Автоматика и телемеханика, № 2, 2019

Управление в социально-экономических системах

© 2019 г. **С.М. ЛАВЛИНСКИЙ, д-р техн. наук (lavlin@math.nsc.ru)**
(Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Забайкальский государственный университет),
А.А. ПАНИН, канд. физ.-мат. наук (aapanin1988@gmail.com),
А.В. ПЛЯСУНОВ, канд. физ.-мат. наук (apljas@math.nsc.ru)
(Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет)

МОДЕЛИ ШТАКЕЛЬБЕРГА В ТЕРРИТОРИАЛЬНОМ ПЛАНИРОВАНИИ[1]

Предложена новая модель формирования механизма государственно-частного партнерства, формулируемая в виде задачи двухуровневого булева программирования. Показано, что данная задача является $\sum_2^P$-трудной как в оптимистической, так и в пессимистической форме. Разработан стохастический итерационный алгоритм решения данной задачи. Проведены вычислительные эксперименты на реальной информации, демонстрирующие возможности предлагаемого подхода.

Ключевые слова: стохастический локальный поиск, игра Штакельберга, задачи двухуровневого математического программирования, вычислительная сложность.

DOI: 10.1134/S0005231019020077

1. Введение

Поиск эффективных механизмов государственно-частного партнерства (ГЧП) — актуальная проблема для минерально-сырьевого комплекса России. За последние годы в этой сфере был запущен ряд проектов Инвестиционного фонда РФ, в которых государство на малоосвоенной территории оказывало помощь инвестору в создании инфраструктуры и реализации природоохранных мероприятий. Однако здесь не было достигнуто существенных успехов, прежде всего, потому, что все попытки Правительства РФ стимулировать использование партнерских отношений с частным бизнесом не сопровождались принятием экономически выверенных управленческих решений [1, 2].

Параллельно с запуском механизмов ГЧП государство создало законодательную основу для серьезных налоговых льгот крупным сырьевым проектам. Это открывает возможность совместного применения механизма ГЧП и

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Комплексной программы фундаментальных научных исследований СО РАН № II.1.

налоговых льгот. Практических примеров такого рода крупных проектов в России пока еще нет, но предшествующий негативный опыт делает актуальной задачу изучения свойств совокупного механизма взаимодействия, возможность применения которого открывают законы о ГЧП и льготах.

Эта проблема находится в центре внимания настоящей работы. Основная цель — разработка экономико-математических моделей формирования эффективного механизма партнерства, основанного на теоретико-игровой модели Штакельберга и использующего полный спектр возможностей, предоставляемых законодательством. Такой подход продиктован особенностями иерархии взаимодействия государства и частного инвестора в минерально-сырьевом секторе, позволяет найти компромисс интересов и обеспечивает эффективность в долгосрочном плане не только частным инвесторам, но и государству.

Настоящая работа — расширенная версия [3], продолжающая исследования авторов, начатые в [4, 5], где рассматривалась модель ГЧП, в которой помощь государства ограничивалась инвестициями на развитие инфраструктуры и природоохранные мероприятия. Здесь формулируется обобщенный вариант модели, учитывающий возможность использования и налоговых льгот. Модели такого вида востребованы практикой территориального планирования и могут быть использованы для решения стратегических задач управления ресурсным регионом.

Во втором разделе приводится постановка модели, в третьем разделе описывается сложностной статус двухуровневой постановки задачи планирования и излагается приближенный алгоритм ее решения. Четвертый раздел посвящен численным экспериментам с моделью, а в пятом обсуждаются результаты и дальнейшие направления исследований.

2. Математическая модель

Формальное описание модели формирования механизма ГЧП может быть представлено следующим образом. Введем обозначения:

I — набор инвестиционных проектов;

J — набор инфраструктурных проектов;

K — набор экологических проектов;

M — набор уровней налоговых льгот;

$T = \{1, \ldots, \overline{T}\}$ — плановый период (горизонт планирования — $\overline{T}$).

Инвестиционный проект i в год t:

CFP_i^t — поток наличности (кэшфло[2]); EPP_i^t — экологический ущерб от реализации проекта; DBP_i^t — бюджетные доходы государства от реализации проекта; ZPP_i^t — доходы населения (зарплата); TP_{im}^t — налоговая льгота уровня m по проекту.

Инфраструктурный проект j в год t:

[2] Равен разности полученных доходов и расходов всех видов.

ZI_j^t — затраты на реализацию проекта; EPI_j^t — экологический ущерб от реализации проекта; VDI_j^t — доходы государства от развития экономики территории при реализации проекта; ZPI_j^t – доходы населения (зарплата).

Экологический проект k в году t:

ZE_k^t — затраты на реализацию проекта; EDE_k^t — экологический доход при реализации проекта; ZPE_k^t — доходы населения (зарплата). Матрицы μ и ν задают взаимосвязь проектов, где μ_{ij} — индикатор связности инфраструктурных и производственных проектов, $i \in I$, $j \in J$, а ν_{ij} — индикатор связности экологических и производственных проектов, $i \in I$, $k \in K$:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если для реализации производственного проекта } i \\ & \text{требуется реализация инфраструктурного проекта } j, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\nu_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если для реализации производственного проекта } i \\ & \text{требуется реализация экологического проекта } k, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Дисконты государства и инвестора: DG — дисконт государства; DI — дисконт инвестора. Бюджетные ограничения: b_t^G — бюджет государства в год t; b_t^O — бюджет инвестора в год t.

Для описания выбора государства будем использовать следующие переменные:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если государство запускает инфраструктурный проект} \\ & \text{с номером } j, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\bar{y}_k = \begin{cases} 1, & \text{если государство готово реализовать } k\text{-й экологический проект} \\ & \text{(государство включило проект в бюджетные расходы),} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\bar{\varphi}_{im} = \begin{cases} 1, & \text{если государство готово предоставить инвестору налоговую} \\ & \text{льготу уровня } m \text{ для } i\text{-го производственного проекта,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для описания выбора инвестора будем использовать следующие переменные:

$$y_k = \begin{cases} 1, & \text{если государство запускает экологический проект с номером } k \\ & \text{по согласованию с инвестором,} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если инвестор запускает } i\text{-й производственный проект,} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$u_k = \begin{cases} 1, & \text{если инвестор запускает } k\text{-й экологический проект,} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\varphi_{im} = \begin{cases} 1, & \text{если государство предоставляет инвестору налоговую} \\ & \text{льготу уровня } m \text{ для } i\text{-го производственного проекта,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задача государства $\mathcal{PS}$:

$$\sum_{t\in T}\left(\sum_{i\in I}\left(DBP_i^t + ZPP_i^t - EPP_i^t\right) z_i - \sum_{i\in I}\sum_{m\in M} TP_{im}^t \varphi_{im} + \right.$$

$$+\sum_{j\in J}\left(VDI_j^t + ZPI_j^t - EPI_j^t - ZI_j^t\right) x_j + \sum_{k\in K}\left(EDE_k^t + ZPE_k^t - ZE_k^t\right) y_k +$$

$$\left. + \sum_{k\in K}\left(EDE_k^t + ZPE_k^t\right) u_k\right) /(1+DG)^t \to \max_{x,\bar{y},\bar{\varphi},\varphi,y,z,u} \tag{1}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j\in J} ZI_j^t\, x_j + \sum_{k\in K} ZE_k^t\, \bar{y}_k \leqslant b_t^G; \quad t\in T; \tag{2}$$

$$\sum_{m\in M} \bar{\varphi}_{im} \leqslant 1; \quad i\in I; \tag{3}$$

$$(y,z,u,\varphi) \in \mathcal{F}_O^*(x,\bar{y},\bar{\varphi}); \tag{4}$$

$$\bar{\varphi}_{im}, x_j, \bar{y}_k, \in \{0,1\}; \quad i\in I, \quad j\in J, \quad k\in K, \quad m\in M. \tag{5}$$

Целевая функция государства (1) представляет собой чистый дисконтированный доход пары государство — население и состоит из трех частей. Первая часть складывается из доходов государства и населения от производственных проектов с учетом экологических потерь, связанных с их реализацией, и налоговых льгот всех уровней. Остальные части доходов и расходов связаны с реализацией инфраструктурных и экологических проектов. Ограничения (2) гарантируют, что затраты государства на инфраструктуру и экологию не выйдут за рамки бюджета. Ограничения (3) запрещают государству предоставлять сразу несколько налоговых льгот одному проекту. В ограничении (4) через $\mathcal{F}_O^*(x,\bar{y},\bar{\varphi})$ обозначено множество всех оптимальных решений параметрической задачи инвестора. Таким образом, данное ограничение гарантирует, что государство учитывает только оптимальную реакцию инвестора.

Задача инвестора $\mathcal{PI}(x,\bar{y},\bar{\varphi})$:

$$\sum_{t\in T}\left(\sum_{i\in I}(CFP_i^t\, z_i + \sum_{m\in M} TP_{im}^t\, \varphi_{im}) - \sum_{k\in K} ZE_k^t u_k\right) /(1+DI)^t \to \max_{z,u,y,\varphi} \tag{6}$$

при ограничениях:

$$\sum_{k\in K} ZE_k^t\, u_k - \sum_{i\in I}\left(CFP_i^t\, z_i - \sum_{m\in M} TP_{im}^t\, \varphi_{im}\right) \leqslant b_t^O; \quad t\in T; \tag{7}$$

$$\sum_{t\in T}\left(\sum_{i\in I}\left(ZPP_i^t - EPP_i^t\right)z_i + \sum_{j\in J}\left(ZPI_j^t - EPI_j^t\right)x_j + \right.$$

$$\left. + \sum_{k\in K}\left(EDE_k^t + ZPE_k^t\right)(y_k + u_k)\right)/(1+DI)^t \geqslant 0; \tag{8}$$

$$\sum_{t\in T}\left(\sum_{i\in I} CFP_i^t\, z_i + \sum_{m\in M} TP_{im}^t\, \varphi_{im} - \sum_{k\in K} ZE_k^t\, u_k\right)/(1+DI)^t \geqslant 0; \tag{9}$$

$$\sum_{m\in M}\varphi_{im} \leqslant 1; \quad i\in I; \tag{10}$$

$$x_j \geqslant \mu_{ij}\, z_i; \quad i\in I, \quad j\in J; \tag{11}$$

$$y_k + u_k \leqslant 1; \quad k\in K; \tag{12}$$

$$y_k + u_k \geqslant \nu_{ik}\, z_i; \quad i\in I, \quad k\in K; \tag{13}$$

$$y_k + u_k \leqslant \sum_{i\in I}\nu_{ik}\, z_i; \quad k\in K; \tag{14}$$

$$y_k \leqslant \bar{y}_k; \quad k\in K; \tag{15}$$

$$\varphi_{im} \leqslant z_i; \quad i\in I; \tag{16}$$

$$\varphi_{im} \leqslant \bar{\varphi}_{im}; \quad i\in I; \quad m\in M; \tag{17}$$

$$y_k, z_i, u_k, \varphi_{im} \in \{0,1\}; \quad i\in I, \quad k\in K, \quad m\in M. \tag{18}$$

Доход частного инвестора определяется целевой функцией (6). Из (7) следует, что затраты инвестора в каждый год не превышают бюджет с учетом доходов от реализации инвестиционных проектов и налоговых льгот. Выполнение ограничения (8) говорит о достижении компромисса между интересами населения, государства и частного инвестора. Получение нормальной прибыли инвестором обеспечивает ограничение (9). Из ограничения (10) следует, что любой из производственных проектов инвестора может получить не более одной налоговой льготы. Ограничения (11)–(13) обеспечивают технологическую связность проектов и невозможность реализации одних и тех же экологических проектов одновременно инвестором и государством. Ограничение (14) блокирует запуск автономного экологического проекта без запуска какого-либо из связанных с ним производственных проектов. Ограничение (15) гарантирует реализацию государством только включенных в бюджет экологических проектов. Выполнение ограничений (16) означает, что государство предоставляет инвестору налоговую льготу производственному проекту только при условии, что инвестор запускает данный проект. Ограничение (17) гарантирует, что государство предоставляет инвестору налоговую льготу, если та была запланирована.

Под допустимым решением задачи (1)–(5) понимается любой вектор $(x, \bar{y}, \overline{\varphi}, y, z, u, \varphi)$, который удовлетворяет условиям (2)–(5). Традиционно в задачах двухуровневого программирования используются два определения понятия “наилучшего” решения: оптимальные (оптимистические) решения и наилучшие гарантированные (пессимистические) решения. Иногда также говорят, соответственно, кооперативные и некооперативные решения, особенно

в ситуациях, когда необходимо подчеркнуть игровую составляющую моделируемой ситуации, т.е. кооперируются уровни или нет в процессе принятия решения. Необходимость в фиксации такого рода отличий не возникает, если, например, задача нижнего уровня имеет единственное оптимальное решение. В общем случае приходится уточнять, как уровни взаимодействуют между собой. Как видно из постановки (1)–(5), в работе рассматривается ситуация, когда нижний уровень кооперируется с верхним уровнем. В данной ситуации это естественное соглашение, так как только государство берет на себя выполнение затратных инфраструктурных проектов, требующих большого времени для окупаемости. Поэтому для инвестора нет причин конкурировать с государством или стремиться нанести ему какой-либо ущерб. Таким образом, постановка (1)–(5) имеет дело с оптимистическими допустимыми решениями и, как следствие, с оптимистическими оптимальными решениями. Далее будем использовать следующее обозначение $F(x, \bar{y}, \bar{\varphi}, y, z, u, \varphi)$ для целевой функции государства. Если в модели (1)–(5) заменить множество $\mathcal{F}_O^*(x, \bar{y}, \bar{\varphi})$ на подмножество $\mathcal{F}_P^*(x, \bar{y}, \bar{\varphi})$, которое состоит из оптимальных решений (y', z', u', φ') задачи инвестора $\mathcal{PI}(x, \bar{y}, \bar{\varphi})$, удовлетворяющих свойству $(y', z', u', \varphi') \in \mathcal{F}_P^*(x, \bar{y}, \bar{\varphi})$ тогда и только тогда, когда $F(x, \bar{y}, \bar{\varphi}, y', z', u', \varphi') = \min_{(y,z,u,\varphi)\in\mathcal{F}_O^*(x,\bar{y},\bar{\varphi})} F(x, \bar{y}, \bar{\varphi}, y, z, u, \varphi)$, то получим двухуровневую постановку в пессимистической форме. В дальнейшем предполагается, что все исходные данные рациональны.

3. Вычислительная сложность и алгоритм решения

Введем далее необходимые определения и обозначения из теории сложности. Свяжем с произвольной оптимизационной задачей L задачу распознавания $D(L)$, в которой входом являются вход задачи L и произвольное рациональное число θ. Если задача L является задачей на максимум, то в задаче $D(L)$ надо установить существование допустимого решения со значением целевой функции большим или равным θ. Тогда $D(L)$ — стандартная задача распознавания, соответствующая оптимизационной задаче L. Задача распознавания L принадлежит классу Σ_2^P, если существует недетерминированная оракульная машина Тьюринга, которая распознает за полиномиальное время задачу L, используя в качестве оракула некоторый язык из класса NP. Класс Σ_2^P относится ко второму уровню полиномиальной иерархии [6].

Оптимизационная задача принадлежит классу NPO, если его стандартная задача распознавания принадлежит классу NP [6]. По аналогии, класс $\Sigma_2^P O$ содержит оптимизационные задачи, у которых соответствующая стандартная задача распознавания принадлежит классу Σ_2^P [7]. Класс NPO относится к первому уровню аппроксимационной иерархии, а класс $\Sigma_2^P O$, соответственно, ко второму уровню данной иерархии.

Теорема 1. Задача государства является NPO-трудной, а задача инвестора является NPO-полной относительно AP-сводимости[3].

Доказательства теоремы 1 и всех последующих результатов приведены в Приложении.

[3] Определение AP-сводимости можно найти в [8].

В [3, 6] было показано, что задача PS принадлежит классу $\Sigma_2^P O$. Таким образом, получена верхняя оценка на положение задачи государства в аппроксимационной иерархии. Теперь покажем, что задача государства является Σ_2^P-трудной. Это свойство следует из сведения Σ_2^P-полной задачи Subset-Sum-Interval к исследуемой задаче [3, 9].

Теорема 2. Задача государства является Σ_2^P-трудной.

Следствие 1. Стандартная задача распознавания для задачи государства является Σ_2^P-полной задачей.

Следствие 2. Задача государства без льгот и инфраструктурных проектов сохраняет Σ_2^P-трудность даже в случае трехлетнего горизонта планирования, а соответствующая стандартная задача распознавания сохраняет Σ_2^P-полноту.

Следствие 3. Утверждения теоремы 2 и следствий 1 и 2 выполняются для задачи государства в пессимистической постановке.

Описанное выше отношение исследуемой двухуровневой задачи к аппроксимационной и полиномиальной иерархиям свидетельствует о том, что она является значительно более сложной, чем широко известный класс NP-полных задач. Таким образом, для задачи государственно-частного партнерства приоритетным становится разработка приближенных алгоритмов на основе эвристических подходов. Для решения задачи планирования государственно-частного партнерства применяется стохастический приближенный гибридный алгоритм, использующий оригинальную процедуру построения начального решения двухуровневой задачи, стохастический локальный подъем и пакет CPLEX[4]. Пакет CPLEX используется для решения одноуровневой постановки, когда за инвестора принимает решение государство, а также для решения задачи инвестора. Локальным подъемом подбирается хорошее приближенное решение для государства.

При описании алгоритма решения задачи государства будем использовать понятие полудопустимых решений. Вектор $(x, \overline{y}, \overline{\varphi}, y, z, u, \varphi)$ называется полудопустимым решением задачи (1)–(5), если он удовлетворяет ограничениям (2), (3), (5), (7)–(18) [10].

Параметры алгоритма:

$mIter$ — максимальное число итераций алгоритма поиска начального решения (шаг 2),

$cfBound$ — коэффициент ослабления ограничения на значение целевой функции (1) при решении вспомогательной задачи на шаге 2.3.

Алгоритм 1 (Стохастический приближенный гибридный алгоритм).
Шаг 1. Вычислить верхнюю границу $Bound$, решив релаксированную задачу государства с ограничениями нижнего уровня (т.е. задачу с целевой функцией (1) и ограничениями (2), (3), (5), (7)–(18)).
Шаг 2. Найти вектор $(x^0, \overline{y}^0, \overline{\varphi}^0)$, который является частью некоторого полудопустимого решения (который далее будет использоваться как начальное решение алгоритма локального поиска):

[4] Данный алгоритм является модификацией метода, описанного в [4, 5].

Шаг 2.1. $iter := 1$.

Шаг 2.2. Если $iter \leqslant mIter$, тогда решить задачу инвестора с переменными и ограничениями государства (т.е. задачу с целевой функцией (6) и ограничениями (2), (3), (5), (7)–(18)), а также с дополнительным ограничением, что целевая функция государства (1) не меньше величины $(Bound - 1)/iter$. Иначе перейдем на шаг 3.

Шаг 2.3. Если задача на предыдущем шаге разрешима, а $(x, \overline{y}, \overline{\varphi}, y, z, u, \varphi)$ — оптимальное решение, тогда вычислим значение F целевой функции (1), решив задачу $PI(x, \overline{y}, \overline{\varphi})$. Если $F < (Bound - 1)/(iter * cfBound)$ или задача на предыдущем шаге была неразрешима, то положим $iter := iter + 1$ и перейдем на шаг 2.2, иначе положим $x^0 := x$, $\overline{y}^0 := \overline{y}, \overline{\varphi}^0 := \overline{\varphi}$, $F^0 := F$ и перейдем на шаг 3.

Шаг 3. Если на шаге 2 не удалось найти вектор $(x^0, \overline{y}^0, \overline{\varphi}^0)$, то в качестве него будем использовать нулевое решение, т.е. положим $x^0 := 0$, $\overline{y}^0 := 0$, $\overline{\varphi}^0 := 0$ и вычислим значение F^0 целевой функции (1), решив задачу $PI(x^0, \overline{y}^0, \overline{\varphi}^0)$. Далее применим алгоритм локального поиска:

Шаг 3.1. Положить в качестве стартового решения $(x, \overline{y}, \overline{\varphi}) := (x^0, \overline{y}^0, \overline{\varphi}^0)$, а рекорд $F := F^0$.

Шаг 3.2. Найти наилучшего соседа $(x^*, \overline{y}^*, \overline{\varphi}^*)$ в окрестности решения $(x, \overline{y}, \overline{\varphi})$.

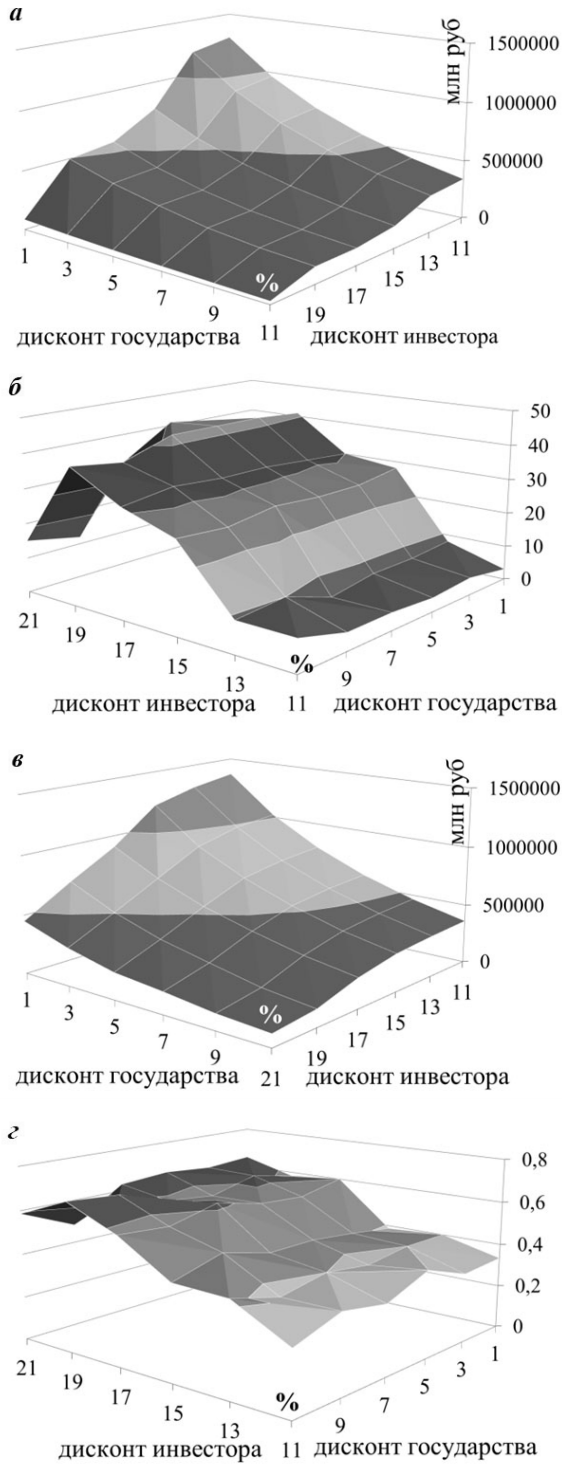
Шаг 3.3. Вычислим значение F^* целевой функции (1), решив задачу $PI(x, \overline{y}, \overline{\varphi})$. Если значение целевой функции $F^* > F$, тогда положим $x := x^*$, $y := \overline{y}^*$, $\varphi := \overline{\varphi}^*$, $F := F^*$ и перейдем на шаг 3.2, иначе стоп.

В качестве окрестности вектора $(x, \overline{y}, \overline{\varphi})$ в алгоритме локального поиска используется рандомизированная окрестность, которая имеет ровно одного соседа $(x', \overline{y}', \overline{\varphi}')$, полученного следующим образом. Каждая компонента вектора x' является случайной величиной, которая с вероятностью $1 - 1/|J|$ равна соответствующей компоненте вектора x, а с вероятностью $1/|J|$ — вектора $1 - x$. Аналогично и для вектора $\overline{y}'$, только вероятности соответственно равны $1 - 1/|K|$ и $1/|K|$. Для льгот $\overline{\varphi}'$ вероятности соответственно следующие: $1 - 1/(|I||M|)$ и $1/(|I||M|)$.

В процессе работы алгоритма локального поиска с рандомизированной окрестностью в качестве критерия остановки бралось ограничение на число итераций. Время работы локального спуска ограничивалось 5000 итерациями, а параметры $mIter$ и $cfBound$ равнялись 30 и 3 соответственно. Значения этих параметров, как и выбор окрестности в алгоритме локального поиска, подобраны эмпирически на основе предыдущих работ [4, 5].

4. Численный эксперимент

Для отработки методики использования описанного инструментария в работе строится специальный модельный полигон, прообразом которого является набор из 50 месторождений полиметаллических руд Забайкальского края. Для него строится набор из 10 инфраструктурных проектов, часть из которых уже реализуется (железная дорога, ЛЭП), а другие восполняют отсутствующую на сегодня, но необходимую с учетом проектов освоения место-



Дисконты партнеров, целевая функция государства, число и средний уровень льгот.

рождений инфраструктуру (ЛЭП, автомобильные дороги). Для каждого из месторождений предусмотрено пять уровней льгот.

Большая часть необходимых данных для модели может быть получена из ТЭО (технико-экономическое обоснование) проектов. Данные, выходящие за рамки обычного перечня информации, используемой в хозяйственной практике (стоимостные оценки экологического ущерба, экологического дохода, потока наличности, проектных и внепроектных доходов бюджета), генерируются в специальных моделях прогнозирования, включенных в состав модельного полигона [2, 4, 5].

Таким способом разработанный модельный полигон позволяет учесть специфику моделируемого объекта и создает информационную базу для изучения свойств равновесия по Штакельбергу. Методика такого исследования основана на анализе чувствительности решений соответствующей двухуровневой задачи булевого программирования к изменению основных параметров модели.

На рисунке приведены некоторые результаты расчетов, в которых анализировалась чувствительность решения задачи к изменению ключевых параметров модели — дисконтов инвестора и государства. Здесь представлены поверхности для значений функционала государства в базовом варианте без налоговых льгот (*а*) и в полной постановке модели, использующей рычаг налоговых преференций (*в*), для которой число и уровень льгот изображены на (*б*) и (*г*) соответственно. Расчеты показывают, что государство сложным образом использует все три рычага помощи инвестору на всем диапазоне дисконтов партнеров. Использование механизма льгот расширяет программу помощи в природоохранном строительстве, при этом число льгот и их уровень растут с увеличением дисконта инвестора. Это приводит к тому, что ввод механизма льготирования позволяет убрать впадину на поверхности модели (*а*), обеспечив большую устойчивость результатов партнерства в модели (*в*) при росте дисконта инвестора. Расчеты проводились на персональной ЭВМ с процессором i7 3612QM и оперативной памятью 4 гигабайта. Для каждой модели и каждой пары значений дисконтов для построения приближенного решения требовалось в среднем не более 30 минут.

5. Обсуждение полученных результатов

Государство, создав законодательную основу серьезных налоговых преференций для крупных сырьевых проектов, открывает возможность совместного применения механизма ГЧП и налоговых льгот. Результаты моделирования позволяют говорить о практической значимости описанных выше моделей и построить иерархию факторов, влияющих на эффективность такого взаимодействия государства и частного инвестора в процессе разработки комплекса месторождений на малоосвоенных территориях.

На такой модельной основе уже можно подойти и к решению центральной проблемы сырьевых регионов — разработке комплексного сценария освоения минерально–сырьевой базы, включающего планы развития производственной инфраструктуры и формирование пакетов инвестиционных предложений, содержащих правила предоставления налоговых льгот. И здесь необхо-

димо соблюсти интересы не только частного бизнеса, но и общества в целом. Поиск вариантов согласования этих интересов — непростая задача, на решение которой и нацелен инструментарий, предложенный в настоящей работе.

Дальнейшее направление исследований — переход к стохастической постановке задачи на основе подхода, предложенного в [11–13]. Сегодняшняя детерминированная форма оперирует прогнозным горизонтом 20–30 лет и использует методологию сценарного прогнозирования для внешних параметров модели — таких, например, как цены сырьевых рынков. Технически это заставляет эксперта строить достаточно представительное множество сценариев внешних условий, решать большое количество трудоемких задач двухуровневого программирования и уже на этой основе формулировать результаты. Практический опыт показывает чрезмерную трудоемкость такой процедуры для эксперта. И здесь перспективным представляются методы [11–13], позволяющие эффективно учесть исходную стохастическую природу проблемной области и перенести центр тяжести анализа непосредственно в модель. Другое интересное направление развивается в [14].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Данное утверждение следует из соответствующего утверждения для задач государственно-частного партнерства без льгот [4, 5]. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. В задаче Subset-Sum-Interval заданы положительные целые числа $q_1, \ldots, q_l$, R и r, где r не превосходит l. Требуется определить, существует ли такое S, $R \leqslant S < R + 2^r$, что для любого $I \subseteq \{1, \ldots, l\}$ выполнено $\sum_{i \in I} q_i \neq S$. Сведем данную задачу к задаче государства. Для этого построим вход задачи (1)–(18), в котором отсутствуют льготы, т.е. величины TP^t_{im} равны нулю. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что в оптимальном решении задачи $\overline{\varphi}_{im} = 0, i \in I, m \in M$, и, следовательно, $\varphi_{im} = 0$, $i \in I$, $m \in M$. Как результат, ограничения (3), (10) и (16), (17) становятся тривиальными.

Пусть имеется $l + 2$ производственных проектов и $r + 1$ экологических проектов. Предположим, что никакие инфраструктурные проекты не требуются для реализации производственных проектов, т.е. $\mu_{ij} = 0$, $i \in I$, $j \in J$, $VDI^t_j = ZPI^t_j = EPI^t_j = ZI^t_j = 0, t \in T, i \in I, j \in J$. Тогда коэффициенты при переменных x_j в целевой функции (1) и в ограничении (8) равны нулю и, следовательно, в оптимальном решении задачи можно положить $x_j = 0$, $j \in J$. Таким образом, ограничение (11) превращается в тождество.

Предположим, что горизонт планирования — три года. Для первых l производственных проектов $CFP^1_i = -q_i$, $CFP^2_i = 0$ и $CFP^3_i = 2q_i$. Для остальных: $CFP^1_{l+1} = -1/2$, $CFP^2_{l+1} = 0$, $CFP^3_{l+1} = 1$ и $DBP^3_{l+1} = \Delta$, $CFP^3_{l+2} = \Delta$, $DBP^3_{l+2} = 2\Delta$, где $\Delta = 2(R + 2^r)$ — достаточно большое положительное число. Все остальные параметры производственных проектов положим равными нулю. Всем производственным проектам, за исключением $(l + 2)$-го, не требуется реализация экологических проектов: $\nu_{ik} = 0$, $i \in I \setminus \{l + 2\}$, $k \in K$, а проекту $(l + 2)$ требуется реализация всех экологических проектов: $\nu_{l+2k} = 1$, $k \in K$. Определим затраты на реализацию экологических

проектов в первый и второй год как $ZE_1^1 = ZE_1^2 = R$, $ZE_2^1 = ZE_2^2 = 2^r/2$, $ZE_3^1 = ZE_3^2 = 2^r/4, \cdots, ZE_r^1 = ZE_r^2 = 2$, $ZE_{r+1}^1 = ZE_{r+1}^2 = 1$. Все остальные параметры экологических проектов равны нулю. Величины затрат выбраны так, что с их помощью можно выразить любое число S из интервала $R \leqslant S < R + 2^r$. Бюджет государства в любой год равен $R + 2^r - 1$. Бюджет инвестора в первый год равен $R + 2^r - 1$, во второй — $2^r - 1$, в третий год равен нулю. Отметим, что при таких исходных данных ограничения (3), (8), (10) являются тривиальными и не требуют проверки, а ограничения (11)–(13) сводятся к неравенствам $y_k + u_k \leqslant 1$, $y_k + u_k \geqslant z_{l+2}$, $y_k \leqslant \overline{y}_k$, $k \in K$. Целевые функции государства и инвестора записываются в следующем виде:

$$f^G(x, \overline{y}, y, z, u) = \Delta z_{l+1} + 2\Delta z_{l+2} - \left(\sum_k (ZE_k^1 + ZE_k^2 + ZE_k^3) y_k \right),$$

$$f^I(y, z, u) = \sum_i q_i z_i + z_{l+}/2 + \Delta z_{l+2} - \left(\sum_k (ZE_k^1 + ZE_k^2 + ZE_k^3) u_k \right).$$

Последующие рассуждения также основываются на структуре бюджетных ограничений государства:

$$\sum_k ZE_k^t \overline{y}_k \leqslant R + 2^r - 1, \quad t = 1, 2, 3,$$

и инвестора:

$$\sum_k ZE_k^1 u_k + \sum_{i=1}^{k} q_i z_i + z_{l+1}/2 \leqslant R + 2^r - 1, \quad \sum_k ZE_k^2 u_k \leqslant 2^r - 1.$$

Из вида целевых функций, структуры бюджетных ограничений и определения экологических проектов следует, что в оптимальном решении двухуровневой задачи и в оптимальном решении задачи инвестора реализуется производственный проект $(l + 2)$. Так как тогда $z_{l+2} = 1$, то ограничения (11), (12) эквивалентны равенствам $y_k + u_k = 1$. Таким образом, государство и инвестор должны выполнить все экологические проекты, поделив их между собой. В силу своих бюджетных ограничений государство не может реализовать экологические проекты с суммарными затратами $S \geqslant R + 2^r$. С другой стороны, из-за ограниченных возможностей инвестора во второй год государство не может реализовать экологические проекты на сумму S, строго меньшую, чем R.

Действительно, общая стоимость экологических проектов равна $R + 2^r - 1$. Тогда инвестору в этой ситуации надо оплатить выполнение экологических проектов на сумму $R + 2^r - 1 - S > 2^r - 1$, т.е. бюджетное ограничение нарушено. Таким образом, государство должно реализовать экологические проекты с суммарными затратами в первый и второй год, равными S, где $R \leqslant S < R + 2^r$, а инвестор реализует оставшиеся экологические проекты с суммарными затратами $R + 2^r - 1 - S$ в первый и второй год. После чего у инвестора в первый год остается от бюджета ровно S, что

он может потратить на первые $l+1$ проектов. Как следует из бюджетного ограничения инвестора на первый год, если есть такое $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, при котором выполнено $\sum_{i \in I} q_i = S$, то инвестор не сможет реализовывать проект $l+1$ (так как доход от реализации любого из производственных проектов с номером, не превосходящим l, строго больше, чем доход от реализации проекта $l+1$). Заметим, что $l+1$-й проект очень выгоден государству. Значит, государство будет так подбирать S ($R \leqslant S < R + 2^r$), чтобы для любого $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ выполнялось $\sum_{i \in I} q_i \neq S$, если это возможно. Таким образом, в задаче распознавания Subset-Sum-Interval ответ «да» тогда и только тогда, когда в задаче государства существует оптимальное решение со значением целевой функции, строго большим 2Δ. Все величины, фигурирующие в двухуровневой задаче, могут быть получены за полиномиальное время от длины входа задачи Subset-Sum-Interval. Теорема 2 доказана.

Доказательство следствия 1. Ранее [3] было показано, что стандартная задача распознавания для задачи государства принадлежит классу $\sum_2^P$. Из доказательства теоремы 2 следует полиномиальная сводимость задачи распознавания Subset-Sum-Interval к задаче $D(PS)$. Таким образом, задача $D(PS)$ является полной в классе $\sum_2^P$ и, следовательно, является самой сложной задачей данного класса.

Доказательство следствия 2. Прямо следует из доказательства теоремы 2.

Доказательство следствия 3. В пессимистической постановке задачи государства инвестор среди своих решений выбирает свое наименее интересное для государства оптимальное решение. Однако сводимость теоремы 2 устроена так, что у инвестора нет возможности повлиять на оптимум государства, перебирая свои оптимальные решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ерешко Ф.И.* Моделирование рефлексивных стратегий в управляемых системах. М.: ВЦ РАН, 2001.
2. *Лавлинский С.М.* Государственно-частное партнерство на сырьевой территории — экологические проблемы, модели и перспективы // Проблемы прогнозирования. 2010. № 1. С. 99–111.
3. *Кочетов Ю.А., Лавлинский С.М., Панин А.А., Плясунов А.В.* Вычислительная сложность моделей планирования государственно-частного партнерства // Тр. 12-й Междунар. Азиат. шк.-семинара “Проблемы оптимизации сложных систем”. 2016. С. 290–297.
4. *Лавлинский С.М., Панин А.А., Плясунов А.В.* Двухуровневая модель планирования государственно-частного партнерства // АиТ. 2015. № 11. С. 89–103.

   Lavlinskii S.M., Panin A.A., Plyasunov A.V. A Bilevel Planning Model for Public-private Partnership // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 11. P. 1976–1987.
5. *Лавлинский С.М., Панин А.А., Плясунов А.В.* Сравнение моделей планирования государственно-частного партнерства // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2016. Т. 23. № 3. С. 35–60.

   Lavlinskii S.M., Panin A.A., Plyasunov A.V. Comparison of Models of Planning the Public-Private Partnership // J. Appl. Ind. Math. 2016. V. 10. No. 3. P. 356–369.

6. *Ausiello G., Crescenzi P., Gambosi G., et al.* Complexity and approximation: combinatorial optimization problems and their aproximability properties. Berlin: Springer-Verlag, 1999.

7. *Панин А.А., Пащенко М.Г., Плясунов А.В.* Двухуровневые модели конкурентного размещения производства и ценообразования // АиТ. 2014. № 4. P. 153–169.

   Panin A.A., Pashchenko M.G., Plyasunov A.V. Bilevel Competitive Facility Location and Pricing Problems // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 4. P. 715–727.

8. *Панин А.А., Плясунов А.В.* О сложности двухуровневых задач размещения и ценообразования // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21. № 5. С. 54–66.

   Panin A.A., Plyasunov A.V. On complexity of bilevel problems of location and pricing // J. Appl. Ind. Math. 2014. V. 8. No. 4. P. 574–581.

9. *Eggermont C.E.J., Woeginger G.J.* Motion planning with pulley, rope, and baskets // Theory Comput. Syst. 2013. V. 53. No. 4. P. 569–582.

10. *Ben-Ayed O.* Bilevel linear programming // Comput. Oper. Res. 1993. V. 20. No. 5. P. 485–501.

11. *Иванов С.В.* Двухуровневые задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием // АиТ. 2014. № 1. С. 130–144.

    Ivanov S.V. Bilevel Stochastic Linear Programming Problems with Quantile Criterion // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 1. P. 107–118.

12. *Иванов С.В., Морозова М.В.* Стохастическая задача конкурентного размещения предприятий с квантильным критерием // АиТ. 2016. № 3. С. 109–122.

    Ivanov S.V., Morozova M. V. Stochastic Problem of Competitive Location of Facilities with Quantile Criterion // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 3. P. 451–461.

13. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.

14. *Alekseeva E., Kochetov Y., Talbi El-G.* A matheuristicfor the discrete bilevel problem with multiple objectives at the lower level // Int. Trans. Oper. Res. 2017. V. 24. No. 5. P. 959–981.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 10.12.2017

После доработки 27.06.2018

Принята к публикации 08.11.2018