J_2 HF^{k-2} + \dots + J_k H.
 \tag{4.6}$$

Решение этого уравнения дает минимальную размерность k и матрицы R и J .

Для построения модели, не содержащей i -й компоненты вектора параметров, напомним, что соответствующее условие имеет вид $\Phi D_i = 0$ [8]. Учет этого условия приводит к уравнению [1]

$$(R \quad -J_1 \quad -J_2 \quad \dots \quad -J_k) \begin{pmatrix} U^{(k)} \\ B^{(k)} \end{pmatrix} = 0,
 \tag{4.7}$$

где

$$\begin{aligned}
 U^{(k)} &= \begin{pmatrix} HF^k \\ HF^{k-1} \\ HF^{k-2} \\ \dots \\ H \end{pmatrix}, \\
 B^{(k)} &= \begin{pmatrix} HD_i & HFD_i & HF^2 D_i & \dots & HF^{k-1} D_i \\ 0 & HD_i & HFD_i & \dots & HF^{k-2} D_i \\ 0 & 0 & HD_i & \dots & HF^{k-3} D_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Минимальное значение размерности k , при котором это уравнение имеет нетривиальные решения, определяется условием

$$(4.9) \quad \text{rank}(U^{(k)} B^{(k)}) < l(k+1).$$

При его выполнении найдется вектор-строка $(R \ -J_1 \ -J_2 \ \dots \ -J_k)$, удовлетворяющая уравнению (4.7). Далее по формулам (4.3) определяются строки матрицы Φ и проверяется условие (4.5), при его выполнении рассчитывается матрица $G_* = \Phi G$ и строится модель в форме (4.2). Если условие (4.5) не выполняется, рекомендуется найти другое решение уравнения (4.7) или увеличить размерность k ; невыполнение этого условия при всех $k < n$ означает, что модели, не содержащей i -й компоненты вектора параметров, не существует. Далее будем полагать, что условие (4.5) выполняется, т.е. уравнение (4.4) имеет решение.

Для построения нелинейной составляющей заметим, что она описывается выражением

$$(4.10) \quad C_* \begin{pmatrix} \psi_1(A_{*1}z(t), u(t)) \\ \vdots \\ \psi_q(A_{*q}z(t), u(t)) \end{pmatrix},$$

где $z = \begin{pmatrix} x_* \\ y \end{pmatrix}$, строка A_{*1} определяется из уравнения $A_i = A_{*i} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}$, $i = 1, \dots, q$, соответствующего (4.4), $C_* = \Phi C$. Если выражение (4.10) имеет вид, соответствующий правым частям моделей (1.3) или (1.4), т.е. не содержит обратных связей, составляющая (4.10) добавляется к ранее построенной линейной части. В противном случае следует найти другое решение уравнения (4.7) при прежней или увеличенной размерности.

Отметим, что если все строки матрицы A линейно выражаются через строки матрицы H , то выражение (4.10) заведомо имеет требуемый вид. Если это условие не выполняется, добиться его выполнения можно путем расширения вектора выхода исходной системы. Детальное рассмотрение этого вопроса, однако, выходит за рамки настоящей работы.

Дальнейшие действия с полученной моделью не отличаются от тех, которые были описаны в разделе 2.

В некоторых случаях система не может быть преобразована к виду (1.3) или (1.4), однако с помощью эвристических приемов она может быть приведена к виду (2.1), рассмотрим это на примере.

Пример 3. Пусть преобразованная модель описывается системой уравнений

$$x_{*1}(t+1) = x_{*2}(t) + \eta_1(x_{*1}(t)) + J_1 y(t),$$

$$x_{*2}(t+1) = x_{*3}(t) + \eta_2(x_{*2}(t)) + J_2 y(t),$$

$$x_{*3}(t+1) = \eta_3(x_{*3}(t)) + J_3 y(t),$$

$$y_*(t) = x_{*1}(t),$$

где $\eta_1 \div \eta_3$ — произвольные нелинейные функции, вектор управления для простоты опущен, элементы матриц-строк J_1 , J_2 и J_3 зависят от параметров исходной системы. Особенность модели состоит в том, что правая часть уравнения для каждой переменной содержит нелинейную функцию той же переменной. Рассмотрим ряд временных сдвигов и подстановок для переменной y_* :

$$\begin{aligned} y_*(t+2) &= x_{*1}(t+2) = x_{*2}(t+1) + \eta_1(x_{*1}(t+1)) + J_1 y(t+1) = \\ &= \eta_1(y_*(t+1)) + J_1 y(t+1) + x_{*3}(t) + \eta_2(x_{*2}(t)) + J_2 y(t), \\ y_*(t+3) &= \eta_1(y_*(t+2)) + J_1 y(t+2) + x_{*3}(t+1) + \eta_2(x_{*2}(t+1)) + J_2 y(t+1) = \\ &= \eta_1(y_*(t+2)) + J_1 y(t+2) + J_2 y(t+1) + \\ &+ \eta_2(x_{*3}(t) + \eta_2(x_{*2}(t)) + J_2 y(t)) + \eta_3(x_{*3}(t)) + J_3 y(t). \end{aligned}$$

Из выражения для $y_*(t+2)$ найдем сумму $x_{*3}(t) + \eta_2(x_{*2}(t)) + J_2 y(t)$:

$$x_{*3}(t) + \eta_2(x_{*2}(t)) + J_2 y(t) = y_*(t+2) - \eta_1(y_*(t+1)) - J_1 y(t+1)$$

и подставим ее в уравнение для $y_*(t+3)$ вместо аргумента функции η_2 :

$$\begin{aligned} y_*(t+3) &= \eta_1(y_*(t+2)) + J_1 y(t+2) + J_2 y(t+1) + \\ &+ \eta_2(y_*(t+2) - \eta_1(y_*(t+1)) - J_1 y(t+1)) + \eta_3(x_{*3}(t)) + J_3 y(t). \end{aligned}$$

Если далее из последнего соотношения выразить сумму $\eta_3(x_{*3}(t)) + J_3 y(t)$, найти выражение для $y_*(t+4)$ и подставить эту сумму вместо аргумента функции η_3 , то итоговое выражение для $y_*(t+4)$ будет содержать только временные сдвиги векторов y_* и y , что и требуется для применения непараметрического подхода.

5. Практический пример

Рассмотрим модель электропривода при отсутствии внешнего нагрузочного момента и без учета вязкого трения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{i_p} x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{K_M}{J_H} x_3 - \frac{K_d}{J_H} \text{sign}(x_2), \\ \dot{x}_3 &= -\frac{K_\omega}{L} x_2 - \frac{R}{L} x_3 + \frac{K_U}{L} u, \end{aligned}$$

где x_1 — угол поворота выходного вала редуктора, x_2 — угловая скорость вращения вала электродвигателя, x_3 — ток электродвигателя, i_p — передаточное отношение редуктора, J_H — момент инерции ротора двигателя и вращающихся частей редуктора, приведенный к ротору, K_M — моментный коэффициент

электродвигателя, K_ω – коэффициент противо-э.д.с., K_d – момент сухого трения в двигателе, R – активное сопротивление обмотки якоря электродвигателя, L – индуктивность якорной обмотки электродвигателя, K_U – коэффициент усиления усилителя мощности.

Дискретизированную модель представим в виде

$$(5.1) \quad \begin{aligned} x_1^+ &= \gamma_1 x_2 + x_1, \\ x_2^+ &= \gamma_2 x_3 + \gamma_3 \text{sign}(x_2) + x_2, \\ x_3^+ &= \gamma_4 x_2 + \gamma_5 x_3 + \gamma_6 u, \end{aligned}$$

где для простоты используются обозначения $x^+ = x(t+1)$, $x = x(t)$, $u = u(t)$, коэффициенты $\gamma_1 \div \gamma_6$ представляют описанные выше параметры и интервал дискретизации.

Из уравнений (5.1) ясно, что коэффициенты γ_2, γ_3 , а также $\gamma_4 \div \gamma_6$ одинаковым образом влияют на переменные x_2 и x_3 соответственно, поэтому можно говорить о трех дефектах. Полагая, что измеряемыми являются переменные x_1 и x_3 , рассматриваемую модель опишем следующими матрицами:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 \\ 0 & \gamma_4 & \gamma_5 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_6 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(x, u) = \text{sign}(Ax), \quad A = (0 \ 1 \ 0), \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следуя логико-динамическому подходу, удалим нелинейный член из модели и рассмотрим ее линейную часть. Непосредственные вычисления для первого дефекта дают следующее:

$$HD_1 = HFD_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(U^{(2)}, B^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 & 2\gamma_1 & \gamma_1\gamma_2 & 1 & 1 \\ 0 & \gamma_4(1 + \gamma_5) & \gamma_2\gamma_4 + \gamma_4^2 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \gamma_4 & \gamma_5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\text{rank}(U^{(2)}, B^{(2)}) < 2(2+1) = 6$, поэтому уравнение (4.7) имеет решение, приведем его в виде

$$(R \ -J_1 \ -J_2) = (0 \ 1 \ 0 \ -(1 + \gamma_5) \ 0 \ -(\gamma_2\gamma_4 - \gamma_5)).$$

Тогда

$$\Phi_1 = (0 \ 0 \ 1), \quad \Phi_2 = (0 \ \gamma_4 \ -1), \quad G_* = \begin{pmatrix} \gamma_6 \\ -\gamma_6 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что условие (4.5) выполняется и матрицу A_* можно принять в виде $A_* = (0 \ 1/\gamma_4 \ 0 \ 1)$, кроме того,

$$C_* = \Phi C = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_3 \gamma_4 \end{pmatrix}.$$

В результате нелинейная преобразованная модель описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x_{*1}^+ &= x_{*2} + (1 + \gamma_5)y_2 + \gamma_6 u, \\ x_{*2}^+ &= (\gamma_2 \gamma_4 - \gamma_5)y_2 - \gamma_6 u + \gamma_3 \gamma_4 \text{sign}((y_2 + x_{*2})/\gamma_4), \\ y_{*1} &= x_{*1} = y_2, \end{aligned}$$

где

$$x_{*1} = x_3, \quad x_{*2} = \gamma_2 x_2 - x_3.$$

Временные сдвиги дают следующее:

$$\begin{aligned} y_2(t+1) &= x_{*2}(t) + (1 + \gamma_5)y_2(t) + \gamma_6 u(t), \\ y_2(t+2) &= (\gamma_2 \gamma_4 - \gamma_5)y_2(t) - \gamma_6 u(t) + \gamma_3 \gamma_4 \text{sign}((y_2(t) + x_{*2}(t))/\gamma_4) + \\ &\quad + (1 + \gamma_5)y_2(t+1) + \gamma_6 u(t+1). \end{aligned}$$

Из выражения для $y_2(t+2)$ следует, что сумма первых трех его слагаемых из правой части может быть представлена как

$$y_2(t+2) - (1 + \gamma_5)y_2(t+1) - \gamma_6 u(t+1).$$

Имея это в виду, приведем выражение для $y_2(t+3)$:

$$\begin{aligned} y_2(t+3) &= (\gamma_2 \gamma_4 - \gamma_5)y_2(t+1) - \gamma_6 u(t+1) + (1 + \gamma_5)y_2(t+2) + \gamma_6 u(t+2) + \\ &\quad + \gamma_3 \gamma_4 \text{sign}((y_2(t+1) + y_2(t+2) - (1 + \gamma_5)y_2(t+1) - \gamma_6 u(t+1))/\gamma_4). \end{aligned}$$

Поскольку функция sign содержит параметры γ_4, γ_5 и γ_6 , то для применения непараметрического метода их значения должны быть известны.

Выражения для остальных сдвигов могут быть получены по аналогии. Так как последнее выражение содержит 5 слагаемых, то $T = 6$. Обозначим функцию $\text{sign}(\cdot)$ в последнем выражении через $z(t)$ и запишем его в виде (3.2), приняв $y_* = Ry = y_2$:

$$\begin{aligned} Y_6(t) &= (y_2(t) \ y_2(t-1) \ y_2(t-2) \ y_2(t-3) \ y_2(t-4) \ y_2(t-5)) = \\ &= (\gamma_2 \gamma_4 - \gamma_5 \ -\gamma_6 \ 1 + \gamma_5 \ \gamma_6 \ \gamma_3 \gamma_4) P_6(t), \end{aligned}$$

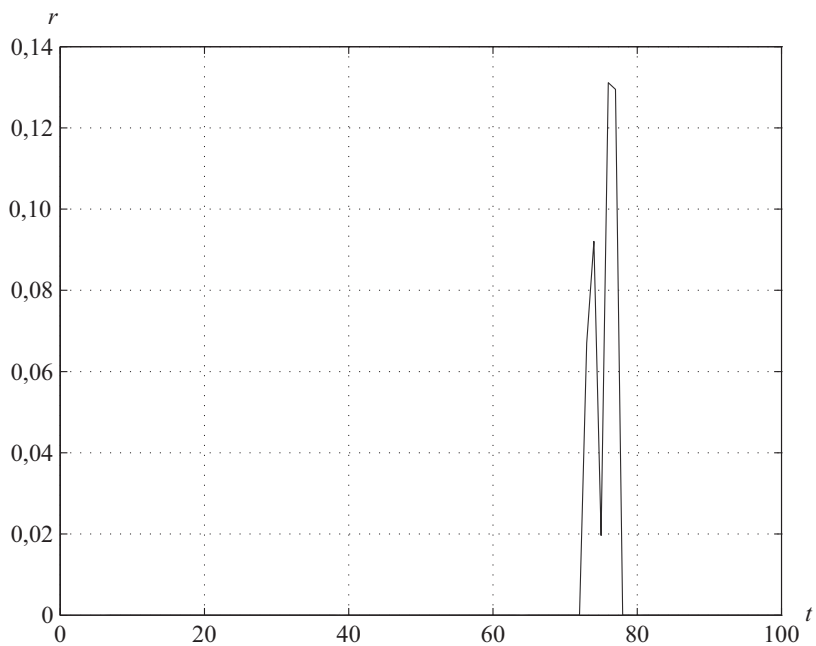


Рис. 1. Поведение невязки $r_6^{(1)}$ при изменении параметров k_1 и k_2 .

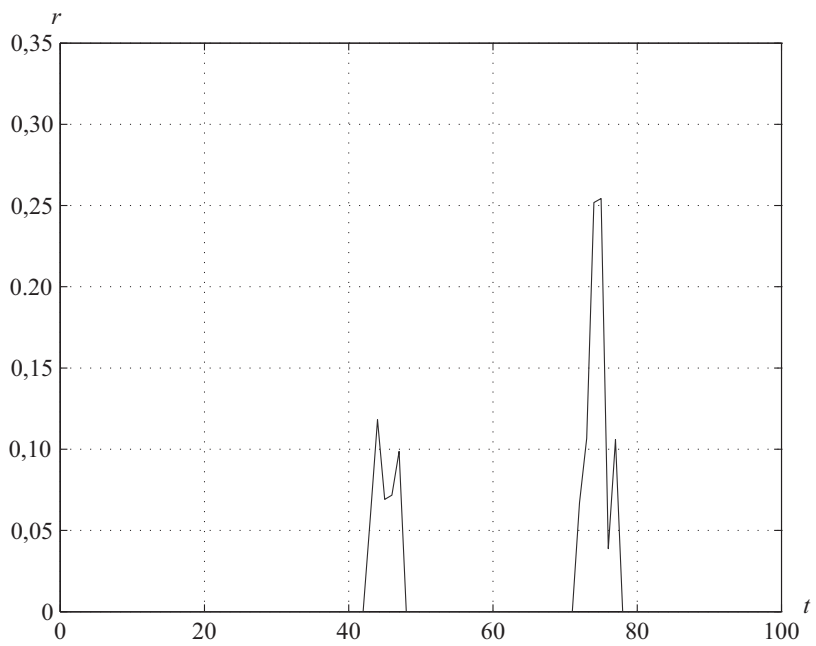


Рис. 2. Поведение невязки $r_6^{(1)}$ при изменении параметров k_3 и k_4 .

где

$$P_6(t) = \begin{pmatrix} y_2(t-2) & y_2(t-3) & y_2(t-4) & y_2(t-5) & y_2(t-6) & y_2(t-7) \\ u(t-2) & u(t-3) & u(t-4) & u(t-5) & u(t-6) & u(t-7) \\ y_2(t-1) & y_2(t-2) & y_2(t-3) & y_2(t-4) & y_2(t-5) & y_2(t-6) \\ u(t-1) & u(t-2) & u(t-3) & u(t-4) & u(t-5) & u(t-6) \\ z(t-3) & z(t-4) & z(t-5) & z(t-6) & z(t-7) & z(t-8) \end{pmatrix}.$$

Невязка формируется в виде $r_6^{(1)}(t) = Y_6^{(1)}(t)v(6)$, где $v(6) \in \ker(P_6^{(1)}(t))$.

Можно показать, что уравнение (4.7) для второго дефекта не имеет решений. Выполняя требуемые действия для третьего дефекта, получаем следующую преобразованную модель:

$$\begin{aligned} x_{*1}^+ &= x_{*2} + 2y_1, \\ x_{*2}^+ &= -y_1 + \gamma_1\gamma_2y_2 + \gamma_1\gamma_3\text{sign}((y_1 + x_{*2})/\gamma_1), \\ y_{*1} &= x_{*1} = y_1, \end{aligned}$$

где $x_{*1} = x_1$, $x_{*2} = \gamma_1x_2 - x_1$. Произведя временные сдвиги, можно заметить, что в результирующем выражении функция sign содержит параметр γ_1 , поэтому для применения непараметрического метода его значение должно быть известно. Невязка $r^{(2)}$ формируется по аналогии с $r_6^{(1)}$.

Нетрудно видеть, что матрица синдромов в рассматриваемом примере имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где строки соответствуют невязкам $r_6^{(1)}$ и $r^{(2)}$, столбцы – множествам $K_1 = \{\gamma_1\}$, $K_2 = \{\gamma_2, \gamma_2\}$, $K_3 = \{\gamma_4, \gamma_5, \gamma_6\}$.

Для моделирования примем $k_1 = k_2 = k_6 = 1$, $k_3 = k_4 = k_5 = -1$, $u(t) = 2\sin(t/10)$. На рис. 1 представлены результаты моделирования в случае $k_1 = 1, 2$ в момент $t = 40$ и $k_2 = 1, 2$ в момент $t = 70$; видно, что невязка $r_6^{(1)}$ нечувствительна к изменению первого параметра и чувствительна ко второму. На рис. 2 представлены результаты моделирования в случае $k_3 = -1, 2$ в момент $t = 40$ и $k_4 = -1, 2$ в момент $t = 70$; видно, что невязка чувствительна к изменению обоих параметров.

6. Заключение

В работе рассмотрен подход к решению задачи диагностирования технических систем, описываемых нелинейными моделями, путем проверки соотношений, существующих между входами и выходами системы, измеряемыми на конечном интервале времени. Получены критерии возможности построения таких соотношений для заданной нелинейной системы. Для проверки используется правило, реализуемое на основе непараметрического метода. Теоретические результаты иллюстрированы примером диагностирования реальной технической системы.

Используемый в работе математический аппарат (алгебра функций) содержит четыре основные конструкции: 1) отношение частичного предпорядка, обозначаемое как $\leq$, 2) две бинарные операции $\times$ и $\oplus$, 3) бинарное отношение Δ , 4) операторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{M}$. Первые два элемента определены на множестве V_W произвольных векторных функций с некоторой областью определения W , в то время как два последних – на множестве V_X векторных функций с областью определения в пространстве состояний X . Рассмотрим эти элементы более подробно.

1. *Отношение частичного предпорядка.* Для произвольных функций $\alpha, \beta \in V_W$ записывается $\alpha \leq \beta$, если существует функция γ такая, что $\beta(w) = \gamma(\alpha(w)) \quad \forall w \in W$. Определение означает, что каждая компонента функции β может быть выражена через компоненты функции α . Если $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$, то функции α и β называются эквивалентными, что обозначается как $\alpha \cong \beta$.

Отметим, что $\cong$ является отношением эквивалентности. Оно разбивает множество V_W на классы эквивалентности, содержащие эквивалентные функции. Обозначим через V_E множество классов эквивалентности, тогда отношение $\leq$ является частичным порядком на этом множестве и пара $(V_E, \leq)$ представляет собой решетку [9]. Существуют две специальные функции $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ такие, что для произвольной функции α выполняется условие $\mathbf{0} \leq \alpha \leq \mathbf{1}$. Функция $\mathbf{0}$ эквивалентна тождественной функции, $\mathbf{1}$ – постоянной функции.

2. *Бинарные операции.* Поскольку пара $(V_E, \leq)$ представляет собой решетку, то для произвольных функций $\alpha, \beta \in V_W$ существуют две бинарные операции $\times$ and $\oplus$, определяемые следующим образом [9]:

$$\alpha \times \beta = \inf(\alpha, \beta), \quad \alpha \oplus \beta = \sup(\alpha, \beta).$$

Указанные операции определяют функции с точностью до эквивалентности.

Правило вычисления операции $\times$ выглядит просто:

$$(\alpha \times \beta)(w) = \begin{pmatrix} \alpha(w) \\ \beta(w) \end{pmatrix}.$$

Операция $\oplus$ может быть вычислена с использованием средств дифференциальной геометрии [7]. В простейших случаях может быть использовано определение операции $\alpha \oplus \beta$ как наименьшей верхней грани функций α и β .

Рассмотрим пример вычисления функций $\alpha \times \beta$ и $\alpha \oplus \beta$. Пусть $W = \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(w) = \begin{pmatrix} w_1 + w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad \beta(w) = \begin{pmatrix} w_1 w_3 \\ w_2 w_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда $(\alpha \times \beta)(w) \cong (w_1 + w_2, w_3, w_1 w_3)^T$, $(\alpha \oplus \beta)(w) = w_3(w_1 + w_2)$.

3. *Бинарное отношение Δ .* Для заданных функций $\alpha, \beta \in V_X$

$$(\alpha, \beta) \in \Delta \iff \alpha(f(x, u, \gamma)) = f_*(\beta(x), u, \gamma)$$

для всех $(x, u) \in X \times U$ и некоторой функции f_* . Бинарное отношение Δ самостоятельного значения не имеет и используется для определения операторов.

4. Операторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{M}$. Для произвольных функций $\alpha, \beta \in V_X$ определяются операторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{M}$ следующим образом.

Оператор $\mathbf{m}$ задает функцию $\mathbf{m}(\alpha) \in S_X$, которая удовлетворяет условиям: (i) $(\alpha, \mathbf{m}(\alpha)) \in \Delta$, (ii) если $(\alpha, \beta) \in \Delta$, то $\mathbf{m}(\alpha) \leq \beta$.

Оператор $\mathbf{M}$ задает функцию $\mathbf{M}(\beta) \in S_X$, которая удовлетворяет условиям: (i) $(\mathbf{M}(\beta), \beta) \in \Delta$, (ii) если $(\alpha, \beta) \in \Delta$, то $\alpha \leq \mathbf{M}(\beta)$.

Из последних определений следует, что для произвольной α выражение $\mathbf{m}(\alpha)$ представляет собой минимальную функцию, формирующую пару с α , и для произвольной β выражение $\mathbf{M}(\beta)$ представляет собой максимальную функцию, формирующую пару с β .

Оператор $\mathbf{m}$ может быть вычислен следующим образом. Пусть функция γ удовлетворяет условию $(\alpha \times u) \oplus f \cong \gamma(f)$. Тогда $\mathbf{m}(\alpha) \cong \gamma$. Можно показать, что функция γ всегда существует. Правило вычисления оператора $\mathbf{M}$ не приводится, поскольку в работе оно не используется.

Операторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{M}$ обладают рядом свойств, которые детально описаны в [7].

Отметим, что стандартные математические пакеты программ нельзя использовать для вычисления операций и операторов алгебры функций. Поэтому на основе пакета Mathematica была разработана вычислительная среда, доступная на сайте [10] и позволяющая организовать облачные вычисления для нахождения упомянутых операций и операторов, а также проверки условий теорем 1 и 2. Характерной особенностью таких вычислений является возможность их выполнения без наличия пакета Mathematica у пользователя сайта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жиравок А.Н., Шумский А.Е., Павлов С.В.* Диагностирование линейных динамических систем непараметрическим методом // *АиТ.* 2017. № 7. С. 3–21.
Zhirabok A.N., Shumsky A.E., Pavlov S.V. Diagnosis of Linear Dynamic Systems by the Nonparametric Method // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 7. P. 1173–1188.
2. *Ding S.* Data-driven Design of Fault Diagnosis and Fault-tolerant Control Systems. London: Springer-Verlag, 2014.
3. *Lindner B., Auret L.* Data-driven fault detection with process topology for fault identification // *Proc. 19th World IFAC Congr.* 2014. P. 8903–8908.
4. *Haghani A., Krueger M., Jeansch T., Ding S., Engel P.* Data-driven multimode fault detection for wind energy conversion systems // *Proc. 9th IFAC Sympos. Safeprocesses'2015.* P. 633–6385.
5. *Шумский А.* Функциональное диагностирование нелинейных динамических систем с запаздыванием // *АиТ.* 2009. № 3. С. 172–184.
Shumskii A.E. Functional Diagnosis of Nonlinear Dynamic Delay Systems // *Autom. Remote Control.* 2009. V. 70. No. 3. P. 502–512.
6. *Shumsky A., Zhirabok A.* Redundancy relations for fault diagnosis in hybrid systems // *Proc. 8th IFAC Sympos. Safeprocesses'2012.* P. 1226–1231.

7. *Жиравок А.Н., Шумский А.Е.* Алгебраические методы анализа нелинейных динамических систем. Владивосток: Дальнаука, 2008.
8. *Шумский А.Е., Жиравок А.Н.* Методы и алгоритмы диагностирования и отказоустойчивого управления динамическими системами. Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2009.
9. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
10. <http://webmathematica.cc.ioc.ee/webmathematica/NLControl/main/index.html>.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 12.02.2017

После доработки 15.04.2018

Принята к публикации 15.04.2018