Автоматика и телемеханика, № 2, 2019

Управление в технических системах

© 2019 г. **В.Н. БУКОВ, д-р техн. наук (v_bukov@mail.ru)**
(ОАО "Бортовые аэронавигационные системы", Москва),
А.М. БРОННИКОВ, д-р техн. наук (bronnikov_a_m@mail.ru)
(Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана)

ТЕСТИРОВАНИЕ КОНФИГУРАЦИЙ ИЗБЫТОЧНЫХ ИНТЕГРИРОВАННЫХ КОМПЛЕКСОВ ОБОРУДОВАНИЯ

Рассматривается одна из задач управления избыточностью неоднородного интегрированного комплекса технического оборудования, описываемого системой линейных дискретных уравнений, заключающаяся в тестировании предварительно выбранной его конфигурации на реализуемость. Сформулированы как достаточные, так и необходимые и достаточные условия тестирования конфигураций, формализованных интерфейсными матрицами. Методический пример на основе избыточной системы управления движением самолета иллюстрирует применение и эффективность предлагаемых тестовых условий.

Ключевые слова: избыточная система, управление избыточностью, конфигурация системы, допустимая конфигурация, передаточная матрица, целевая функция, канонизация матриц.

DOI: 10.1134/S0005231019020053

1. Введение

Создание перспективных комплексов оборудования (КО), включая комплексы бортового оборудования для подвижных объектов, с принципиально новым уровнем устойчивости к отказам и повреждениям, а также минимизирующих или даже исключающих необходимость технического обслуживания в межрегламентные периоды [1–3] требует развития новых подходов к их интеграции с использованием, как правило, неоднородных и неуниверсальных компонентов.

Известная технология FDIR[1] (Fault-Detection, Fault-Isolation and Recovery Techniques) заключается в создании помимо основного еще и резервных вариантов системы, как это сделано, например, в [4]. Будучи прототипом развиваемого в настоящей статье подхода, такая технология не содержит каких-либо формальных методов решения проблемы оперирования избыточностью с учетом многообразия постановок и решений.

В то же время подход, развиваемый в [5–12] и названный управлением избыточностью, по охвату поднимаемых и решаемых вопросов выходит за

[1] URL: http://deacademic.com/dic.nsf/dewiki/422452

пределы уже устоявшихся понятий резервирования [13–15] и реконфигурирования [16, 17] систем.

Настоящая статья посвящена одному из аспектов управления избыточностью — тестированию предварительно сформированной конфигурации комплекса (схемы или способа соединения его компонентов) на предмет потенциальной возможности осуществления вычислительного процесса в рамках этой конфигурации, который обеспечил бы выполнение комплексом предписанной ему целевой функции.

2. Модель избыточного комплекса

Объектом исследований является избыточная совокупность K разнородных и неуниверсальных в общем случае динамических компонентов, предназначенных для объединения в том или ином сочетании в единый комплекс с предписанной для выполнения целевой функцией. Таких функций может быть несколько, и выполняться эти функции могут одновременно или поочередно по режимам или этапам функционирования комплекса. В число компонентов здесь формально включен и технический объект (технологический процесс, летательный, плавательный или сухопутный аппарат), для взаимодействия (наблюдения, управления) с которым создается комплекс, хотя содержательно это не так, поскольку комплекс оборудования представляет собой нечто целое, предназначенное для обеспечения использования объекта по назначению (сбор и обработка данных, мониторинг состояния, управление и др.).

В терминах процессов с дискретным временем $\tau = 0, 1, 2\ldots$ одновременное функционирование разрозненных компонентов и объекта в линейном приближении может описываться совокупностью равенств и уравнения [6, 8, 9]:

$$y_\tau = Dx_\tau, \quad x_{\tau+1} = Ax_\tau + Bu_\tau + Gv_\tau, \quad x_{\tau=0} = x_0, \tag{1}$$

где y_τ — метавектор[2] (составной вектор) выходов всех компонентов на такте τ размерности m, x_τ — метавектор состояния компонентов размерности n, u_τ — метавектор входов компонентов для межкомпонентных связей размерности l, v_τ — метавектор входов компонентов для внешних воздействий (внешних входов) размерности k, D — блочная числовая матрица формирования выходов всех компонентов размеров $m \times n$, A — блочная числовая матрица собственной динамики компонентов и объекта размеров $n \times n$, B — блочная числовая матрица эффективности межкомпонентных связей размеров $n \times l$, G — блочная числовая матрица эффективности внешних воздействий размеров $n \times k$.

Совокупную запись (1) будем называть моделью компонентов КО. Полагается, что почти все компоненты информационно обособлены, т.е. могут взаимодействовать только через указанные выходы y_τ и входы u_τ. Формально это отражается преобладанием ненулевых блоков на главной диагонали в матрице A. Исключением является только объект, который взаимодействует

[2] Возникновение термина связано с тем, что вектор относится к метасистеме, т.е. системе, надстроенной над другими системами, URL:https://ru.wiktionary.org/wiki/метасистема.

с некоторыми из компонентов непосредственно (с датчиками и актюаторами), в соответствии с чем матрица A содержит ненулевые блоки и не на главной диагонали.

Будем также полагать, что помимо компонентов, описываемых моделью (1), КО содержит интегрированную вычислительную среду (ИВС) или бортовую ИВС в случае подвижных объектов. Не являясь компонентом в указанном выше смысле, среда осуществляет сбор информации с выходов компонентов y_τ, обработку ее в соответствии с установленными правилами и распределение результатов обработки u_τ по входам компонентов.

В линейном приближении указанные действия с достаточной степенью адекватности формализуются равенством

$$u_\tau = Q(z)y_\tau, \tag{2}$$

где z — оператор сдвига во времени на один такт вперед, $Q(z)$ — в общем случае дробно-рациональная полиномиальная (по оператору z) матрица размеров $l \times m$, называемая передаточной матрицей (матрицей передаточных функций) от метавектора выходов компонентов y_τ к метавектору их входов u_τ. Напомним, что передаточная матрица динамической системы относится к физически нереализуемым, если хоть один ее элемент (передаточная функция) в числителе содержит полином большей степени, чем в знаменателе. Это обусловлено тем, что реализация такой функции требует знания значений входных сигналов y_τ на будущих тактах процесса. Отнесение передаточных матриц к нереализуемым не означает невозможность их практического использования с той или иной степенью приближения, но это требует формирования прогнозных оценок соответствующих сигналов.

Матрицу $Q(z)$ в [9] предложено называть конфигурационной, поскольку она содержит исчерпывающее формальное описание всех межкомпонентных связей, которое принято отождествлять с конфигурацией КО.

Детализируем описание функционирования ИВС, представив конфигурационную матрицу композицией (произведением) трех матриц

$$Q(z) = C_{\text{вх}}E(z)C_{\text{вых}}, \tag{3}$$

где $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$ — распределительные матрицы размеров $l \times p$ и $q \times m$, т.е. матрицы, содержащие бинарные элементы и не более одного единичного элемента в строке, моделирующие без учета задержек функционирование соответственно входных и выходных интерфейсов всех компонентов (за исключением объекта), и поэтому названные интерфейсными матрицами [6], $E(z)$ — в общем случае дробно-рациональная полиномиальная матрица размеров $p \times q$, моделирующая обработку вычислительными средствами ИВС и задержки всех поступающих данных и названная интеграционной матрицей [6], поскольку именно на нее ложится нагрузка функционального объединения (интеграции) разрозненных компонентов в единый интегрированный комплекс.

Избыточность комплекса обусловлена тем, что состав и возможности компонентов заведомо превышают минимально необходимые для выполнения функций по предназначению, в результате чего конфигурационная матрица $Q(z)$ допускает варьирование как в размере, так и в значениях параметров за счет использования различных интерфейсных матриц $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$, а также за счет изменения значений элементов интеграционной матрицы $E(z)$. Так, интерфейсные матрицы $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$ могут меняться по замыслу разработчика. Указанные ранее размерности p и q зависят от структуры процесса обработки информации в ИВС, в частности, p — число переменных, передаваемых через входные интерфейсы, и q — число переменных, передаваемых через выходные интерфейсы. Здесь и далее интерфейсы называются входными и выходными по отношению к компонентам КО.

Неоднородность компонентов комплекса отражается ограничениями, накладываемыми на приемлемые структуры интерфейсных матриц $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$.

Неуниверсальность компонентов комплекса проявляется в ограничениях на значения элементов интеграционной матрицы $E(z)$, что следует из формул (2) и (3). При универсальных компонентах для обработки данных в межкомпонентных связях могли бы использоваться одни и те же вычисления (программы), чего в реальных системах не бывает. Каждый вычислительный канал ИВС реализует определенную, присущую ему совокупность вычислительных процедур. Это выливается в закрепление за элементами интеграционной матрицы $E(z)$ определенных типов математических выражений, в том числе при необходимости нулевых значений.

3. Постановка задачи и используемый аппарат

Объединяя модели (1)–(3), можно записать передаточную матрицу системы "объект + КО" от внешнего входного воздействия v_τ к выходу y_τ:

$$W_y^v(z) = \left[w_{y_j}^{v_i}(z)\right]_{m\times k} = D\left(zI_n - A - BC_{\text{вх}}E(z)C_{\text{вых}}D\right)^{-1}G, \tag{4}$$

где $w_{y_j}^{v_i}(z)$ — передаточная функция от i-го входа $v_{i.\tau}$ к j-му выходу $y_{j.\tau}$, I_n — единичная матрица размеров $n\times n$. В [6] предложено в качестве целевой функции КО, т.е. функции, отражающей основное содержание функционирования системы "объект + КО", использовать выборочную часть передаточной матрицы (4), формализуемую посредством дополнительных весовых матриц α размеров $k\times g$ и β размеров $f\times m$ на ее входе и выходе:

$$\Phi(z) = \beta W_y^v(z)\alpha = \beta D\left(zI_n - A - BC_{\text{вх}}E(z)C_{\text{вых}}D\right)^{-1}G\alpha. \tag{5}$$

Удобным способом задания конкретного значения целевой функции (или совокупности целевых функций по режимам и этапам) является определение так называемой номинальной конфигурации КО [9], при которой конфигурационная матрица принимает вид

$$Q_{\text{ном}}(z) = C_{\text{вх}}^{\text{ном}}E_{\text{ном}}(z)C_{\text{вых}}^{\text{ном}}, \tag{6}$$

а целевая функция

$$\Phi_{\text{треб}}(z) = \beta D\Omega^{-1}(z)G\alpha \tag{7}$$

с зафиксированными весовыми матрицами α и β, где

$$\Omega(z) = zI_n - A - BC_{\text{вх}}^{\text{ном}}E_{\text{ном}}(z)C_{\text{вых}}^{\text{ном}}D,$$

заведомо удовлетворяет разработчика.

Для обеспечения компактности получаемых в дальнейшем формул введем определения двух передаточных матриц для системы “объект + КО” в номинальной конфигурации:

номинальная передаточная матрица по внешнему воздействию

$$W^{v}_{y.\text{ном}}(z) = D\Omega^{-1}(z)G \tag{8}$$

и номинальная передаточная матрица по межкомпонентным связям

$$W^{u}_{y.\text{ном}}(z) = D\Omega^{-1}(z)B. \tag{9}$$

Пусть на основе каких-либо соображений (пересмотр позиции разработчика, изменение исходного состава компонентов, отработка решений по парированию отказов или неправильного функционирования различных компонентов и др.) необходимо изменить конфигурацию КО, т.е. выбрать значения матриц $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$, отличные от номинальных. При этом все значения матриц $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$, при которых существуют (могут быть найдены, возможно, не единственные) интеграционные матрицы $E(z)$, обеспечивающие неизменность значения целевой функции (7), когда выполняется равенство

$$\beta D \left(zI_n - A - BC_{\text{вх}}E(z)C_{\text{вых}}D\right)^{-1} G\alpha = \beta W^{v}_{y.\text{ном}}(z)\alpha, \tag{10}$$

будем называть допустимыми. Допустимой будем называть и соответствующую конфигурацию КО. Уравнение (10) с неизвестной матрицей $E(z)$ будем называть основным уравнением интеграции системы.

Ставится задача определения формальных условий (тестов), позволяющих установить принадлежность или не принадлежность произвольной пары, с удовлетворением ограничений по их приемлемости в смысле неоднородности компонентов, интерфейсных матриц $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$ к допустимым, т.е. потенциальную возможность синтеза интеграционной матрицы $E(z)$ путем решения основного уравнения интеграции (10). Определение же соответствующей им интеграционной матрицы выходит за рамки данной статьи.

При решении поставленной задачи используется аппарат канонизации матриц [18, 19], основанный на специальным образом модифицированном алгоритме Гаусса для преобразования любой матрицы S размеров $n \times m$ и ранга r в совокупность соответствующих ей левого $\overline{S}^L$ и правого $\overline{S}^R$ делителей нуля максимального ранга, а также левого $\widetilde{S}^L$, правого $\widetilde{S}^R$ и сводного $\widetilde{S}$ канонизаторов, удовлетворяющих равенствам

$$\overline{S}^L S = 0, \quad S\overline{S}^R = 0, \quad \widetilde{S}^L S \widetilde{S}^R = I_r \quad \text{и} \quad \widetilde{S} = (S)^{\sim} = \widetilde{S}^R \widetilde{S}^L.$$

При этом получаемые матричные структуры всегда согласованы между собой в том смысле, что блочные матрицы — невырожденные

$$\begin{bmatrix} \widetilde{S}^L \\ \overline{S}^L \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} \widetilde{S}^R & \overline{S}^R \end{bmatrix},$$

т.е. строки левых и столбцы правых канонизаторов и делителей нуля максимального ранга линейно независимы.

Известны различные частичные (раздельно для канонизаторов и делителей нуля) аналоги в виде псевдообращения по Муру [20], Пенроузу [21] и Дразину [22, 23], перестановок строк и столбцов [24], обобщенного обращения [24, 25], сингулярного разложения [26] и нуль-пространств [27] матриц, однако каждый из них обременен каким-либо дополнительным условием. Например, обращение по Муру и Пенроузу обеспечивает минимальность квадратичной нормы, а нуль-пространства представлены ортонормированными базисами.

Здесь всего этого не требуется, а неединственность, присущая результату, не создает трудностей для практического использования. Кроме того, канонизаторы и делители нуля формируются единой процедурой линейного комбинирования строк и столбцов, предоставляющей благоприятные условия для ее компьютеризации с прицелом на существенно многомерные модели технических систем.

4. Необходимые и достаточные условия

Начнем с получения исчерпывающего решения поставленной задачи, т.е. с получения необходимых и достаточных условий допустимости произвольным образом выбранных интерфейсных матриц $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$ в КО. Сформулируем лемму, доказательство которой приведено в Приложении.

Лемма. *Интерфейсные матрицы $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$ относятся к допустимым тогда и только тогда, когда существуют такие матрицы ψ и ξ, для которых обеспечивается справедливость условий:*

$$\beta W^u_{у.\text{ном}}(z)\left(C_{\text{вх}}\psi - Q_{\text{ном}}(z)\right)W^v_{у.\text{ном}}(z)\alpha = 0, \tag{11}$$

$$\beta W^u_{у.\text{ном}}(z)\left(\xi C_{\text{вых}} - Q_{\text{ном}}(z)\right)W^v_{у.\text{ном}}(z)\alpha = 0. \tag{12}$$

Сама по себе эта лемма не может быть использована для тестирования допустимости интерфейсных матриц $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$, поскольку сформулированные условия содержат неопределенные матрицы ψ и ξ. Вместе с тем на основе леммы сформулируем теорему 1, доказательство которой приведено в Приложении.

Теорема 1. *Интерфейсные матрицы $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$ относятся к допустимым тогда и только тогда, когда выполняется каждое из условий:*

для матрицы $C_{\text{вх}}$ входных интерфейсов справедливо равенство

$$\overline{\beta W^u_{у.\text{ном}}(z)C_{\text{вх}}}^{L}\beta W^u_{у.\text{ном}}(z)Q_{\text{ном}}(z)W^v_{у.\text{ном}}(z)\alpha = 0, \tag{13}$$

для матрицы $C_{\text{вых}}$ выходных интерфейсов справедливо равенство

$$\beta W^u_{у.\text{ном}}(z)Q_{\text{ном}}(z)W^v_{у.\text{ном}}(z)\alpha\overline{C_{\text{вых}}W^v_{у.\text{ном}}(z)\alpha}^{R} = 0. \tag{14}$$

Основными недостатками полученных условий в смысле практического применения являются:

сложность в силу наличия большого числа произведений матриц, обращения полиномиальной полноразмерной $(n \times n)$-матрицы $\Omega(z)$ и определения делителей нуля максимального ранга для полиномиальных матриц;

отсутствие гарантии получения физически реализуемых интеграционных матриц $E(z)$ при последующих вычислениях.

5. Достаточные (упрощенные) условия

Для практического применения могут оказаться более приемлемыми достаточные условия, отличающиеся относительной простотой.

Сформулируем следствия теоремы 1.

Следствие 1. Для того чтобы интерфейсные матрицы $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$ относились к допустимым, достаточно, чтобы у матрицы $\beta W^{u}_{\text{у.ном}} C_{\text{вх}}$ были линейно-независимыми все строки, а у матрицы $C_{\text{вых}} W^{v}_{\text{у.ном}} \alpha$ были линейно-независимыми все столбцы.

Поскольку такая формулировка эквивалентна выполнению равенств

$$\overline{\beta W^{u}_{\text{у.ном}}(z) C_{\text{вх}}}^{L} = 0 \tag{15}$$

и

$$\overline{C_{\text{вых}} W^{v}_{\text{у.ном}}(z) \alpha}^{R} = 0, \tag{16}$$

то она вытекает непосредственно из (13) и (14) теоремы 1 и не требует специального доказательства.

Это следствие 1 существенно уменьшило первый из указанных выше недостатков, но ничего не изменило в части реализуемости интеграционной матрицы.

Избавиться от обращения полиномиальной матрицы $\Omega(z)$ позволяют условия, полученные преобразованием условий следствия 1. Доказательство эквивалентности следствий 1 и 2 приведено в Приложении.

Следствие 2. Для того чтобы интерфейсные матрицы $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$ относились к допустимым, достаточно выполнения условий:

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{BC_{\text{вх}}}^{L} \Omega(z) \overline{\beta D}^{R}}^{L} \overline{BC_{\text{вх}}}^{L} \Omega(z) (\beta D)^{\sim} \\ \overline{\beta D}^{L} \end{bmatrix} = 0, \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} (G\alpha)^{\sim} \Omega(z) \overline{C_{\text{вых}} D}^{R} \overline{\overline{G\alpha}^{L} \Omega(z) \overline{C_{\text{вых}} D}^{R}}^{R} & \overline{G\alpha}^{R} \end{bmatrix} = 0. \tag{18}$$

Здесь вместо обращения полиномиальной матрицы $\Omega(z)$ фигурируют процедуры канонизации числовых матриц и сохранилась необходимость вычисления делителей нуля полиномиальных матриц. Вопрос относительной вычислительной простоты условий следствий 1 и 2 связан с конкретными данными решаемых задач.

Еще одна теорема представляет вариант достаточных условий, относящийся к редуцированному (упрощенному) решению задачи, не полностью учитывающему структуру целевой функции (7).

Теорема 2. Для того чтобы интерфейсные матрицы $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$ относились к допустимым, достаточно выполнения условий

$$\overline{BC_{\text{вх}}}^{L} BQ_{\text{ном}}(z)D = 0 \tag{19}$$

и

$$BQ_{\text{ном}}(z)D\overline{C_{\text{вых}}D}^{R} = 0. \tag{20}$$

Доказательство теоремы 2 и пояснение редукции приведены в Приложении.

Здесь отсутствуют передаточные матрицы (9) и (8), поэтому результаты использования условий (19) и (20) не учитывают ни собственную динамику компонентов КО, ни особенности их непосредственной связи с объектом, ни действие обратных связей в номинальной конфигурации. Это очевидным образом сужает круг потенциальных решений интеграции КО, что иллюстрирует приведенный в статье пример.

Вместе с тем к достоинствам условий (19) и (20) следует отнести:

наибольшую простоту вычислений (вычисляются делители нуля только числовых матриц);

наличие решений с заведомо реализуемой интеграционной матрицей $E(z)$.

Второе достоинство гарантируется при реализуемости номинальной конфигурационной матрицы $Q_{\text{ном}}(z)$ и выборе при формировании решения $E(z)$ по [9] произвольных матричных сомножителей в виде либо числовых, либо дробно-рациональных полиномиальных матриц с реализуемыми элементами.

6. Пример

Рассмотрим методический пример на основе упрощенной модели продольного движения самолета, состояние которой описывается дискретным матричным уравнением

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\begin{bmatrix} x_{1.\tau+1} \\ x_{2.\tau+1} \\ x_{3.\tau+1} \end{bmatrix}}_{x_{\tau+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1.\tau} \\ x_{2.\tau} \\ x_{3.\tau} \end{bmatrix}}_{x_\tau} + \\
&+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{1.\tau} \\ u_{2.\tau} \end{bmatrix}}_{u_\tau} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1 & 0 & g_2 \\ 0 & g_3 & g_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{bmatrix} v_{1.\tau} \\ v_{2.\tau} \\ v_{3.\tau} \end{bmatrix}}_{v_\tau},
\end{aligned} \tag{21}$$

где x_1 — приращение угла атаки, x_2 — угловая скорость тангажа, x_3 — приращение угла тангажа, u_1 — приращение угла отклонения стабилизатора, u_2 —

приращение угла отклонения переднего горизонтального оперения, v_1, v_2, v_3 — внешние воздействия (различные комбинации возмущений нормальной силы, продольного момента и сдвига ветра), a_i, b_i и g_i — известные параметры модели, отличные от нуля. Рассматриваются приращения относительно опорного движения, за которое принимается прямолинейный горизонтальный полет с постоянной скоростью.

В качестве датчиков используются: датчик угла атаки (ДУА), датчик угловой скорости (ДУС) тангажа и комплексная навигационная система (КНС), измеряющая угловую скорость тангажа, углы тангажа и наклона траектории. Таким образом, выходом объекта является вектор y_τ, определяемый формулой

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{1.\tau} \\ y_{2.\tau} \\ y_{3.\tau} \\ y_{4.\tau} \\ y_{5.\tau} \end{bmatrix}}_{y_\tau} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1.\tau} \\ x_{2.\tau} \\ x_{3.\tau} \end{bmatrix}}_{x_\tau} = \begin{bmatrix} x_{1.\tau} \\ x_{2.\tau} \\ x_{2.\tau} \\ x_{3.\tau} \\ x_{3.\tau} - x_{1.\tau} \end{bmatrix}, \tag{22}$$

где y_1 — сигнал ДУА, y_2 — сигнал ДУС, y_3 — сигнал угловой скорости тангажа КНС, y_4 — сигнал угла тангажа КНС и y_5 — сигнал угла наклона траектории КНС.

Задачей управления является обеспечение желаемой передаточной матрицы от воздействий v_1 и v_2 к угловой скорости тангажа $x_2 = y_2$. Матрицы α и β имеют вид:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть номинальная конфигурационная матрица, обеспечивающая выполнение задачи управления с желаемым качеством, имеет статический вид, т.е. при отсутствии оператора z (это принято с целью упрощения последующих выкладок, а ограничений на представление номинальной конфигурации нет):

$$\begin{aligned} Q_{\text{ном}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{C_{\text{вх}}^{\text{ном}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{-a_3}{b_1} & \dfrac{a^{\text{ж}} - a_4}{b_1} \end{bmatrix}}_{E_{\text{ном}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{\text{вых}}^{\text{ном}}} = \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{-a_3}{b_1} & \dfrac{a^{\text{ж}} - a_4}{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{23}$$

где $a^{\text{ж}}$ — параметр, характеризующий желаемые динамические свойства (переходные процессы) самолета.

В рассматриваемом примере имеют место следующие матричные конструкции:

$$\Omega(z) = zI_3 - A - BQ_{\text{ном}}D = \begin{bmatrix} z-a_1 & -a_2 & 0 \\ 0 & z-a^{\text{ж}} & 0 \\ 0 & -a_2 & z-1 \end{bmatrix},$$

$$\Omega^{-1}(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-a_1} & \dfrac{a_2}{(z-a_1)(z-a^{\text{ж}})} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{z-a^{\text{ж}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{a_2}{(z-a^{\text{ж}})(z-1)} & \dfrac{1}{z-1} \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{\text{треб}}(z) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{g_3}{z-a^{\text{ж}}} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Таким образом, целевая функция $\Phi_{\text{треб}}(z)$ заключается в том, чтобы воздействие v_1 или другое воздействие, приводимое к нему, не вызывало изменения угловой скорости тангажа x_2, а воздействие v_2 или другое воздействие, приводимое к нему, вызывало реакцию с передаточной функцией $w_{y_2}^{v_2}(z) = w_{x_2}^{v_2}(z) = \frac{g_3}{z-a^{\text{ж}}}$. Другие передаточные функции не регламентируются.

Для матрицы $C_{\text{вх}}$ кроме номинального в соответствии с (23) возможны еще два очевидных варианта:

$$C_{\text{вх1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{\text{вх2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Условия (15) и соответственно (13) для матриц $C_{\text{вх1}}$ и $C_{\text{вх2}}$ выполняются, так как равны нулю входящие в условия делители нуля:

$$C_{\text{вх1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{\beta W_{y.\text{ном}}^{u}(z) C_{\text{вх1}}}^{L} = \overline{\frac{b_2}{z-a^{\text{ж}}}}^{L} = 0;$$

$$C_{\text{вх2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{\beta W_{y.\text{ном}}^{u}(z) C_{\text{вх2}}}^{L} = \overline{\begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{z-a^{\text{ж}}} & \dfrac{b_2}{z-a^{\text{ж}}} \end{bmatrix}}^{L} = 0.$$

Здесь левые делители нуля тождественно равны нулю по определению, поскольку в первом случае делимым является скаляр, а во втором – матрица-строка.

Различные варианты матрицы $C_{\text{вых}}$ кроме номинального в соответствии с (23) приведены в таблице. Здесь же представлены результаты тестирования для каждой из этих матриц $C_{\text{вых}}$ по формулам трех из приведенных утверждений: теоремы 1 (столбец Т1), следствия 1 (столбец С1) и теоремы 2 (столбец Т2). Знак “+” в соответствующей ячейке — выполнение условия, Результаты тестирования интерфейсных матриц выходов компонентов

№ п/п	Интерфейсная матрица $C_{\text{вых}}$	Вариант интеграционной матрицы $E(z)$: запись	тип*	Результат: Т1	С1	Т2
1	$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-a_3}{b_1} & \frac{a^{ж}-a_4}{b_1} \end{bmatrix}$	С	+	+	+
2	$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-a_3}{b_1} & \frac{a^{ж}-a_4}{2b_1} & \frac{a^{ж}-a_4}{2b_1} \end{bmatrix}$	С	+	+	+
3	$\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a^{ж}-a_4}{b_1} & \frac{-a_3}{b_1} & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	С	+	+	+
4	$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a^{ж}-a_4}{b_1} & \frac{-a_3}{b_1} & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	С	+	+	+
5	$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a^{ж}-a_4}{2b_1} & \frac{a^{ж}-a_4}{2b_1} & \frac{-a_3}{b_1} & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	С	+	+	+
6	$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-a_3}{b_1} & \frac{(a^{ж}-a_4)(z-1)}{a_2b_1} \end{bmatrix}$	ДН	+	+	−
7	$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{z(a^{ж}-a_4)-a_\Sigma}{a_2b_1} & \frac{(a^{ж}-a_4)(z-1)}{a_2b_1} \end{bmatrix}$	ДН	+	+	−
8	$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{z(a^{ж}-a_4)-a_\Sigma}{b_1(z-1)} & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	ДР	+	+	−
9	$\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{z(a^{ж}-a_4)-a_\Sigma}{b_1(z-1)} & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	ДР	+	+	−
10	$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{z(a^{ж} - a_4) - a_\Sigma}{b_1(z - 1)} & \frac{a_3}{b_1} \end{bmatrix}$	ДР	+	+	−
11	$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$	Решения отсутствуют		−	−	−
12	$\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$			−	−	−
13	$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$			−	−	−
14	$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$			−	−	−
15	$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$			−	−	−
16	$\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0 \end{bmatrix}$			−	−	−
17	$\begin{bmatrix} 0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$			−	−	−
18	$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$			−	−	−

*С — статическая, ДН — динамическая нереализуемая, ДР — динамическая реализуемая.

знак “–” — невыполнение условия. В таблице использовано дополнительное обозначение $a_\Sigma = a^{ж} + a_2a_3 - a_4$. Далее следуют краткий анализ таблицы и описание проверок условий.

Среди проанализированных вариантов присутствуют как допустимые интерфейсные матрицы, которым соответствуют интеграционные матрицы $E(z)$, обеспечивающие неизменность заданной целевой функции (24), так и недопустимые, при которых подбором интеграционной матрицы $E(z)$ невозможно получить заданное значение целевой функции. Это – характерный эффект попытки объединения неоднородных и неуниверсальных компонентов.

Проверка условий теоремы 1 и следствия 1 по равенству (16). Предварительные вычисления некоторых матричных конструкций:

$$W^v_{y.\text{ном}}(z)\alpha = \begin{bmatrix} \dfrac{g_1}{z-a_1} & \dfrac{a_2 g_3}{(z-a^{\text{ж}})(z-a_1)} \\ 0 & \dfrac{g_3}{z-a^{\text{ж}}} \\ 0 & \dfrac{g_3}{z-a^{\text{ж}}} \\ 0 & \dfrac{a_2 g_3}{(z-a^{\text{ж}})(z-1)} \\ -\dfrac{g_1}{z-a_1} & \dfrac{a_2 g_3(1-a_1)}{(z-a^{\text{ж}})(z-a_1)(z-1)} \end{bmatrix} = \Gamma(z), \tag{25}$$

$$\begin{gathered} \beta W^u_{y.\text{ном}}(z) Q_{\text{ном}}(z) W^v_{y.\text{ном}}(z)\alpha = \\ = \begin{bmatrix} \dfrac{-a_3 g_1}{(z-a^{\text{ж}})(z-a_1)} & \dfrac{a_2 g_3(1-a_1)}{(z-a^{\text{ж}})(z-a_1)(z-1)} \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{26}$$

Условия (16) и соответственно (14) для матриц $C_{\text{вых}1}, \ldots, C_{\text{вых}10}$ из таблицы с учетом (25) выполняются, так как равны нулю входящие в условия делители нуля:

$$C_{\text{вых}1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{C_{\text{вых}1}\Gamma(z)}^{R} = \overline{\begin{bmatrix} \dfrac{g_1}{z-a_1} & \dfrac{a_2 g_3}{(z-a^{\text{ж}})(z-a_1)} \\ 0 & \dfrac{g_3}{z-a^{\text{ж}}} \end{bmatrix}}^{R} = 0;$$

$$\ldots$$

$$C_{\text{вых}10} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\overline{C_{\text{вых}10}\Gamma(z)}^{R} = \overline{\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{g_3}{z-a^{\text{ж}}} \\ 0 & \dfrac{g_3}{z-a^{\text{ж}}} \\ \dfrac{-g_1}{z-a_1} & \dfrac{a_2 g_3(1-a_1)}{(z-a^{\text{ж}})(z-a_1)(z-1)} \end{bmatrix}}^{R} = 0.$$

Здесь правые делители нуля равны нулю, поскольку в первом случае делимое — невырожденная матрица, а во втором — матрица с линейно независимыми столбцами.

Условие (16) для матриц $C_{\text{вых}11}, \ldots, C_{\text{вых}18}$ из таблицы с учетом (25) не выполняется, а с учетом (26) не выполняется и условие (14):

$$C_{\text{вых}11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{C_{\text{вых}11}\Gamma(z)}^R = \overline{\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{g_3}{z-a^{\text{ж}}} \\ 0 & \dfrac{a_2 g_3}{(z-a^{\text{ж}})(z-1)} \end{bmatrix}}^R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{-a_3 g_1}{(z-a^{\text{ж}})(z-a_1)} & \dfrac{g_3(a^{\text{ж}}-a_4)(z-a_1)+a_2a_3}{(z-a^{\text{ж}})^2(z-a_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-a_3 g_1}{(z-a^{\text{ж}})(z-a_1)} \neq 0;$$

$$\ldots$$

$$C_{\text{вых}18} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\overline{C_{\text{вых}18}\Gamma(z)}^R = \overline{\begin{bmatrix} \dfrac{-g_1}{z-a_1} & \dfrac{a_2 g_3(1-a_1)}{(z-a_1)(z-a^{\text{ж}})(z-1)} \end{bmatrix}}^R = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{g_1(z-a^{\text{ж}})(z-1)}{a_2 g_3(1-a_1)} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{-a_3 g_1}{(z-a^{\text{ж}})(z-a_1)} & \dfrac{g_3(a^{\text{ж}}-a_4)(z-a_1)+a_2a_3}{(z-a^{\text{ж}})^2(z-a_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{g_1(z-a^{\text{ж}})(z-1)}{a_2 g_3(1-a_1)} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Под рассмотрение не попали случаи $C_{\text{вых}}$, когда делитель нуля $\overline{C_{\text{вых}} W^v_{y.\text{ном}}(z)\alpha}^R$ принимает значения правого делителя нуля (26). Тогда со всей очевидностью условие (14) выполнится при невыполнении условия (16) и результаты тестирования по условиям Т1 и С1 (а также С2) будут различаться. Однако в рассматриваемом примере соответствующие "содержательные" матрицы $C_{\text{вых}}$ не были найдены.

Проверка условий теоремы 2. Предварительное вычисление произведения матриц:

$$BQ_{\text{ном}}D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{-a_3}{b_1} & \dfrac{a^{\text{ж}}-a_4}{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_3 & a^{\text{ж}}-a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Условие (19) выполняется для матриц $C_{\text{вх}1}$ и $C_{\text{вх}2}$:

$$C_{\text{вх}1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{BC_{\text{вх}1}}^L = \overline{\begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}}^L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\overline{BC_{\text{вх}1}}^L BQ_{\text{ном}}(z)D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_3 & a^{\text{ж}} - a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0;$$

$$\ldots$$

Интерфейсные матрицы $C_{\text{вх}}$ в данном примере весьма скудны по числу и разнообразию возможных вариантов. В этом плане куда более интересны и представительны варианты матрицы $C_{\text{вых}}$. Сказанное справедливо в условиях как теоремы 1 (вместе со следствиями), так и теоремы 2.

Условие (20) для матриц $C_{\text{вых}1}, \ldots, C_{\text{вых}5}$ из таблицы выполняется:

$$C_{\text{вых}1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{C_{\text{вых}1}D}^R = \overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$BQ_{\text{ном}}(z)D\overline{C_{\text{вых}1}D}^R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_3 & a^{\text{ж}} - a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0;$$

$$\ldots$$

Условие (20) для матриц $C_{\text{вых}6}, \ldots, C_{\text{вых}10}$ из таблицы не выполняется, хотя решения для таких матриц существуют:

$$C_{\text{вых}6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{C_{\text{вых}6}D}^R = \overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^R = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$BQ_{\text{ном}}(z)D\overline{C_{\text{вых}6}D}^R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_3 & a^{\text{ж}} - a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a^{\text{ж}} - a_4 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0;$$

$$\ldots$$

Объяснение такого результата содержится в комментарии к теореме 2.

Условие (20) не выполняется и для матриц $C_{\text{вых}11}, \ldots, C_{\text{вых}18}$, при которых действительно решение не существует.

7. Заключение

Для практически важной ситуации, когда конфигурация КО, формализуемая интерфейсными матрицами $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$, изменяется по каким-либо соображениям, получены формальные условия для тестирования вновь назначаемой конфигурации неоднородных и неуниверсальных компонентов на допустимость в смысле наличия у такой конфигурации потенциальной возможности синтеза интеграционной матрицы $E(z)$ (правил обработки сигналов межкомпонентных связей), обеспечивающей равенство целевой функции заданному значению $\Phi_{\text{треб}}(z)$.

Условия носят либо необходимый и достаточный (теорема 1), либо только достаточный характер с различным охватом области решений (следствия 1 и 2, теорема 2). По формулировкам теорем и их следствий тестирование матриц $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$ осуществляется раздельно.

Методический пример иллюстрирует процедуры использования условий и относительную эффективность их различных вариантов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. В соответствии с [9] все множество конфигурационных матриц (3) между выходами и входами компонентов КО с измененными интерфейсными матрицами $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$, обладающих структурой

$$\{Q(z)\}_{\kappa} = Q_{\text{ном}}(z) + \{\Delta Q(z)\}_{\kappa},$$

где $\{\Delta Q(z)\}_{\kappa}$ — множество аддитивных добавок к номинальному значению с указанием свободно варьируемых матриц κ, обеспечивающих неизменность целевой функции (7), определяется формулой

$$\text{(П.1)}\qquad \{Q(z)\}_{\rho,\,\lambda,\,\pi,\,\varepsilon} = Q_{\text{ном}}(z) + \rho\overline{D}^{L} + \overline{B}^{R}\lambda +$$
$$+\pi\overline{\overline{G\alpha}^{L}\Omega(z)\overline{D}^{R}}^{L}\overline{G\alpha}^{L}\Omega(z)\widetilde{D} + \widetilde{B}\Omega(z)\overline{\beta D}^{R}\overline{\overline{B}^{L}\Omega(z)\overline{\beta D}^{R}}^{R}\varepsilon,$$

где ρ, λ, π и ε — матрицы подходящих размеров с произвольными элементами.

Решение (П.1) сворачивается к виду

$$\text{(П.2)}\qquad \{Q(z)\}_{\mu,\,\eta} = Q_{\text{ном}}(z) + \mu\overline{D\Omega^{-1}(z)G\alpha}^{L} + \overline{\beta D\Omega^{-1}(z)B}^{R}\eta,$$

где μ и η — матрицы подходящих размеров с произвольными элементами. Для сворачивания используется, в частности, утверждение теоремы 1.9 из [18] о левом делителе нуля произведения матриц

$$\text{(П.3)}\qquad \left\{\overline{SH}^{L}\right\}_{\theta,\,\vartheta} = \left[\,\theta \quad \vartheta\,\right]\left[\begin{array}{c} \overline{\overline{H}^{L}\overline{S}^{R}}^{L}\overline{H}^{L}\widetilde{S} \\ \overline{S}^{L} \end{array}\right]$$

с произвольными матрицами подходящих размеров θ и ϑ. Так, выделяя в (П.1), например, слагаемые с произвольными матрицами, стоящими слева:

$$\rho\overline{D}^{L} + \pi\overline{\overline{G\alpha}^{L}\Omega(z)\overline{D}^{R}}^{L}\overline{G\alpha}^{L}\Omega(z)\widetilde{D},$$

и, записывая эту сумму в блочно-матричном виде

$$\rho\overline{D}^L + \pi\overline{\overline{G\alpha}^L\Omega(z)\overline{D}^R}^L\overline{G\alpha}^L\Omega(z)\widetilde{D} = \left[\begin{array}{cc}\pi & \rho\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\overline{\overline{G\alpha}^L\Omega(z)\overline{D}^R}^L\overline{G\alpha}^L\Omega(z)\widetilde{D}\\ \overline{D}^L\end{array}\right],$$

а также используя равенство $\overline{\Omega^{-1}G\alpha}^L = \overline{G\alpha}^L\Omega$, можно убедиться, что полученное выражение с точностью до обозначений совпадает с правой частью равенства (П.3). Выполнив таким образом переход к свернутой записи левого делителя нуля произведения матриц, приходим к записи (П.2) в части слагаемого с произвольной матрицей слева. Аналогично с использованием теоремы 1.9 из [18] сворачиваются слагаемые с произвольными матрицами справа.

Далее, теорема 2 из [9] утверждает, что множество интеграционных матриц $\{E(z)\}_\kappa$ при заданных интерфейсных матрицах $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$ не пусто, если найдутся такие значения произвольных матриц ρ^*, λ^*, π^* и ε^*, при которых выполняются одновременно условия для входных и выходных интерфейсов:

$$\overline{C_{\text{вх}}}^L\{Q(z)\}_{\rho^*,\lambda^*,\pi^*,\varepsilon^*} = 0, \tag{П.4}$$

$$\{Q(z)\}_{\rho^*,\lambda^*,\pi^*,\varepsilon^*}\overline{C_{\text{вых}}}^R = 0, \tag{П.5}$$

где $\{Q(z)\}_{\rho^*,\lambda^*,\pi^*,\varepsilon^*}$ — значение (П.1) при фиксированных ρ^*, λ^*, π^* и ε^*. Из анализа (П.4) следует, что имеет место равенство

$$\{Q(z)\}_{\rho^*,\lambda^*,\pi^*,\varepsilon^*} = C_{\text{вх}}\psi,$$

где ψ — некоторая матрица, не снижающая ранг произведения (чтобы не потерять полноту условий).

С учетом (8), (9) и (П.2) получаем

$$\mu\overline{W^v_{y.\text{ном}}(z)\alpha}^L + \overline{\beta W^u_{y.\text{ном}}(z)}^R\eta = C_{\text{вх}}\psi - Q_{\text{ном}}(z).$$

Эта матричная запись представляет собой обертывающее уравнение, названное так по аналогии с обертывающими алгебрами [18, 27], для неизвестных матриц μ и η. В соответствии с теоремой 1.17 из [18] такое уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\overline{\overline{\beta W^u_{y.\text{ном}}(z)}^R}^L\left(C_{\text{вх}}\psi - Q_{\text{ном}}(z)\right)\overline{\overline{W^v_{y.\text{ном}}(z)\alpha}^L}^R = 0. \tag{П.6}$$

Может показаться, что более строго в (П.6) следовало бы учесть неединственность делителей нуля [18] путем введения соответствующих произвольных матричных сомножителей и вместо условия (П.6) записать

$$\overline{\phi\overline{\beta W^u_{y.\text{ном}}(z)}^R\sigma}^L\left(C_{\text{вх}}\psi - Q_{\text{ном}}(z)\right)\overline{\gamma\overline{W^v_{y.\text{ном}}(z)\alpha}^L\zeta}^R = 0,$$

где поскольку используются только делители нуля максимального ранга, то все произвольные матрицы ϕ, σ, γ и ζ обратимы. В силу обратимости σ, γ и с учетом свойств делителей нуля [18] это равенство равносильно равенству

$$\phi\overline{\overline{\beta W^u_{y.\text{ном}}(z)}^R}^L\left(C_{\text{вх}}\psi - Q_{\text{ном}}(z)\right)\overline{\overline{W^v_{y.\text{ном}}(z)\alpha}^L}^R\zeta = 0.$$

Вместе с тем обратимость матриц ϕ и ζ позволяет без потери строгости вернуться к равенству (П.6).

Кроме того, в равенстве (П.6), используемом как условие разрешимости матричного уравнения, с полным основанием можно ограничиться рассмотрением только одного из возможных вариантов формирования делителей нуля максимального ранга, а именно: можно положить, что левый делитель нуля правого делителя нуля и правый делитель нуля левого делителя нуля (все максимального ранга) любой матрицы равен исходной матрице и перейти, таким образом, к равенству (11).

Аналогично, но с рассмотрением (П.5) доказывается справедливость условия (12). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Существование матрицы ψ, удовлетворяющей (11), и разрешимость равенства (11) относительно матрицы ψ суть эквивалентные формулировки. Преобразуем равенство (11) к виду

$$\beta W^u_{y.\text{ном}}(z)C_{\text{вх}}\psi\, W^v_{y.\text{ном}}(z)\alpha = \beta W^u_{y.\text{ном}}(z)Q_{\text{ном}}(z)W^v_{y.\text{ном}}(z)\alpha$$

и рассмотрим его как двустороннее матричное уравнение относительно матрицы ψ, условия разрешимости которого определяются [18] равенствами (13) и

$$\beta W^u_{y.\text{ном}}(z)Q_{\text{ном}}(z)W^v_{y.\text{ном}}(z)\alpha\overline{W^v_{y.\text{ном}}(z)\alpha}^R = 0. \qquad \text{(П.7)}$$

Условие (П.7) выполняется всегда, поэтому для справедливости (11) необходимо и достаточно выполнения условия (13).

Аналогично доказывается условие (14). Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 2. Преобразуем делитель нуля в (15) по формуле левого делителя нуля произведения матриц βD и $\Omega^{-1}(z)BC_{\text{вх}}$ по теореме 1.9 из [18] без учета произвольных сомножителей:

$$\overline{\beta W^u_{y.\text{ном}}(z)C_{\text{вх}}}^L = \begin{bmatrix} \overline{\overline{\Omega^{-1}(z)BC_{\text{вх}}}^L\overline{\beta D}^R}^L\overline{\Omega^{-1}(z)BC_{\text{вх}}}^L(\beta D)^{\sim} \\ \overline{\beta D}^L \end{bmatrix}.$$

В силу обратимости матрицы $\Omega^{-1}(z)$ справедливо равенство

$$\overline{\Omega^{-1}(z)BC_{\text{вх}}}^L = \overline{BC_{\text{вх}}}^L\Omega(z).$$

Подстановки этих двух равенств в (15) приводят к справедливости условия (17).

Аналогично доказывается справедливость условия (18). Следствие 2 доказано.

Доказательство теоремы 2. Доказательство следует из равенства

$$BC_{\text{вх}}E(z)C_{\text{вых}}D = BQ_{\text{ном}}(z)D,$$

при справедливости которого варьирование интеграционной матрицы $E(z)$ не изменяет знаменатель $\Omega(z)$ целевой функции (7), и, как следствие, значение целевой функции тоже остается неизменным при любых фиксированных значениях левого βD и правого $G\alpha$ числителей. Но этого только достаточно.

На самом деле значение матричной дроби (7) при фиксированных числителях остается неизменным как при неизменности ее знаменателя, так и в случаях, когда аддитивные в "обращенном представлении" изменения знаменателя

$$\Omega^{-1} + \Delta\left(\Omega^{-1}\right)$$

кратны соответствующему делителю нуля хотя бы одного из числителей. Второе обстоятельство данная теорема не учитывает. В этом суть редукции решения задачи.

Записанное линейное двустороннее уравнение разрешимо [18] относительно $E(z)$, если и только если выполняются равенства (19) и (20). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буков В.Н., Евгенов А.В., Шурман В.А.* Интегрированные комплексы бортового оборудования с управляемой функциональной избыточностью // Актуальные проблемы и перспективные направления развития комплексов авиационного оборудования. Сб. науч. статей по матер. V Междунар. науч.-практ. конф. Академические Жуковские чтения, 22–23 ноября 2017. Воронеж: КВАЛИС, 2018. С. 23–28.
2. *Буков В.Н., Агеев А.М., Гамаюнов И.Ф., Шурман В.А.* Архитектурный облик комплексов бортового оборудования воздушных судов с позиции реализации функций необслуживаемости // Мехатроника, автоматика и робототехника. Матер. междунар. науч.-практ. конф. Новокузнецк: Изд. НИЦ МС, 2018. № 2. С. 206–210.
3. *Гамаюнов И.Ф., Агеев А.М., Шурман В.А.* Особенности режимов функционирования избыточного комплекса бортового оборудования // Мехатроника, автоматика и робототехника. Матер. междунар. науч.-практ. конф. Новокузнецк: Изд. НИЦ МС, 2018. № 2. С. 211–215.
4. *Белоусов И.А.* Формирование облика резервного контура интегрированной системы навигации и определения ориентации малого искусственного спутника Земли: Дисс. канд. техн. наук. М.: МАИ (ГТУ), 2003.
5. *Агеев А.М., Бронников А.М., Буков В.Н., Гамаюнов И.Ф.* Супервизорный метод управления технических систем с избыточностью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 3. С. 72–82.

   Ageev A.M., Bronnikov A.M., Bukov V.N., Gamayunov I.F. Supervisory Control Method for Redundant Technical Systems // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2017. V. 56. No. 3. P. 410–419.

6. *Буков В.Н., Бронников А.М., Агеев А.М., Гамаюнов И.Ф.* Аналитический подход к формированию конфигураций технических систем // АиТ. 2017. № 9. С. 67–83.

   Bukov V.N., Bronnikov A.M., Ageev A.M., Gamayunov I.F. An Analytic Approach to Constructing Configurations of Technical Systems // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1600–1613.

7. *Захаров Н.А., Клепиков В.И., Похватилин Д.С.* Управление избыточностью сетевых распределенных систем необслуживаемой авионики // Авиакосмич. приборостроение. 2018. № 3. С. 3–12.

8. *Гамаюнов И.Ф.* Генерирование альтернативных решений в задаче управления избыточностью технических комплексов // АиТ. 2018. № 4. С. 92–104.

   Gamayunov I.F. Generation of Alternative Solutions in the Redundancy Management Problem for Hardware Complexes // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 4. P. 655–664.

9. *Агеев А.М.* Конфигурирование избыточных комплексов бортового оборудования на основе аппарата передаточных матриц // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2018. № 4. С. 175–192.

   Ageev A.M. Configuring of Excessive Onboard Equipment Sets // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2018. V. 57. No. 4. P. 640–654.

10. *Воробьев А.В., Буков В.Н., Шурман В.А, Дъяченко А.М., Яковлев Ю.В., Гнусин М.Ю.* Способ автоматического управления избыточностью неоднородной вычислительной системы и устройство для его реализации. Патент RU 2612569 С2. Бюл. № 7 от 09.03.2017.

11. *Боблак И.В., Буков В.Н., Шурман В.А., Воробьев А.В., Евгенов А.В.* Способ автоматического управления неоднородной избыточностью комплекса оборудования и устройство для его реализации. Патент RU 2646769 С2. Бюл. № 7 от 07.03.2018.

12. *Боблак И.В., Буков В.Н., Шейнин Ю.Е., Бронников А.М., Шурман В.А., Воробьев А.В., Евгенов А.В.* Способ управления избыточностью бортовой интегрированной вычислительной среды и устройство для его реализации. Патент RU 2647339 С2. Бюл. № 8 от 15.03.2018.

13. *Шевцов Г.А., Шеремет Е.М.* Логическое резервирование. Львов: Изд-во Львовского ун-та, 1973.

14. *Белоусов Ю.А.* Отказоустойчивые бортовые вычислительные системы. Вопросы построения аппаратной части // Авиакосмич. приборостроение. 2003. № 3. С. 18–23.

15. *Клепиков В.И.* Отказоустойчивость распределенных систем управления. М.: Золотое сечение, 2014.

16. *Дегтярев А.Р., Киселев С.К.* Надежность реконфигурирующихся комплексов интегрированной модульной авионики // Автоматизация процессов управления. 2016. Т. 43. № 1. С. 25–30.

17. *Тарасов А.А.* Функциональная реконфигурация отказоустойчивых систем. М: Логос, 2012.

18. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во науч. литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006.

19. *Горюнов С.В., Буков В.Н.* Обращение и канонизация блочных матриц // Математические заметки. 2006. Т. 79. № 5. С. 662–673.

20. *Moore E.H.* General analysis // Memoirs APS. Philadelphia, 1935. V. 1.

21. *Penrose R.A.* A Generalized Inverse for Matrices // Proc. Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51. P. 406–413.

22. *Rothblum U.G.* A Representation of the Drazin Inverse and Characterizations of the Index // SIAM J. Appl. Math. 1976. V. 31. P. 646–648.

23. *Rothblum U.G.* Computation of the Eigenprojection of a Nonnegative Matrix at its Spectral Radius // Math. Prog. Study. 1976. V. 6. P. 188–201.

24. *Сирл С., Госман У.* Матричная алгебра в экономике. М.: Статистика, 1974.

25. *Мороз А.И.* Курс теории систем. М.: Высш. шк., 1987.

26. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

27. *Мельников О.В., Ремесленников Б.Н.* и др. Общая алгебра. Т. 1 / Под общ. ред. Л.А. Скорнякова. М.: Наука, 1990.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакшиным.

Поступила в редакцию 17.07.2017

После доработки 19.03.2018

Принята к публикации 08.11.2018